

Mitschrift

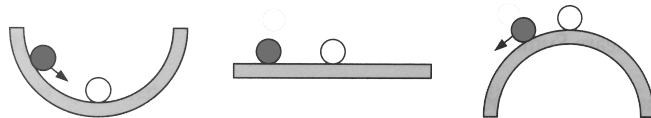
- Skript -

Regelungstechnik TWIE24

Wahlpflichtmodul Technik
Studiengang Wirtschaftsingenieurwesen

Prof. Dr.-Ing. Stephan Sauter

Q4 2026



Inhaltsverzeichnis

Vorwort	1
1 Faszination Regelungstechnik	2
1.1 Anwendungsgebiete	2
1.2 Geschichte	9
1.3 Messen, Steuern, Regeln	10
1.4 Regelkreis	12
1.5 Beispiele	12
1.6 Regelstrecke	13
1.7 Reglerentwurf	14
2 Mathematische Grundlagen	15
2.1 LTI-Systeme	15
2.2 Statisches und Dynamisches Verhalten	16
2.3 DGL	16
2.4 Testfunktionen und Systemantworten	20
2.4.1 Impulsfunktion und Impulsantwort	20
2.4.2 Sprungfunktion und Sprungantwort	20
2.4.3 Rampenfunktion und Rampenantwort	21
2.4.4 Verknüpfung der Testfunktionen	21
2.4.5 Faltung	22
2.5 Fourier-Reihen und Fourier-Transformation (Grundidee)	24
2.6 Anwendungen	25
2.7 Laplace-Transformation und Bildbereich	26
2.8 Endwertsatz der Laplace-Transformation	32
2.9 Laplace-Rechenregeln	33
2.10 Polynomdivision	34
2.11 Weitere mathematische Grundlagen	34
3 Die Übertragungsfunktion	35
3.1 Definition	36
3.2 Allgemeine Darstellungsformen der Übertragungsfunktion	37
3.3 Nullstellen und Pole	38
3.4 Frequenzgang	40
3.5 Bodediagramm	42
3.6 Ortskurve (Nyquist Diagramm)	47
3.7 Sprungfähigkeit	48
3.8 Block-Verschaltung	49
3.8.1 Parallelschaltung	49
3.8.2 Reihenschaltung	49
3.8.3 Rückkopplung	50
3.9 Linearisierung	51

3.10	Übertragungsfunktionen von Reglern und Strecken	53
4	Die Regelstrecke	54
4.1	Regelstrecken mit und ohne Ausgleich	55
4.2	P-System	56
4.3	T_0 -System (Totzeitsystem)	57
4.4	PT_1 -System	58
4.5	PT_2 -System:	59
4.5.1	PT_2 -System: Nicht schwingfähig	62
4.5.2	PT_1T_2 -System: Schwingfähig	63
4.6	I-System	64
4.7	IT_1 -System	65
4.8	D-System	66
4.9	DT_1 -System	67
4.10	Übersicht: Regelstrecken	68
5	Regeleinrichtungen	69
5.1	Unstetige Regler	70
5.2	Stetige Regler	70
5.2.1	P-Regler	71
5.2.2	I-Regler	73
5.2.3	PI-Regler	75
5.2.4	D-Regler	77
5.2.5	PD-Regler	78
5.2.6	Idealer PID-Regler	80
5.2.7	Realer PID-Regler ($PIDT_1$ -Regler)	81
5.3	Realisierung in analoger Schaltungstechnik	84
5.4	Auswahl von stetigen Reglern	86
5.5	Digitale Regler	87
6	Reglerauslegung	88
6.1	BIBO-Stabilität	88
6.2	Asymptotische Stabilität	88
6.3	Grundlegendes Stabilitätskriterium	89
6.4	Der Regelkreis	90
6.5	Nyquistkriterium	92
6.6	Reglerentwurf	95
6.7	Gütekriterien	96
6.8	Integralkriterien	97
6.9	Einstellregeln für PID-Regler	99
6.9.1	Ziegler und Nichols (Stabilitätsmethode)	99
6.9.2	Nach Chien, Hrones und Reswick (Wendetangen-Methode)	100
6.10	Wurzelortungsverfahren	101
6.11	Frequenzkennlinienverfahren	103
7	Anhang	104
7.1	Quadratische Gleichungen	104
7.2	Komplexe Zahlen	105
7.3	Tabelle von Laplacetransformationen	106
7.4	Blocksysteme	107
7.5	Übertragungsglieder	108
7.6	Pole, Nullstellen und Bodediagramme	109
7.7	Matlab	110

Vorwort

Das vorliegende Skript soll vorlesungsbegleitend dem Hörer das Abzeichnen bzw. Abschreiben der Inhalte ersparen. Falls eine Vorlesungsstunde versäumt wurde, kann der Hörer anhand des Skriptes ersehen, welcher Stoff z.B. mit einem Buch nachgeholt werden sollte.

Bei allen Betrachtungen steht eine anschauliche Darstellung im Vordergrund. Es soll versucht werden, dem Leser Hinweise zu geben, die ihm bei der Lösung der anstehenden Probleme nützlich sind.

Insbesondere wird darauf hingewiesen, dass für die Prüfung das selbständige Lösen der Übungsaufgaben nicht nur empfohlen, sondern vorausgesetzt wird!

Vorlesungsinhalt:

- Unbehauen, Heinz: Regelungstechnik I; Vieweg Verlag; 2005
- Tröster, Fritz: Steuerungs- und Regelungstechnik für Ingenieure, Oldenbourg, 2011
- Zacher S., Reuter M.: Regelungstechnik für Ingenieure, Vieweg Verlag, 2017
- Tieste, K., Romberg O.: Keine Panik vor Regelungstechnik! Vieweg Verlag, 2011

Weiterführende Literatur:

- Unbehauen, H.: Regelungstechnik 2
- Lunze, J.: Regelungstechnik 2
- Schulz, G.: Regelungstechnik 2

Links:

- Tools: www.eit.hs-karlsruhe.de/mesysto/downloads
- Glosar: <http://glossar.item24.com/de/start/>
- Musterlösungen für die Übungsaufgaben, Formelsammlungen und Skript:

www.Freiwilligschlauwerden.de



KAPITEL 1

Faszination Regelungstechnik

Regelungstechnik ist eine Ingenieurwissenschaft, welche die in der Technik vorkommenden Regelungsvorgänge behandelt. Sie ist wie die Mess- und Steuerungstechnik ein Teilgebiet der Automatisierungstechnik.

Ein technischer Regelvorgang ist eine gezielte Beeinflussung von physikalischen, chemischen oder anderen Größen in technischen Systemen. Die sogenannten Regelgrößen sind dabei auch beim Einwirken von Störungen entweder möglichst konstant zu halten (Festwertregelung) oder so zu beeinflussen, dass sie einer vorgegebenen zeitlichen Änderung folgen (Folgeregelung).

Regelung bedeutet Messen der zu beeinflussenden Größe (Regelgröße) in der Regelstrecke und kontinuierliches Vergleichen mit dem gewünschten Wert (Sollwert oder Führungsgröße). Der Regler bestimmt entsprechend der Abweichung (Regeldifferenz) eine Stellgröße, die so auf die Regelgröße einwirkt, dass sie die Abweichung minimiert und die Regelgröße ein gewünschtes Zeitverhalten annimmt trotz vorhandener Störgrößen.

1.1 Anwendungsgebiete

Viele verschiedene Gebiete, eine gemeinsame Theorie:

- Biologie
- Medizintechnik
- Volkswirtschaft, Sozialwissenschaften
- Automobil- /Verkehrstechnik
- Luft- und Raumfahrt
- Künstliche Intelligenz (KI)
- Chemie- /Verfahrens- und Prozesstechnik
- Kraftwerksautomatisierung
- Fertigungsautomatisierung
- Gebäudeautomatisierung
- Klima der Erde... uvm.

Biologische Regelung: Menschlicher Körper

Unter biologischer Regelung versteht man die Regelungsmechanismen innerhalb eines Organismus. Der menschliche Körper unterliegt ständig Einflüssen (Reizen) von außen und aus dem Körperinneren, die wichtige Funktionen stören können.

Diese Störgrößen bewirken, dass die Regelgrößen von ihrem Sollwert (dem "Normalwert") nach oben oder unten abweichen. Der Organismus versucht dies durch **Regelung** wieder auszugleichen.

Regelgrößen des Vegetativen Nervensystems (VNS) sind z.B.:

- Körpertemperatur
- Blutzucker
- Blutdruck
- Herzfrequenz
- Hormone...

