Regelungstechnik: Übungsblatt 3 - Übertragungsfunktion

1. Aufgabe:

Die Eigenwerte der homogenen Differenzialgleichung:

$\ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) - 3x(t) = 0$

sind zu berechnen und die Stabilität des allgemeinen Systems ist zu prüfen.

Lösung:

a) Bilden der charakteristischen Gleichung: $s^2 + 2s - 3 = 0$

b) Berechnen der Eigenwerte:

$$as^2 + bs + c = 0 \quad \Rightarrow \quad s_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$a = 1, b = 2, c = -3 \quad \Rightarrow \quad s_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = -1 \pm 2$$

$$\Rightarrow \quad s_1 = 1 \text{ und } s_2 = -3$$

c) Prüfen auf Stabilität: Der Eigenwert s_1 ist positiv und liegt in der rechten s-Halbebene. Das System ist damit instabil.

2. Aufgabe:

Ist folgendes System stabil, grenzstabil oder instabil?

$\ddot{x}_a(t) + 4\dot{x}_a(t) + 5x_a(t) = 2\dot{x}_e(t) + 6x_e(t)$

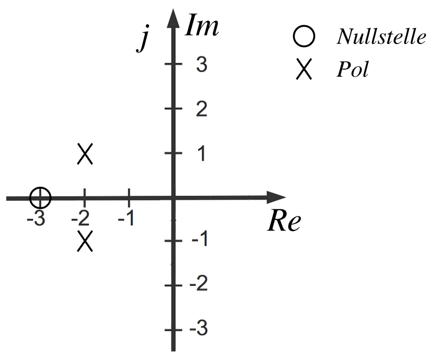
Lösung:

$$G(s) = \frac{Z(s)}{N(s)} = \frac{2s + 6}{s^2 + 4s + 5}$$

$$Z(s): \quad 2s + 6 = 0 \quad \Rightarrow s_{Z1} = -3$$

$$N(s): \quad s^2 + 4s + 5 = 0 \quad \Rightarrow s_{N1} = -2 + j, \quad s_{N2} = -2 - j$$

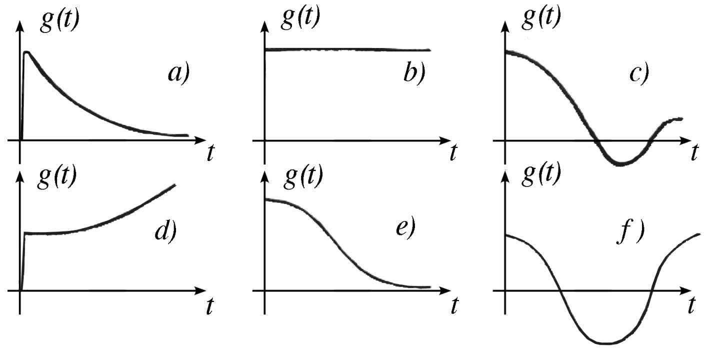
Die Nullstelle ist negativ reell, die Pole sind konjugiert komplex und befinden sich in der linken Halbebene. Somit weist das System stabiles Verhalten auf.



3. Aufgabe:

a) Geben Sie an, welche der Impulsantworten zu einem stabilen, grenzstabilen oder instabilen System gehören. Begründen Sie.

b) Nennen Sie die Systeme, die den Impulsantworten entsprechen.



Lösung:

Wenn die Impulsantwort dem Endwert Null zustrebt, dann ist das System stabil.
Die Impulsantwort ist die zeitliche Ableitung der Sprungantwort. Damit lässt sich auch der Systemtyp direkt bestimmen.

