Regelungstechnik: Übungsblatt 2 - Mathematische Grundlagen

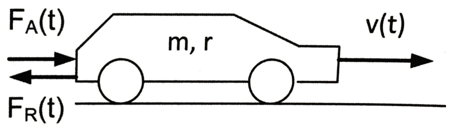
1. **Aufgabe:**

   Leiten Sie aus dem Kräftegleichgewicht eines sich beschleunigenden Fahrzeuges die Differenzialgleichung her. Verwenden Sie für die Größen:

   Antriebskraft $F_A(t)$, Beschleunigungskraft $F_B(t)$, Geschwindigkeit $v(t)$, Gegenkraft (Reibungskraft) $F_R(t)$, Gesamtmasse m.

   Die Gegenkraft F_R soll mit einem Faktor r proportional zur Geschwindigkeit $v(t)$ sein (gültig für kleine Geschwindigkeiten, sonst gilt $F_R \sim v^2(t)$).

   Lösung:



   $F_B(t) = F_A(t) - F_R(t)$

   Beschleunigungskraft $F_B(t) = m \cdot \dot{v}(t)$

   Reibungskraft $F_R(t) = r \cdot v(t)$

   $m \cdot \dot{v}(t) = F_A(t) - r \cdot v(t)$

   $m \cdot \dot{v}(t) + r \cdot v(t) = F_A(t)$

   Mit zunehmender Geschwindigkeit nehmen die Gegenkräfte wie Reibung und Luftwiderstand so lange zu, bis die Gegenkraft die Antriebskraft erreicht hat. Die Geschwindigkeit ist dann $v(t) = const.$ bzw. die Beschleunigung $\dot{v}(t) = 0$.

2. **Aufgabe:**

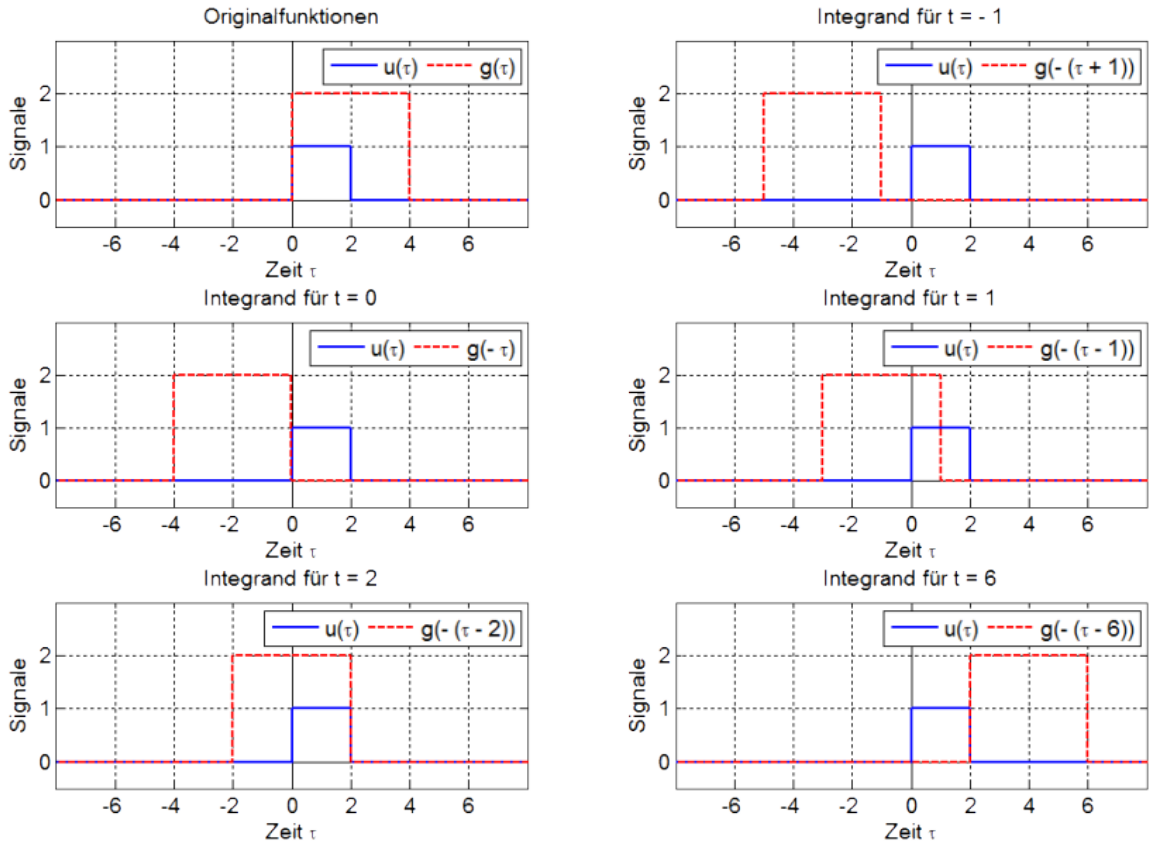
   Warum ist in der Regelungstechnik die Gewichtsfunktion eines Systems von großer Bedeutung?