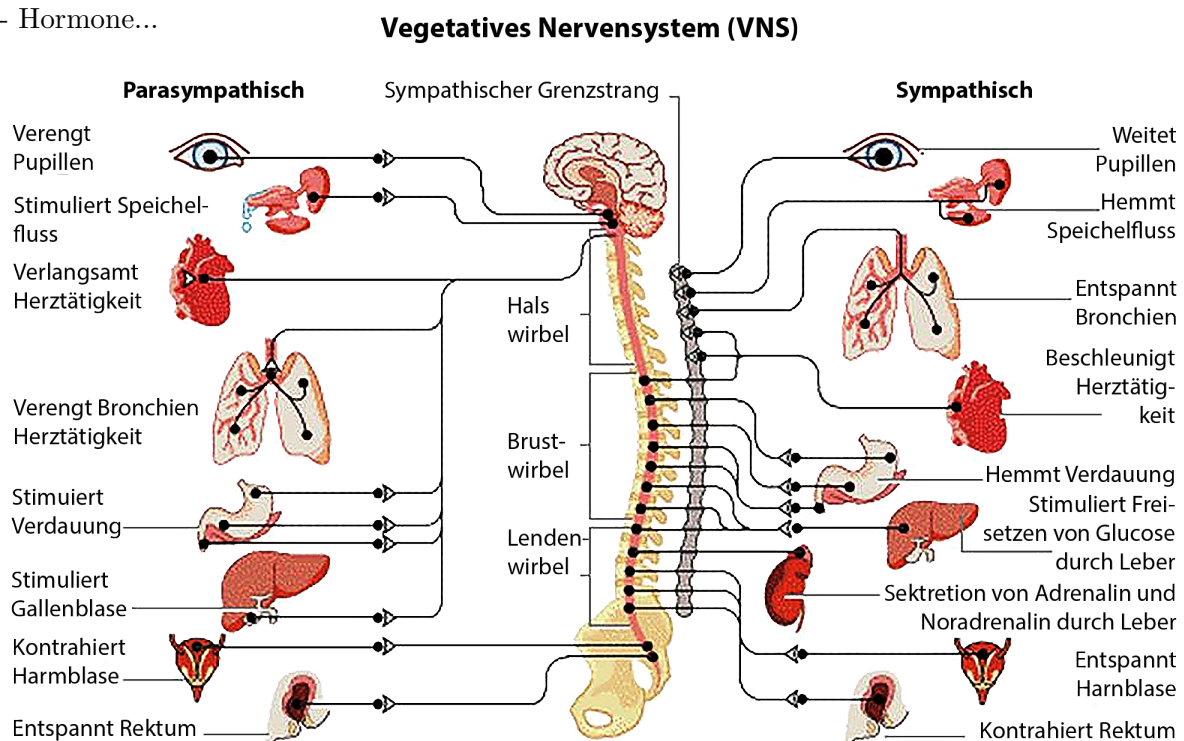


Bild 1.1: VNS: Gehirn kontrolliert, Rückenmark koordiniert, Organe reagieren

Die wichtigsten Regelkreise laufen über das VNS mit den ständig unbewusst und gegensätzlich arbeitenden Nervensträngen Sympaticus und Parasympaticus.

Um alle Regelgrößen auf Sollwert zu halten, überwacht sie der Organismus fortlaufend mit Hilfe von Sensoren (Fühlern, Rezeptoren). Das Messergebnis, der Istwert, wird über Nervenenerregungen (Signalgeschwindigkeiten bis zu $120 \frac{m}{s}$ oder über die Blutbahn, $< 1 \frac{m}{s}$) über das Rückenmark an die zentralen Regelzentralen wie z.B. dem Kleinhirn, Stammhirn bzw. Hypothalamus gesendet.

Dort werden Istwert und Sollwert ständig miteinander verglichen. Ergibt sich ein relevanter Unterschied, dann veranlasst die Regelzentrale - wieder über Nerven- oder Blutbahnen - dass die Aktivität geeigneter Effektoren (Muskeln, Drüsen) so geändert wird, dass der Istwert der Regelgröße wieder auf den Sollwert zurückgeführt wird.

Die schnellsten Regler sind die monosynaptischen Reflexe, die ohne Umweg über das Gehirn ablaufen und meist im Rückenmark geregelt werden (z.B. Kniereflex).

Luftfahrt: Eurofighter

Der Eurofighter Typhoon ist ein zweistrahliges Mehrzweckkampfflugzeug, das von Rüstungsunternehmen in Deutschland, Italien, Spanien und Großbritannien gemeinsam entwickelt und gebaut wird.

Der Eurofighter ist gezielt instabil ausgelegt und damit wesentlich wendiger als bei von Haus aus stabiler Konstruktion.

Bei herkömmlichen Flugzeugen liegt der Schwerpunkt immer hinter dem Hauptauftriebspunkt der Tragflächen. Das Flugzeug wird sozusagen gezogen und stabilisiert sich selbst.

Beim Eurofighter ist es genau umgekehrt. Er wird praktisch angeschoben. Dadurch will er ständig ausbrechen. Dieser Balanceakt ist von Menschenhand nicht mehr zu bewältigen. Und so korrigiert - selbst bei normalem Geradeausflug - der Bordcomputer ständig den Jet.



Bild 1.2: Eurofighter

Die Vorfügelklappen, die den Auftrieb der Tragflächen variieren, sind ständig in Bewegung. 83 Computer interpretieren und realisieren die Steuereingaben des Piloten quasi in Echtzeit.

Luftfahrt: Drohnen (Multikopter)

Herzstück bei heutigen Drohnen ist die Regelung von Fluglage, Höhe und Position. Störgrößen sind Windrichtung, Intensität des Windes und die entsprechenden Änderungen des Windeinflusses. Zum Einsatz kommen PID-Regler um das Fluggerät stabil zu halten.



Bild 1.3: Drohne: Quadkopter. Nur durch Miniaturisierung der Regelungstechnik (und Energieversorgung) möglich.

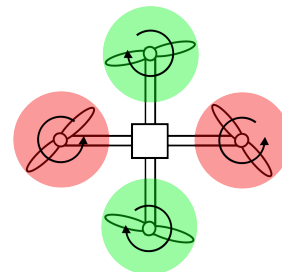


Bild 1.4: Drehmomentausgleich bei einem Quadrocopter durch gegenläufige Rotationsrichtungen der Propeller

Automobil- /Verkehrstechnik, KI: Autonomes Fahren (Visual Servoing)

Neben den ursprünglichen Regelungen wie ABS, ASR (Antischlupfregelung), ESP (Electronic Stability Control) und EAS (Electronic Air Suspension System) sind vor allem für das autonome Fahren die Erkennung der Umgebungseinflüsse wie z.B. Radar und Ultraschall (Ultrasonic) Sensoren für die Regelung unabdingbar.