Impulsantwort	**Stabilität**	**Systemtyp**
a)	stabil	PT_1
b)	grenzstabil	I
c)	stabil PT_2	schwingungsfähig, $0 < D < 1$
d)	instabil PT_1	Pol rechts (Realteil positiv)
e)	stabil PT_2	nicht schwingungsfähig, $D > 1$ oder 2 mal PT_1 in Reihe
f)	grenzstabil PT_2	schwingungsfähig, $D = 0$

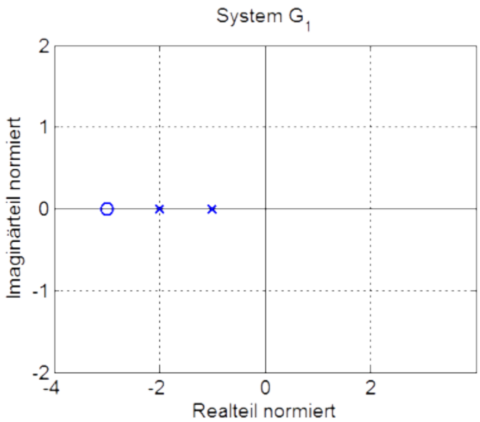
4. Aufgabe:

Erstellen Sie die den Amplitudengang des Bodediagramms für folgende (stabile) Übertragungsfunktion:

$$G_1(s) = \frac{s+3}{(s+1)\cdot(s+2)}$$

Lösung:

Das System hat die Pole α_1 = - 1 und α_2 = - 2
Es besitzt die Nullstelle β_1 = - 3 in der negativen Halbebene



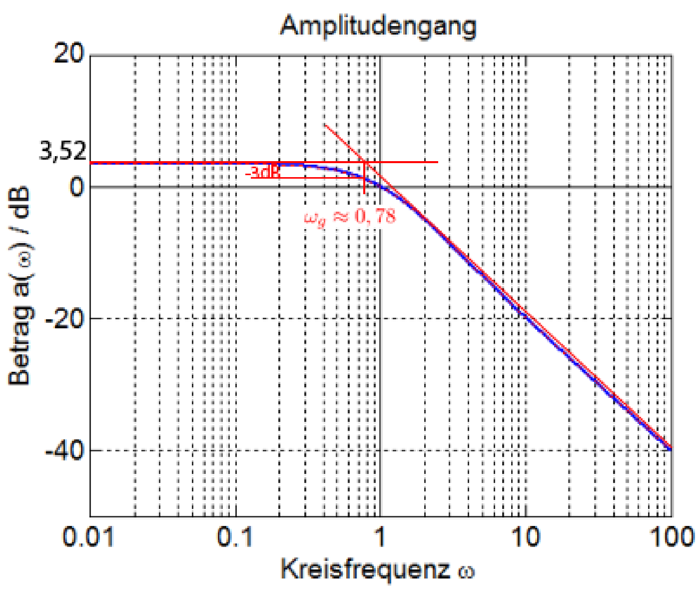
Das System hat ausschließlich Pole in der negativen Halbebene und ist stabil.
Der Frequenz- bzw. Amplitudengang (Realteil) ergibt sich mit $|z| = \sqrt{z\cdot\bar{z}}$ zu:

$$G_1(\omega) = \frac{j\omega+3}{(j\omega+1)(j\omega+2)} \Rightarrow |G_1(\omega)| = \frac{\sqrt{(j\omega+3)\cdot(-j\omega\cdot 3)}}{|j\omega+1|\cdot|j\omega+2|} = \frac{\sqrt{w^2+9}}{\sqrt{\omega^2+1}\cdot\sqrt{\omega^2+4}}$$

$$\lim_{\omega\to 0}|G_1(\omega)| = \frac{\sqrt{0+9}}{(\sqrt{0+1})\cdot(\sqrt{0+4})} = \frac{3}{\sqrt{1}\cdot\sqrt{4}} = \frac{3}{2} = 1,5$$

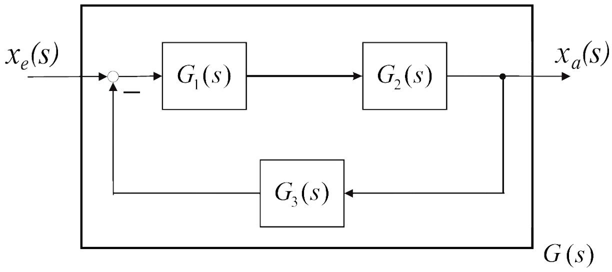
$\Rightarrow R[dB] = 20\cdot\lg(\frac{\hat{x}_a}{\hat{x}_e}) = 20\cdot\lg(1,5) \approx 3,52dB$ (Zeichnen des Diagramms mit einigen ω-Werten)