   Lösung:
   Gewichtsfunktion ist wichtig, weil sie alle Informationen über das untersuchte lineare System enthält und sich auch Aussagen über die Systemstabilität treffen lassen.

3. Aufgabe:

Bestimmen Sie grafisch die **Faltung** folgender zweier Rechteckfunktionen:

$u(t) = \sigma(t) - \sigma(t-2)$ und $g(t) = 2 \cdot (\sigma(t) - \sigma(t-4))$



Lösung:

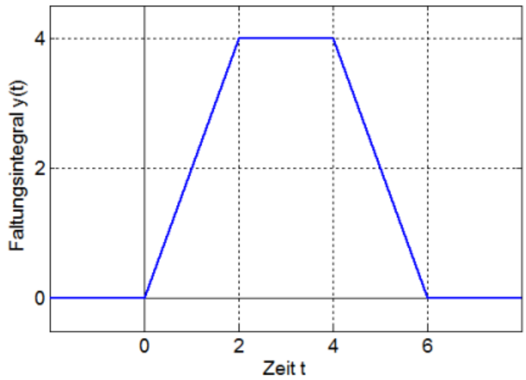
Das Bild stellt die Funktionen für unterschiedliche Zeitpunkte t dar. Das Integral der Faltungsfunktion berechnet sich aus der Fläche, die unter dem Produkt der beiden Funktionen $u(t)$ und $g(t-\tau)$ liegt.

Für $t = 0$ überschneiden sich die Funktionsbereiche, die ungleich null sind, **nicht**. Das Produkt der beiden Funktionen ist für $t = 0$ null. Für negative Werte von t ist das ebenfalls der Fall.

Für positive Werte von t überschneiden sich die Funktionsbereiche, in den die Funktionen ungleich null sind. Das gilt für den Bereich $0 < t < 6$. Für den Bereich $2 \leq t < 4$ überdecken sich die Funktionen komplett, hier ergibt sich ein konstanter Wert des Faltungsintegrals von 4, da die Fläche in diesem Bereich konstant bleibt. Für $t > 6$ liegt wieder keine Überschneidung vor, das Produkt der Funktionen ist für alle τ null.

Die Überlappung der beiden Rechtecke steigt also von $t = 0$ bis $t = 2$ linear an und hat für $t = 2$ den maximalen Wert von 4.

Dieser Werte bleibt bis $t = 4$ konstant. Danach reduziert sich die Überlappung wieder linear, und es ergibt sich ein Wert von 0 für $t = 6$.



4. Aufgabe:

Bestimmen Sie für folgende Funktionen ihre Fourierreihe:

a) $f(t) = \cos^2(t)$

b) $f(t) = \sin^3(t)$

Lösung:

Wir können uns das Integrieren sparen und können direkt die folgende Gleichheit zeigen:

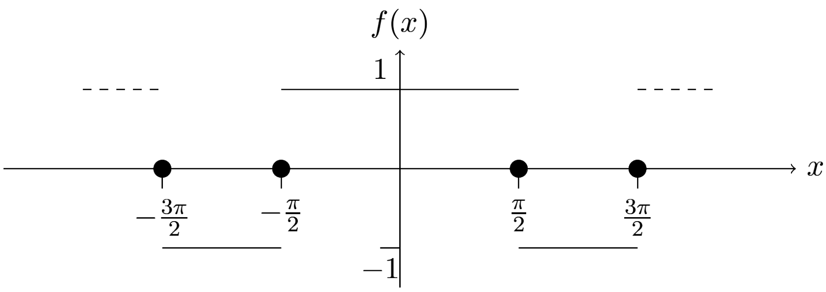
a) $f(t) = \cos^2(t) = \frac{1}{2}\Big(1 + \cos(2t)\Big)$

b) $f(t) = \sin^3(t) = \frac{1}{4}\Big(3\sin(t) - \sin(3t)\Big)$

Der Vorteil von diesem Vorgehen ist, dass wir daraus sofort die Fourierreihen bzw. die Koeffzienten ablesen können.

5. Aufgabe:

Geben Sie für die folgende Funktion (Recheckimpuls) einen formelmäßigen Ausdruck an. Berechnen Sie die zugehörige Fourierreihe. Gibt es vielleicht eine Symmetrie, welche man ausnutzen könnte?



Lösung:

Zunächst bemerken wir, dass die Funktion eine Periode von $T = 2\pi$ hat und lässt sich durch die folgende Funktion auf $[-\pi, \pi]$ ausdrücken:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, \\ 0, & x = \pm\frac{\pi}{2}, \\ -1, & -\pi < x < -\frac{\pi}{2}, \\ -1, & \frac{\pi}{2} < x < \pi. \end{cases}$$

Des Weiteren ist die Funktion dankbarerweise achsensymmetrisch, weswegen wir nur die Kosinuskomponenten berechnen müssen, d.h. $b_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{R}$. Es ist weiter:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\left(-\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dx - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} dx\right) = 0.$$

6. Aufgabe:

Welche Idee steckt hinter der Einführung der Laplace-Transformation?

Lösung:

- DGL auf algebraische (einfachere) Gleichung zurückführen;
- Lösung der algebraischen Gleichung;
- Rücktransformation zur Bestimmung der Lösung der DGL; hierbei schon Verwendung der Anfangsbedingung

7. Aufgabe:

Für folgende Funktionen $f(t)$ sind die Bildfunktionen $F(s)$ bzw. $F(p)$ mit Hilfe der Korrespondenztabellen im Skript (S. 39) bzw. im Anhang zu bestimmen.

$f_0(t) = \delta(t)$ (Delta-Impuls) **Lösung:** $F_0(s) = 1$

$f_1(t) = K\delta(t)$ **Lösung:** $F_1(s) = K$

$f_2(t) = K \cdot 1(t)$ **Lösung:** $F_2(s) = K \cdot \sigma(t) = \frac{K}{s}$

$f_3(t) = t^2$ **Lösung:** $F_3(s) = \frac{n!}{s^{n+1}} = \frac{2}{s^3}$ mit $n = 2$

$f_4(t) = e^{-4t} + te^{-6t}$ **Lösung:** $F_4(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{(s+6)^2}$

$f_5(t) = sin(\omega t)$ **Lösung:** $F_5(s) = \frac{\omega}{(s^2 + \omega^2)}$

8. Aufgabe:

Für folgende Bildfunktionen $F(s)$ sind die Zeitfunktionen $f(t)$ mit Hilfe der Korrespondenztabelle zu bestimmen.

$F_1(s) = \frac{2}{(s+6)}$ **Lösung:** $f(t) = 2e^{-6t}$

$F_2(s) = \frac{s}{(s^2+9)}$ **Lösung:** $f_2(t) = \cos(3t)$

9. Aufgabe:

Für folgendes Polynom soll die Polynomdivision angewendet werden.

$(x^3 - 12x^2 + 5x + 150) : (x - 5) = \ ?$

Lösung:

$$
\begin{array}{l}
(x^3 - 12x^2 + \ \ 5x + 150) : (x - 5) = x^2 - 7x - 30 \\
\underline{-(x^3 - \ \ 5x^2)} \\
\qquad\quad -7x^2 + \ \ 5x \\
\qquad \underline{-(-7x^2 + 35x)} \\
\qquad\qquad\qquad -30x + 150 \\
\qquad\qquad\quad \underline{-(-30x + 150)} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$