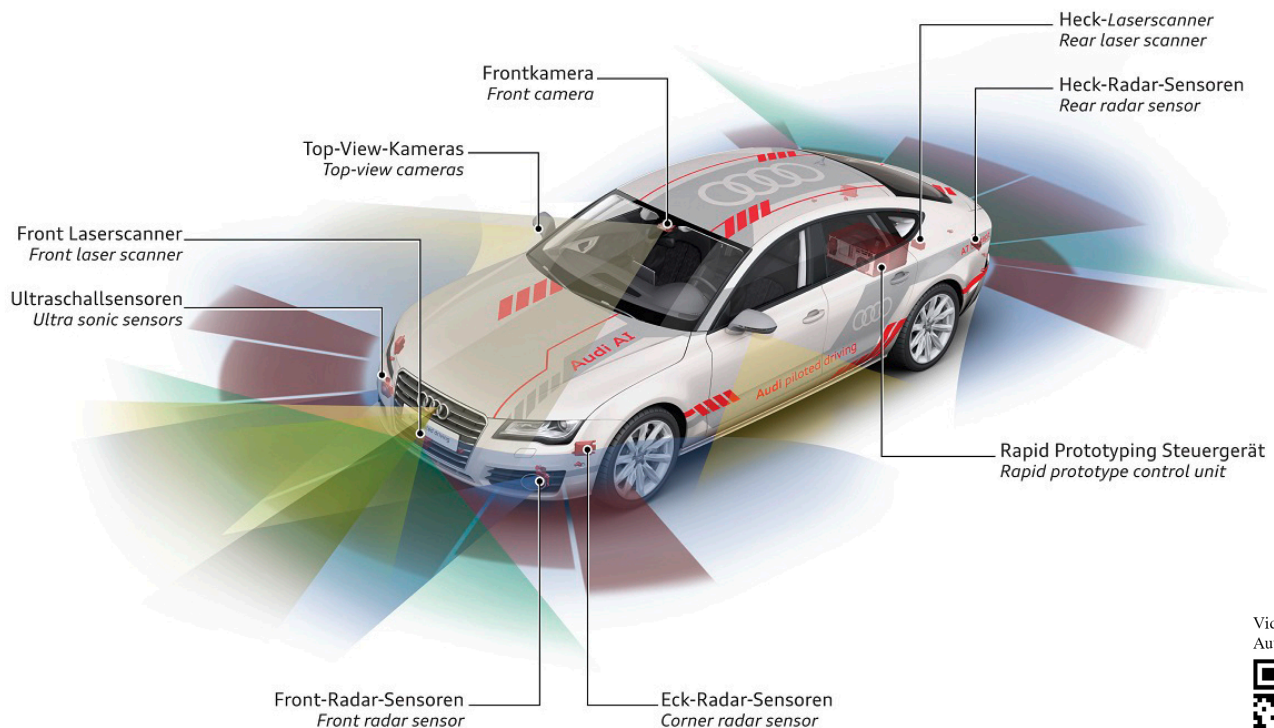


Bild 1.5: Sensoren und Steuergerät: Voraussetzung für das autonome Fahren

Video-Vortrag:
Autonomes Fahren



Nicht immer liefert ein klassischer Sensor die Regelgröße direkt. Oft übernimmt ein KI-Baustein zur Mustererkennung (z.B. ein neuronales Netz) die Extraktion der eigentlichen Regelgröße aus Rohdaten wie Kamerabildern. Dieses Prinzip heißt „Visual Servoing“ – bildbasierte Regelung.

Beispiel: Eine Kamera liefert das Bild (Sensorik). Ein neuronales Netz erkennt darin Fahrspur und Hindernisse (Mustererkennung) und bestimmt daraus die Regelabweichung, z.B. den seitlichen Versatz zur Fahrspurmitte. Der Regler berechnet die nötige Lenkbewegung (Stellgröße), die über die Aktorik auf das Fahrzeug (Regelstrecke) einwirkt – die neue Kameraposition schließt den Regelkreis.

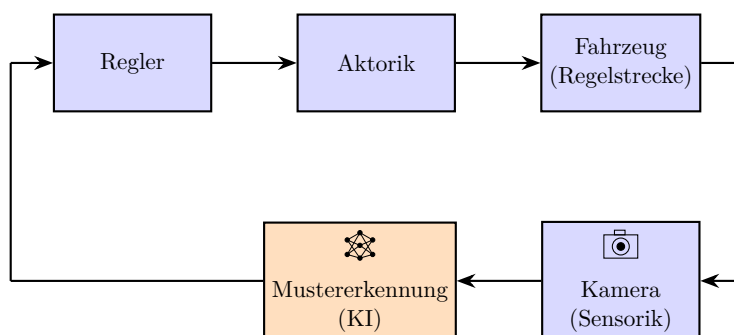


Bild 1.6: Visual Servoing: Mustererkennung (KI) als Messglied im Regelkreis, Bsp autonomes Fahren

Automobil- /Verkehrstechnik: Anhänger-Spurregelung

KFZ-Anhänger neigen durch unsachgemäße Lastverteilung oder Störeinflüsse (z.B. Seitenwind) zum Schlingern.

Um dies zu verhindern, werden vor allem in LKWs Assistenten angeboten, die den Anhänger stabilisieren, falls unerwartete Einflüsse wie plötzliches starkes Einlenken auftritt.

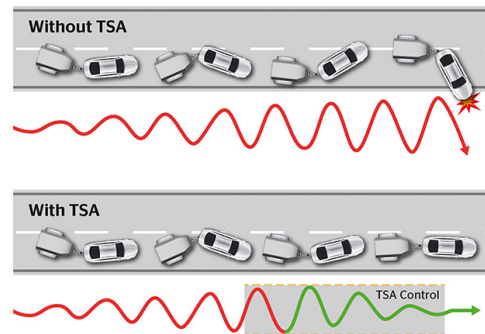


Bild 1.7: Anhänger-Spurregelung

Video:
Anhängerstabilität



Video:
Caravan Sway



Automobil- /Verkehrstechnik: Phantomstau

Phantomstau entsteht, wenn nachfolgende Fahrzeuge in einer Kolonne stärker abbremsen als die jeweils vorausfahrenden Fahrzeuge. Dies geschieht wegen zu geringen Sicherheitsabstands, wegen Geschwindigkeitsunterschiede. Das übermäßige Bremsen verstärkt sich von Fahrzeug zu Fahrzeug, bis ein erstes Fahrzeug zum Stillstand kommt - ein Stau aus dem Nichts entsteht. Abstandsregelung kann dies verhindern (vgl. Biologie, Ameisenstraße).

Video:
Phantomstau



Sugiyama et al. 2008 – Original-Experiment (echte Fahrzeuge auf Kreisbahn), New Journal of Physics 10, 033001 – Open Access, CC-BY, enthält das bekannte Foto der Kreisbahn mit Stauwelle.

Originallink:

<https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1367-2630/10/3/033001/pdf>

Volkswirtschaft: Schweinezyklus

Bei hohen Marktpreisen für Schweine kommt es zu verstärkten Investitionen. Diese wirken sich wegen der Aufzuchtzeit erst mit einem Verzögerungseffekt auf das Angebot aus und führen zu einem Überangebot und Preisverfall. Viele Anbieter reduzieren ihre Produktion, die sich ebenfalls erst zeitverzögert auswirkt - und dann wiederum zu einem relativen Überschuss der Nachfrage (Angebotslücke) und dadurch steigenden Preisen führt.

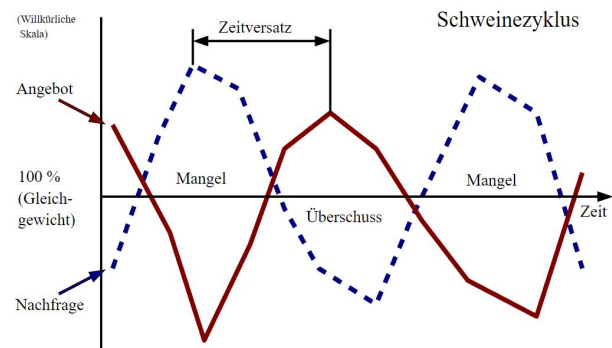


Bild 1.8: Angebot und Nachfrage

Durch diese Zeitverzögerungen im Regelmechanismus zwischen Angebot, Nachfrage und Preis entsteht eine Marktsituation, die das Angebot schwanken lässt. Erst wenn sich die Schweinehalter an den zu erwartenden Preisen zum Vermarktungszeitpunkt orientieren statt an den aktuellen Schweinepreisen zum Zeitpunkt der Investitionsentscheidung, wird die Volatilität des Marktpreises geringer.

Die resultierende Preis-Kurve wird beim Schweinezyklus auch grenzstabil genannt, da der Preis konstant zwischen $-p_0$ und p_0 schwankt. Ein stabiler Markt würde die Schwankungen und somit die Zeitverzögerung ausgleichen. Findet keine Regulierung statt (z.B. misslungene Planwirtschaft), gerät das Preis-System außer Kontrolle (instabiler Markt).

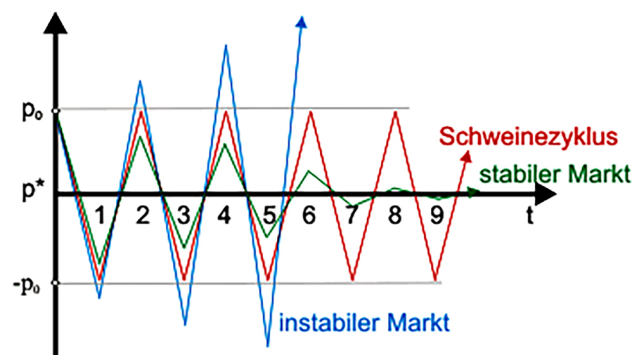


Bild 1.9: Preiskurve und Stabilität

Der Begriff wird in den Wirtschaftswissenschaften im übertragenen Sinn für analoge Vorgänge auf verschiedene Märkte verwendet. Auf Arbeitsmärkten etwa führen hohe Gehälter oder allgemein gute Chancen in einem bestimmten Bereich zu einer steigenden Zahl von Studienanfängern, die dann nach mehreren Jahren gleichzeitig auf den Arbeitsmarkt drängen. Die schlechteren Job-Aussichten schrecken sodann neue mögliche Studienanfänger ab. Beispiele für solche Arbeitsmärkte in Deutschland sind der Ingenieurberuf und der Lehrerberuf.