Knickfrequenz: Abfall der Amplitude $\frac{\hat{x}_a}{\hat{x}_e}$ um $\frac{1}{\sqrt{2}}$ bzw. $20\cdot\log_{10}(\frac{1}{\sqrt{2}}) \approx -3,01dB$
$|G_1(\omega_g)| = |G_1(\omega)|\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \omega_g \approx 0,78$ (aus Diagramm grafisch ermitteln)
Abfall ab Knickfrequenz ω_g : $|G_1(\omega)|$ fällt für $\lim_{\omega\to\infty}$ $|G_1(\omega)|$ mit $\frac{1}{\omega^2}$ also mit $20dB$ pro Dekade



5. Aufgabe:

Gegeben ist folgender Regelkreis. Berechnen Sie $G_3(s)$
Es gilt: $G_1(s) = 2s + 12 \quad G_2(s) = 0,5 \quad G_3(s) = ?$
Weiterhin gilt: Das System antwortet auf $x_e(t) = \sigma(t)$ mit $x_a(t) = (2 - e^{-3t}) \cdot \sigma(t)$.



Lösung:

Formel für Gesamtsystem $G(s)$ herleiten, oder in Formel aus Skript (S.40) mit G_2 multiplizieren:

$$G(s) = \frac{x_a(s)}{x_e(s)} = \frac{G_1 \cdot G_2}{1 + G_1 \cdot G_2 \cdot G_3} = \frac{s+6}{1 + (s+6) \cdot G_3}$$

Bekannt:
Eingang $x_e(t) = \sigma(t)$ (Eingangssprung) $\rightarrow$ Systemantwort $x_a(t)$ (Sprungantwort $h(t)$).

Es gilt der Zusammenhang zwischen Impulsantwort $g(t)$ und $h(t)$ (Skript S. 15):

Impulsantwort: $g(t): \; G(s) = \mathscr{L}\left\{g(t)\right\} = \mathscr{L}\left\{\frac{dh(t)}{dt}\right\} = s \cdot \mathscr{L}\left\{h(t)\right\}$

$$\Rightarrow \; \frac{1}{s} \cdot G(s) = \mathscr{L}\left\{h(t)\right\} \qquad \text{mit } h(t) = x_a(t)$$

$$x_a(t) = \underbrace{(2 - e^{-3t}) \cdot \sigma(t)}_{\substack{Sprungantwort\\ im Zeitbereich}} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad x_a(s) = \underbrace{\frac{2}{s} - \frac{1}{s+3}}_{\substack{Sprungantwort\\ im Bildbereich}} \quad = \quad \underbrace{G(s) \cdot \frac{1}{s}}_{\substack{Sprungantwort\\ im Bildbereich}}$$

Bemerkung:
Betrachtet man $x_a(t)$ als Faltung von $x_e(t)$ mit $\boldsymbol{g(t)}$, so ist $\sigma(t)$ das neutrale Element (0 für $t < 0$, sonst 1).

$$x_a(t) = \int_0^t x_e(\tau) \cdot g(t - \tau) \cdot d\tau$$

$$x_a(t) = x_e(t) * g(t)$$

$$X_a(s) = X_e(s) \cdot G(s)$$

$$\Rightarrow \; G(s) = s \cdot \left(\frac{2}{s} - \frac{1}{s+3}\right) = \frac{2s}{s} - \frac{s}{s+3} = \frac{2s(s+3) - s^2}{s(s+3)} = \frac{2s + 6 - s}{s+3} = \frac{s+6}{s+3}$$

$G(s)$ gleichsetzen:

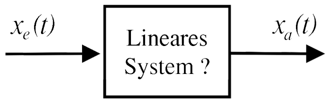
$$\frac{s+6}{s+3} = \frac{s+6}{1 + (s+6) \cdot G_3} \quad \Rightarrow \quad G_3(s) = \frac{s+2}{s+6}$$

6. Aufgabe:

Begründen Sie ob folgende Systeme linear oder nichtlinear sind.