Methodisch orientiert sich die Arbeit Hanaus an US-amerikanischen Vorarbeiten von Mordecai Ezekiel und G.C. Haas, die ab 1925 Schweinepreisschwankungen in den USA statistisch beschrieben.

Mehr Info:
Schweinezyklus



Künstliche Intelligenz: Reinforcement Learning als Regelkreis

Reinforcement Learning (RL), einer der zentralen Trainingsansätze moderner KI-Systeme (z.B. AlphaGo, Robotersteuerung, Feinabstimmung von Sprachmodellen via RLHF), lässt sich strukturell als Regelkreis auffassen.

Ein Agent (der „Regler“) beobachtet den Zustand einer Umgebung (die „Regelstrecke“) und wählt eine Aktion (die „Stellgröße“), die auf die Umgebung einwirkt. Diese reagiert mit einem neuen Zustand und einem Belohnungssignal (Reward) – beide zusammen bilden die Rückführung, vergleichbar mit der Regelgröße im klassischen Regelkreis.

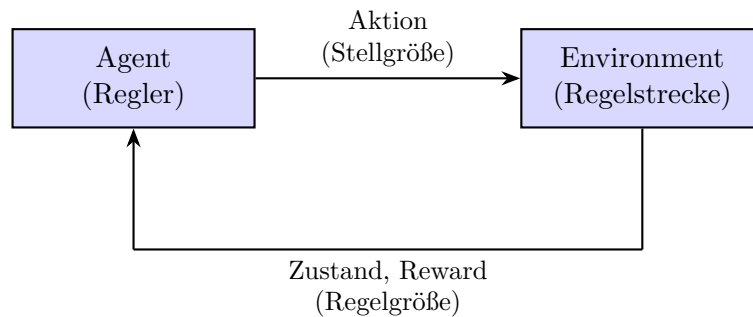


Bild 1.10: Reinforcement Learning als Regelkreis: Agent (Regler) und Environment (Regelstrecke) mit Aktion (Stellgröße) und Zustand/Reward als Rückführung (Regelgröße)

Analogie zur klassischen Regelungstechnik:

- Regler $\leftrightarrow$ Agent
- Stellgröße $\leftrightarrow$ Aktion
- Regelstrecke $\leftrightarrow$ Environment
- Regelgröße (Istwert) $\leftrightarrow$ Zustand
- Rückführung $\leftrightarrow$ Reward-Signal

Im Gegensatz zum klassischen Regelkreis gibt es keine feste Führungsgröße: Statt eines vorgegebenen Sollwerts wird die optimale Policy durch Maximierung der erwarteten kumulierten Belohnung erlernt – mathematisch eng verwandt mit der dynamischen Programmierung nach Bellman (vgl. Geschichtliche Meilensteine, Kapitel 1.2).

Im folgenden Skript werden hauptsächlich Themen aus den Ingenieurwissenschaften, mit Schwerpunkt Elektrotechnik betrachtet. Die Methoden können aber ohne weiteres auf das gesamte Gebiet der Regelungstechnik angewendet werden!

1.2 Geschichte

Regelungstechnische Meilensteine:



Bild 1.11: James Watt

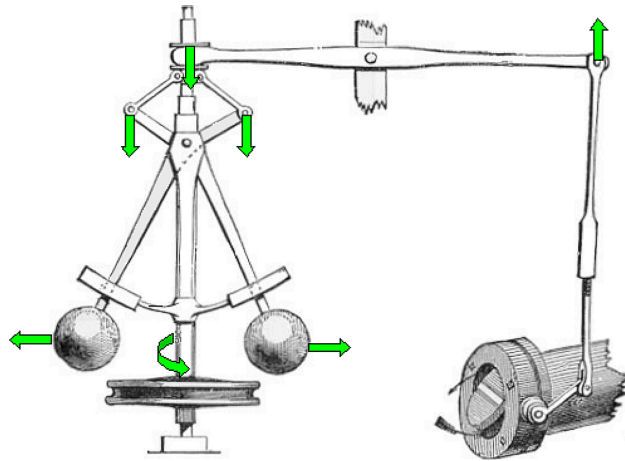


Bild 1.12: Fliehkraftregler: Mechanisches Regelungssystem für Dampfmaschinen

- 1788 James Watt: Fliehkraftregler
- 1868 Maxwell: DGL-Beschreibung verschiedener Regler
- 1895 Hurwitz: Stabilitätskriterium basierend auf Nennerpolynom
- 1922 Minorsky: PID-Regler
- 1932 Nyquist: Stabilitätskriterium basierend auf Ortskurve
- 1942 Ziegler/Nichols: Einstellregeln für PID-Regler
- 1942 Wiener: Filter und Prädiktion
- 1945 Bode: Frequenzganganalyse
- 1948 Evans: Wurzelortskurve
- 1956 Pontryagin: Maximumprinzip (zeitoptimale nichtlineare Steuerung)
- 1960 Kalman: Kalman-Filter, Dualität zw. Zustandsregler und -beobachter
- 1962 Bellman: Dynamische Programmierung (numerische Lsg. dyn. Opt.)
- 1965 Lotfi Zadeh: Fuzzy-Set-Theorie
- 1969 Richard E. Morley: Speicherprogrammierbare Steuerung (SPS)
- 1973 Åström/Wittenmark: Adaptive Regelung (selbsteinstellender Regler)
- 1978 Richalet: Modellprädiktive Regelung (MPC)
- 1981 Zames: H_∞ -Regelung (robuste Regelung)
- 1987 Hitachi: Erste kommerzielle Fuzzy-Regelung (automatische Zugsteuerung, U-Bahn Sendai)
- 1989 Doyle/Glover/Khargonekar/Francis: Zustandsraum-Lösung der H_∞ -Regelung

1.3 Messen, Steuern, Regeln

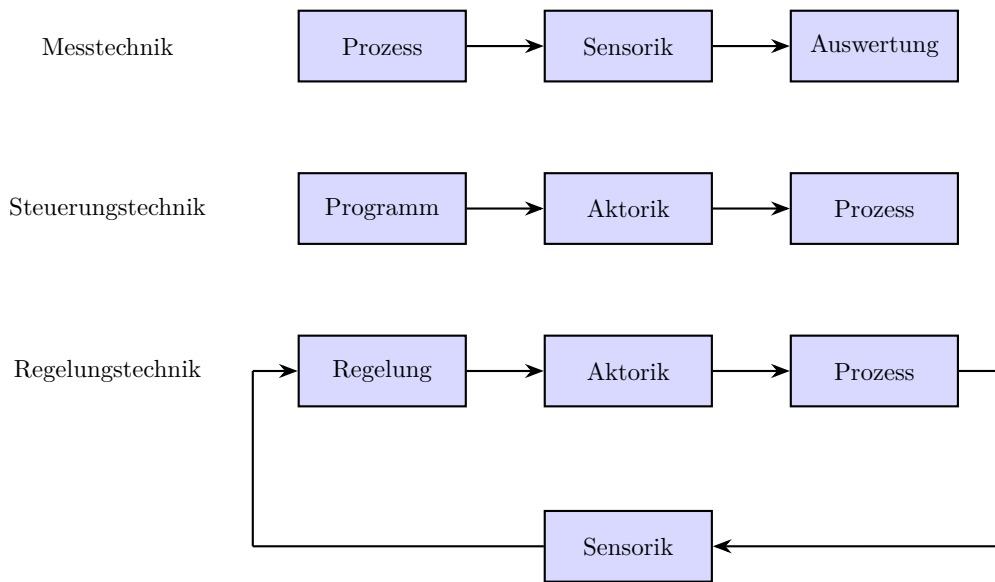


Bild 1.13: Mess-, Steuerungs-, Regelungstechnik: Teilgebiete der Automatisierungstechnik

Messen:

Die Messtechnik behandelt Geräte und Methoden zur Messung, also zur zahlenmäßigen Bestimmung physikalischer Größen wie Geschwindigkeit, Kraft, elektrischer Strom oder Temperatur. Die Messtechnik erzeugt mit Sensoren aus den physikalischen Größen Informationen in Form von Signalen.

Steuern:

Die Steuerungstechnik befasst sich mit der Einwirkung von Signalen auf physikalische Größen in Geräten und Maschinen mithilfe von Aktoren. Ein Steuerungsprogramm erzeugt die Signale nach einem festen Plan (offener Wirkungskreis).

- + Einfacher Entwurf durch näherungsweise Inversion des Streckenmodells
- + Der Ausgang folgt dem Eingang mit nur geringer Zeitverzögerung
- + Keine Messung notwendig
- Keine Kompensation von Störungen
- Modellungenauigkeiten wirken sich voll aus

Regeln:

Das Prinzip der Rückmeldung von Prozessgrößen an eine Instanz (geschlossener Wirkungskreis), die bei Abweichungen dieser Größen von einem gewünschten Sollzustand geeignete Maßnahmen ergreift, ist in Technik und Natur eine der faszinierendsten Funktionsweisen und wird Regelung genannt.

Die beiden Hauptnachteile der Steuerung (störanfällig, ungenau) werden von der Regelung aufgehoben.

- + Störungen und Modellungenauigkeiten können kompensiert werden
- Messung der Regelgröße ist erforderlich
- Aufwändiger Entwurf des Streckenmodells

Formale Definition nach Norm:

Entsprechend der DIN 19226 und der „Nomenklatur der Regelungstechnik“ des Schweizerischen Elektrotechnischen Vereins von 1956 erfüllt eine Regelung folgende Kriterien:

- Eine Regelung soll die Regelgröße der vorgegebenen Führungsgröße gleich machen.
- Eine Regelung wirkt in einem geschlossenen Kreis mit negativer Rückkopplung.
- Eine Regelung besitzt ein Element zum Erfassen der Regelgröße, das von den Einrichtungen, die in die Regelstrecke eingreifen, physisch getrennt ist.

Formelzeichen: Deutsche (DIN) und internationale (IEC) Norm

Für die Bezeichnung der Signale im Regelkreis existieren unterschiedliche Normen, die sich in den verwendeten Formelzeichen unterscheiden: die deutsche Norm DIN EN 60027-6 und die internationale Norm IEC 60027-6.

Größe	DIN (deutsch)	IEC (international)
Regelgröße (Istwert)	x	y
Führungsgröße (Sollwert)	w	w
Regeldifferenz	e	e
Reglerausgangsgröße	m	y_r
Stellgröße	y	m
Rückführgröße	r	f
Störgröße	z	v

In diesem Skript wird durchgängig die deutsche (DIN-)Konvention verwendet, d.h. x für die Regelgröße und y für die Stellgröße. Bei der Lektüre internationaler Literatur oder Datenblätter ist zu beachten, dass dort stattdessen y für die Regelgröße und m für die Stellgröße stehen kann – die Buchstaben x und y haben also je nach Norm eine unterschiedliche Bedeutung.

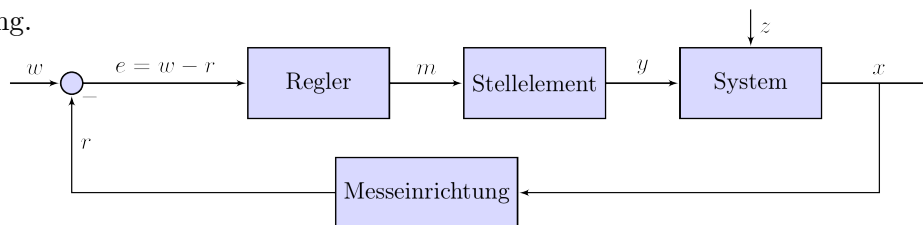


Bild 1.14: Allgemeine Darstellung eines Regelkreises mit den Formelzeichen nach DIN

Aufgaben eines Regelungstechnikers:**Analyse und Identifikation**

Modellbildung: Das mathematische Modell der Regelstrecke wird gefunden. Entweder wird das physikalische Modell mathematisch beschrieben oder die Systemantwort auf ein Testsignal ausgewertet.

Reglerentwurf

Nach Vorliegen eines mathematischen Modells der Regelstrecke erfolgt die Festlegung der Regeleinrichtung, bzw. des Regelalgorithmus und die Optimierung der entsprechenden Parameter. Standardregler sind z.B. P, PI, PID Regler.

Simulation

Vor Einsatz des entworfenen Reglers an der realen Strecke ist eine Überprüfung des Reglerentwurfs notwendig. Hierzu werden häufig Verfahren zur Simulation des Regelkreisverhaltens eingesetzt (z.B. mit MATLAB / Simulink).

Test

Realisierung (analog oder digital) und Erprobung des Reglers an der realen Strecke.

1.4 Regelkreis

Das Wichtigste im Regelkreis ist die Regelgröße (Ist-Wert, $x(t)$). Sie wird mithilfe der Regelung auf einen gewünschten Führungsgröße, den Sollwert, $w(t)$ gebracht.

Wie schnell und mit welcher Genauigkeit die Führungsgröße eingestellt wird, ist beim Entwurf im Regler festgelegt und wird im Rahmen dieser Vorlesung behandelt.

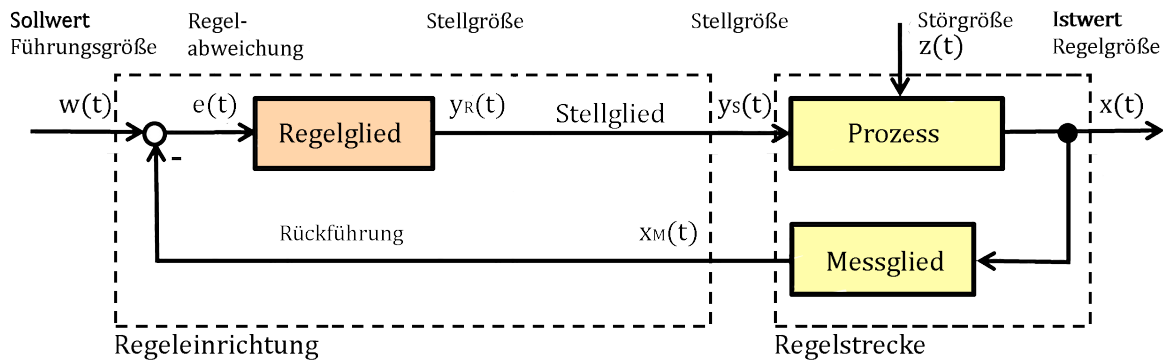


Bild 1.15: Darstellung des Regelkreises mit Signal- und Blockbezeichnungen

1.5 Beispiele

Geschwindigkeitsregelung (Tempomat):

Ziel des Tempomats: Die Geschwindigkeit des Autos soll möglichst gut der vom Fahrer vorgegebenen Wunschgeschwindigkeit folgen, unabhängig von Umgebungseinflüssen wie z.B. Steigungen oder Gegenwind.

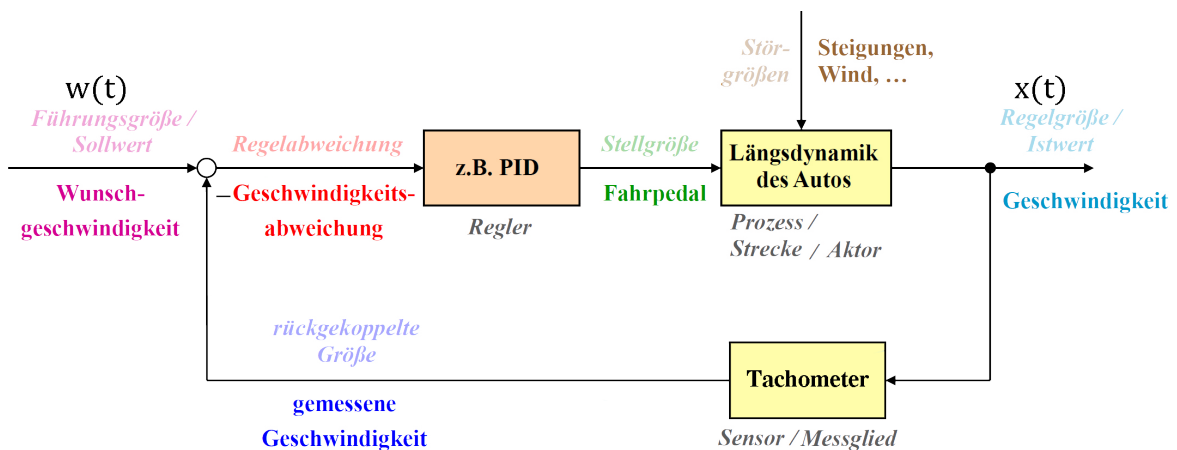


Bild 1.16: Regelkreis-Blockdiagramm für einen Tempomat

Erweiterung Abstandsregelsystem (ACC, Adaptive Cruise Control):

Das Auto soll dem vorausfahrenden Fahrzeug folgen.