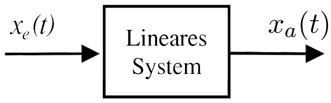
a) $x_a(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} x_e(\tau) \cdot d\tau$

b) $x_a(t) = x_e^2$



Lösung:

a)



$x_a(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} x_e(\tau) \cdot d\tau$

$$x_a(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} \Big(x_{e1}(\tau) + x_{e2}(\tau)\Big) \cdot d\tau = \int\limits_{-\infty}^{t} x_{e1}(\tau) d\tau + \int\limits_{-\infty}^{t} x_{e2}(\tau) d\tau = x_{a1}(t) + x_{a2}(t)$$

b)

$x_a(t) = x_e^2$

$$x_a(t) = \Big(x_{e1}(t) + x_{e2}(t)\Big)^2 = x_{e1}^2(t) + x_{e2}^2(t) + \underbrace{2 \cdot x_{e1}(t) \cdot x_{e2}(t)}_{\text{neue Frequenzen}} \neq x_{a1}(t) + x_{a2}(t)$$

7. Aufgabe:

Das Kennlinienfeld einer Regelstrecke ist gegeben.
Die Regelstrecke soll im Arbeitspunkt $Y_0 = 4$ und $Z_0 = 4$ linearisiert werden.

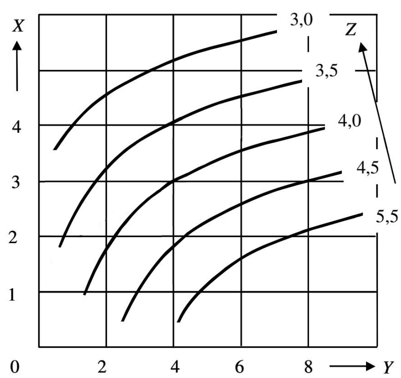


Bild 0.1: Kennlinienfeld einer Regelstrecke

Lösung:

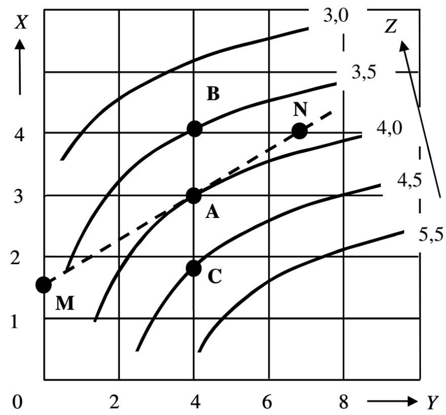


Bild 0.2: Kennlinienfeld einer Regelstrecke

Die Steigung der Tangente zur Kennlinie $X = f(Y)$ ergibt sich mit Hilfe von zwei beliebig (falls keine Angabe vorhanden) gewählten Punkten M und N:

$$K_{PS_y} = \left(\frac{\Delta X}{\Delta Y}\right) = \frac{X_M - X_N}{Y_M - Y_N} = \frac{1,6 - 4}{0 - 6,9} = 0,35$$

Um die Kennlinie $X = f(Z)$ für die Ermittlung der Steigung der Tangente K_{PS_z} nicht gesondert zu skizzieren, wählen wir die Punkte B und C, die vom Arbeitpunkt $Z_0 = 4$ gleichermaßen um $Z = 0,5$ entfernt sind. Damit wird die Steigung der Sekante berechnet, die sich von der Tangente für kleine Abweichungen Z nur gering unterscheidet:

$$K_{PS_z} = \left(\frac{\Delta X}{\Delta Z}\right) = \frac{X_B - X_C}{Z_B - Z_C} = \frac{4 - 1,8}{3,5 - 4,5} = -2,2$$

Das gesuchte statische Verhalten der linearisierten Regelstrecke im Arbeitspunkt ist:

$x = 0,35y - 2,2z$