Frage: Was ändert sich?

Bild	Beispiel	Regelgröße	Regelung	Stellgröße	Prozess	Störgröße
	Heizung	Raumtemperatur	Thermostat und Heizungsregler	Ventilöffnung und Mischerstellung	Erzeugung und Transport von Warmwasser	Außentemperatur und Wärmeverluste
	Tempomat	Geschwindigkeit	Steuergerät	Kraftstoffzufuhr	Erzeugung von Antriebsmoment und Bremsmoment	Steigungen, Gegenwind
	Autopilot	Kurs	Elektronische Steuerung	Ruderstellung	Kursänderung	Querströmung
	Aufrechtes Stehen	Senkrechte Haltung	Zentrales Nervensystem	Motorik und Muskeln	Stabilisierende Bewegung	Anremeln, Windstoß
	Körpertemperatur	Bluttemperatur	Temperaturzentrum Zwischenhirn	Schweißdrüsen, Hautkapillare	Wärmeerzeugung, Wärmeabfuhr	Außentemperatur, Muskelarbeit
	Pupille	Lichteinfall auf Netzhaut	Zentrales Nervensystem	Irismuskulatur	Veränderung Pupillenöffnung	Plötzlich veränderter Lichteinfall
	Mensch in der Dusche	Wassertemperatur	Mensch	Mischhebel	Kalt- und Warmwassertransport	Druckschwankungen
	Autofahren Lenkung	Fahrtrichtung	Fahrer	Lenkrad, Lenkgetriebe, Lenkwinkel	Kurvenfahrt des Fahrzeugs	Seitenwind

Tabelle 1.1: Regelungsbeispiele aus Technik und Biologie.

1.6 Regelstrecke

Um einen Prozess regeln zu können, das heißt die Regelgröße schnell und genau auf einen gewünschten Wert zu bringen, ist eine Einrichtung nötig, die den Stellbefehl der Regelung in eine Veränderung des Prozesses umsetzt. Das ist die Aktorik, sozusagen das Gaspedal bzw. die Bremse (vgl. menschl Körper: Sympatikus/Parasympatikus).

Der Erfolg dieser Prozesseinflussnahme wird mit der Sensorik gemessen (Tachometer, bzw. Rezeptoren).

Die Regelung gleicht die drei Teilsysteme Aktorik, Prozess und Sensorik aus, die jeweils eigenes dynamisches Verhalten aufweisen. Das Zusammenspiel dieser drei Systeme wird Regelstrecke genannt.

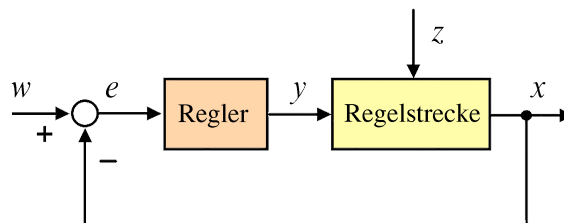


Bild 1.17: Die Regelstrecke besteht aus Aktorik, Prozess und Sensorik. Die Verhaltensweise der kompletten Regelstrecke (nicht nur des Prozesses) sollte bekannt sein, um den Regler entsprechend zu entwerfen

1.7 Reglerentwurf

Der Aufbau von gut funktionierenden Regelungen erfolgt in drei Schritten:

1. Analyse der Regelstrecke
2. Vorgabe des gewünschten Regelverhaltens
3. Berechnung bzw. Einstellung der Regelung

Regleraufgaben:

Die Regleraufgaben ergeben sich aus dem Toleranzbereich, der bei jeder Regelaufgabe vorhanden sein muss und normalerweise vom Auftraggeber geliefert wird.

Folgende Aufgaben müssen erfüllt sein und lassen sich entsprechend der Numerierung in Bild 1.18 zuordnen.

- (1) Regelung muss stabil sein (möglichst ohne Überschwinger)
- (2) Regelung muss möglichst genau auf Sollwert regeln
- (3) Regelung muss schnell regeln
- (4) Regelung muss begrenzte Zunahme besitzen
- (5) Regelung muss robust gegenüber Störungen sein

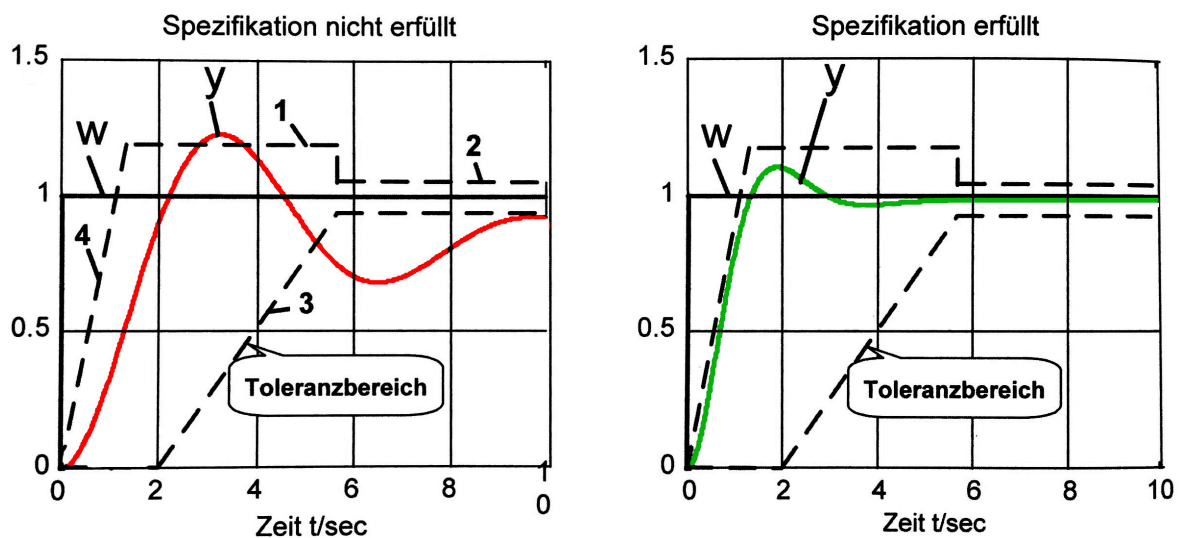


Bild 1.18: Spezifikationen für das Regelkreisverhalten: Güte der Regelung

Um den Regler entsprechend auszulegen, muss vor allem der zu regelnde Prozess hinreichend beschrieben sein. Das gelingt nie perfekt, deshalb gilt für die Modellbildung:

So einfach wie möglich und so genau wie nötig.

Die Modellbildung für den Prozess (bzw. Strecke) kann über zwei Wege erreicht werden:

1. theoretisch über physikalische Modellbildung (eher selten)
2. experimentell mit Versuchen am Objekt (fast immer)

KAPITEL 2

Mathematische Grundlagen

2.1 LTI-Systeme

Als ein lineares zeitinvariantes System (*LTI-System*, *linear time-invariant system*) wird ein System bezeichnet, wenn sein Verhalten sowohl die Eigenschaft der Linearität aufweist als auch unabhängig von zeitlichen Verschiebungen ist.

Diese Unabhängigkeit von zeitlichen Verschiebungen wird als Zeitinvarianz bezeichnet.

Die Bedeutung dieser Systeme liegt darin, dass sie besonders einfache Transformationsgleichungen aufweisen und der Systemanalyse damit leicht zugänglich sind. Viele technische Systeme wie in der Regelungstechnik- oder Nachrichtentechnik weisen, zumindest in guter Näherung, diese Eigenschaften auf.

Ein Beispiel für ein zeitvariantes System wäre z. B. mechanischer Verschleiß. Hier verändert sich das System selbst mit der Zeit und wird bei Wiederholung andere Ergebnisse liefern als zu Beginn.

Ein System kann in diesem Zusammenhang beispielsweise ein Übertragungssystem sein. Ein lineares System bildet damit das Eingangssignal $x_e(t)$ auf das Ausgangssignal $x_a(t)$ ab.

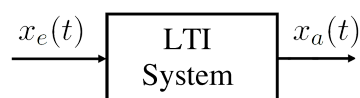


Bild 2.1: LTI-Übertragungssystem

Viele LTI-Systeme lassen sich durch lineare gewöhnliche Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten beschreiben.

2.2 Statisches und Dynamisches Verhalten

Statisches Verhalten

- Veränderung der Ausgangsgröße nur, wenn sich die Eingangsgröße gerade ändert
- Keine Energiespeicher → keine Eigenbewegung (Eigendynamik)
- Beschreibung durch algebraische Gleichungen
- Beispiel: idealer Messverstärker

Dynamisches Verhalten

- Veränderung der Ausgangsgröße, ohne dass sich die Eingangsgröße gerade ändert
- Interne Energiespeicher werden ge- und entladen → Eigenbewegung (Eigendynamik)
- Beschreibung durch Differenzialgleichungen
- Beispiel: Pendel

2.3 DGL

Technik und Natur sind ständig in Bewegung und somit dynamische, also zeitabhängige Systeme. Zeitliche Veränderungen werden mathematisch mit der Ableitung, bzw. dem Differenzialquotienten von Prozessgrößen beschrieben.

Über Kräfteverhältnisse, Potentialunterschiede oder Stoff-Konzentrationen kann man sehr einfach Regeln mit den entsprechenden Gesetzmäßigkeiten für das jeweilige System aufstellen. Dies resultiert in der Beschreibung durch Differenzialgleichungen (DGL).

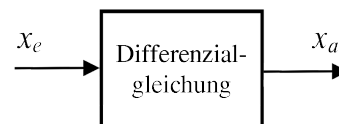


Bild 2.2: DGL als Übertragungsfunktion ausgedrückt

Gleichungen die das Verhalten zwischen Ein- und Ausgangsgröße beschreiben, sind gewöhnliche Differentialgleichungen der allgemeinen Form:

$$\dots + a_3 \ddot{x}_a(t) + a_2 \dot{x}_a(t) + a_1 \dot{x}_a(t) + a_0 x_a(t) = b_0 x_e(t) + b_1 \dot{x}_e(t) + b_2 \ddot{x}_e(t) + b_3 \ddot{x}_e(t) + \dots \quad (2.1)$$

Aus den einzelnen Gesetzmäßigkeiten kann somit ein zeitlicher Verlauf der zu erwartenden Größe zu jeder Zeit bestimmt werden.

Diese Gleichung wird in die regelungstechnische Normalform gebracht:

1. Sortierung der Ableitungen, beginnend mit der höchsten Ableitung links.
2. Normierung auf den Faktor 1 vor $x_a(t)$.
3. Ausgangsgröße auf der linken, Eingangsgröße auf der rechten Seite!

Für eine DGL 2. Ordnung gilt dann:

$$\underbrace{\frac{a_2}{a_0}}_{T_2} \ddot{x}_a(t) + \underbrace{\frac{a_1}{a_0}}_{T_1} \dot{x}_a(t) + x_a(t) = \underbrace{\frac{b_1}{a_0}}_K x_e(t) \quad (2.2)$$

mit den Zeitkonstanten $T_1 = \frac{a_1}{a_0}$, $T_2 = \frac{a_2}{a_0}$ sowie dem Proportionalglied $K = \frac{b_1}{a_0}$.

Beispiel 1: Ladung eines Kondensators:

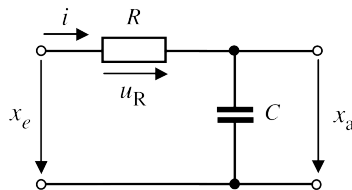


Bild 2.3: Die Spannung $x_e(t)$ am Eingang erzeugt die Spannung $x_a(t)$ am Ausgang

Der RC-Tiefpass aus Bild 2.3 wird in der Elektrotechnik u.a. als Filter eingesetzt. Er lässt tiefe Frequenzen passieren, da der Kondensator für kleine Frequenzen einen Isolator darstellt. Hohe Frequenzen hingegen werden gesperrt, da der Kondensator mit zunehmender Frequenz eine immer kleiner werdende Impedanz besitzt.

Mit dem Maschensatz für elektrische Netzwerke ergibt sich für die Spannung x_e :

$$x_e = u_R + x_a \quad (2.3)$$

Der Spannungsabfall am Widerstand ergibt sich zu $u_R = i \cdot R$. Der Ladestrom ist proportional der Spannungsänderung am Kondensator $i = C \frac{dx_a}{dt}$. Daraus folgt:

$$x_e(t) = x_a(t) + RC \dot{x}_a(t) \quad (2.4)$$

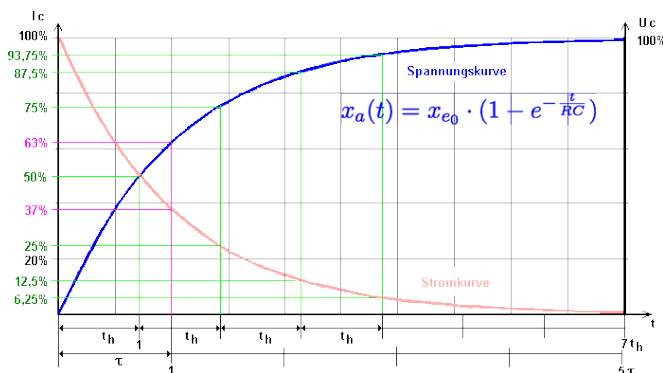
In die für regelungstypische Anwendungen übliche Form für DGL gebracht:

$$\underbrace{RC}_{T_1} \dot{x}_a(t) + x_a(t) = \underbrace{1}_K \cdot x_e(t) \quad (2.5)$$

Hier fällt es noch relativ leicht eine Lösung zu finden.

Lösung der DGL mit den Anfangsbedingungen $x_e(0) = x_{e0}$ und $x_a(0) = 0$ (U -Sprung, C aufladen):

$$x_a(t) = x_{e0} \cdot (1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$



Bei dieser DGL handelt es sich um ein sogenanntes **PT₁-Übertragungssystem** und weist ein proportionales Übertragungsverhalten mit einer Verzögerung 1. Ordnung auf.

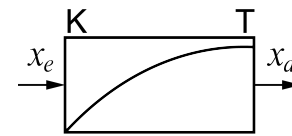


Bild 2.4: PT₁-Glied

Der konstante Faktor $K = 1$ vor der Eingangsfunktion $x_e(t)$ wird als Übertragungskonstante und der Koeffizient RC als Zeitkonstante T_1 bezeichnet (allgemein als τ bekannt).

Die Modellbildung kann für solche Systeme auch nach folgendem Schema ablaufen:

1. Eingangsgröße: angelegte Spannung x_e
2. Ausgangsgröße: erzeugte Ausgangsspannung x_a
3. Änderung: Kondensatorladung = Strom in Kondensator
4. DGL: $C \cdot \dot{x}_a(t) = \frac{1}{R} (x_e(t) - x_a(t))$

Die Änderungsgeschwindigkeit der Ausgangsgröße nimmt mit wachsender Ausgangsgröße ab. Ein stationärer Zustand ist erreicht, wenn die rechte Seite der Differenzialgleichung null wird und damit die Ableitung der Ausgangsgröße verschwindet.

Viele Systeme verhalten sich in der gleichen Weise:

Fahrzeugbewegung:

Eingang: Antriebskraft $x_e = F_A(t)$

Ausgang: Geschwindigkeit $x_a(t) = v(t)$

Gegenkraft $F_R(t) = r \cdot v(t)$

Beschleunigungskraft $m \cdot \dot{v}(t)$

Reibung r , Masse m

Änderung: Beschleunigungskraft $= F_A - F_R$

DGL: $m \cdot \dot{v}(t) = F_A(t) - r \cdot v(t)$

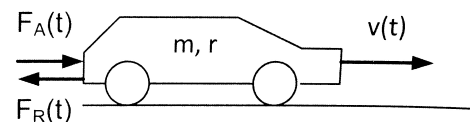


Bild 2.5: Die Antriebskraft erzeugt die Geschwindigkeit

Konzentrationsänderung in Behältern:

Eingang: Konzentration Zulauf $c_E(t)$

Ausgang: Konzentration in Behälter $c(t)$

Behältervolumen: V

Volumenstrom q

Änderung: Vol.änderung = Zufluss - Abfluss

DGL: $V \cdot \dot{c}(t) = q \cdot c_E(t) - q \cdot c(t)$

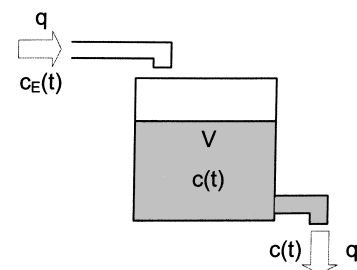
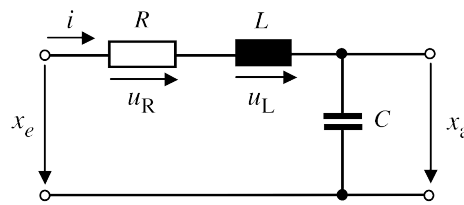


Bild 2.6: Die Konzentration im Zulauf erzeugt die Konzentration im Behälter

Beispiel 2: Reihenschwingkreis:**Bild 2.7:** Reihenschwingkreis

Analog zu Beispiel 1 wird mit der Maschenregel die Spannung x_e ermittelt:

$$x_e = u_R + u_L + x_a \quad (2.6)$$

Der Spannungsabfall am Widerstand ergibt sich wieder zu $u_R = i \cdot R$, der Ladestrom im Kondensator zu $i = C \frac{dx_a}{dt}$ und die Spannung an der Spule zu $u_L = L \frac{di}{dt}$. Daraus folgt:

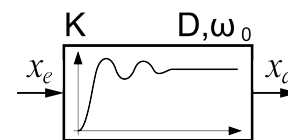
$$x_e(t) = x_a(t) + RC\dot{x}_a(t) + LC\ddot{x}_a(t) \quad (2.7)$$

Umformen ergibt:

$$\underbrace{LC}_{T_2^2} \ddot{x}_a(t) + \underbrace{RC}_{T_1} \dot{x}_a(t) + x_a(t) = \underbrace{1}_K \cdot x_e(t) \quad (2.8)$$

Bei dieser DGL handelt es sich um ein schwingfähiges **PT₂-Übertragungssystem** und weist ein proportionales Übertragungsverhalten mit einer Verzögerung 2. Ordnung auf.

Durch Umformen der gekoppelten Koeffizienten T_1 und T_2^2 erhält man später die resultierenden Koeffizienten D (Dämpfung) und ω_0 (Eigenkreisfrequenz).

**Bild 2.8:** PT₂-Glied**Lösung der DGL**

Die Lösung dieser Differenzialgleichung ist schon nicht mehr ganz so trivial wie in Beispiel 1. Prinzipiell kann man die Gleichung mit folgenden Methoden lösen:

1. Spezielle Eingangsfunktionen anwenden (Sprung, Rampe, Impuls)
2. Trennen der Veränderlichen
3. Lösen durch geeigneten Ansatz
4. Laplace-Transformation, Übertragungsfunktion

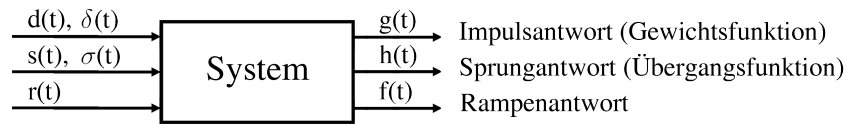
Sowohl für theoretische Untersuchungen als auch als praktische Testfunktion hat die Sprungfunktion als Eingangserregung eine große Bedeutung in der Regelungstechnik.

Bei linearen Systemen ist es immer vorteilhaft, die Lösung von DGL nicht im Zeitbereich, sondern mittels Laplace-Transformation im **Bildbereich** vorzunehmen.

Im weiteren Verlauf des Skriptes wird zur Lösung von Differentialgleichungen ausschließlich die Methode der **Laplace-Transformation** benutzt.

2.4 Testfunktionen und Systemantworten

Die Beschreibung und Interpretation von Systemen kann unter anderem über die Systemreaktion auf standardisierte Eingangssignale erfolgen. Deshalb werden in diesem Abschnitt Sprung-, Rampen- und Impulsfunktion betrachtet.



2.4.1 Impulsfunktion und Impulsantwort

Die Impulsfunktion $d(t)$ und die Impulsantwort $g(t)$ (*pulse response*) werden auch **Gewichtsfunktion** genannt und sind von eher theoretischer Bedeutung, da ein idealer Dirac-Impuls, auch $\delta(t)$ bezeichnet in der Realität nur näherungsweise erzeugt werden kann.

Man denkt sich die Eingangsfunktion gemäß einem Dirac-Impuls $\delta(t)$ (Nadel-Impuls) und beobachtet die Reaktion des Systems.

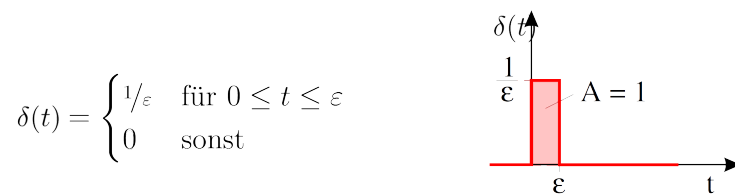


Bild 2.9: Rechteckimpuls (bzw. Dirac- oder Nadelimpuls $\delta(t)$ für $\varepsilon \rightarrow 0$)

2.4.2 Sprungfunktion und Sprungantwort

Bei einer Sprungfunktion wird zum Zeitpunkt $t = 0$ der Eingangswert $x_e(t)$ sprunghaft um einen bestimmten Wert geändert. Man bezeichnet dann dieses Eingangssignal meist auch als $s(t)$ oder bei einem Einheitssprung mit Amplitude 1 auch $\sigma(t)$.

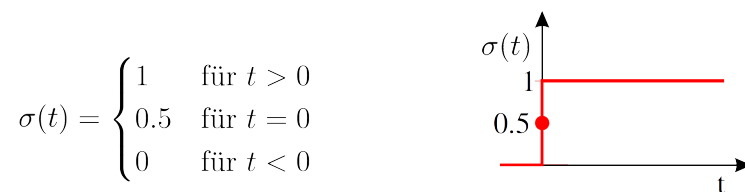


Bild 2.10: Sprungfunktion $s(t)$ (bzw. Einheitssprungfunktion $\sigma(t)$)

Wenn der Sprung von 0 auf 1 erfolgt, wird die Sprungfunktion $\sigma(t)$ auch als Einheitssprung $u(t)$ (*unit step*) bzw. **Heaviside-Funktion** $H(t)$, $\varepsilon(t)$, oder (in der Systemtheorie) mit $1(t)$ bezeichnet.

Der zeitliche Verlauf am Ausgang $x_a(t)$ als Ergebnis dieser Anregungsfunktion wird Sprungantwort (*step response*) genannt und generell mit $h(t)$ bezeichnet.

2.4.3 Rampenfunktion und Rampenantwort

Hierbei wird das Eingangssignal $r(t)$ mit konstanter Geschwindigkeit geändert und die Reaktion des Systems beobachtet. Es ergibt sich die Rampenantwort $f(t)$, auch Anstiegsantwort genannt.

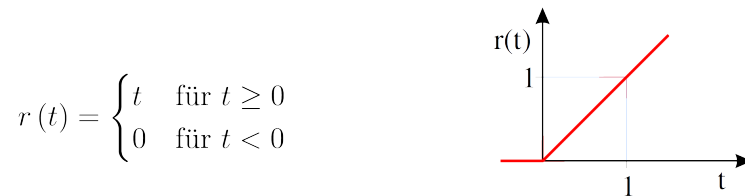


Bild 2.11: Einheitsrampenfunktion $r(t)$ mit der Steigung 1

2.4.4 Verknüpfung der Testfunktionen

Eingang: Der Zusammenhang zwischen Sprungfunktion $s(t)$ und Deltafunktion $\delta(t)$ ist

$$\delta(t) = \frac{d}{dt}s(t) \quad (2.9)$$

Ausgang: Der Zusammenhang zwischen Sprungantwort $h(t)$ und der durch den Dirac-Impuls erzeugten Impulsantwort $g(t)$ lautet analog

$$g(t) = \frac{d}{dt}h(t) \quad (2.10)$$

Wenn man die Sprungantwort $h(t)$ gemessen hat, dann lässt sich die Gewichtsfunktion $g(t)$ durch zeitliche Ableitung (auch aus den Messwerten) ermitteln.

Wenn man das System mit einem Impuls $\delta(t)$ angeregt hat, dann lässt sich aus der gemessenen Gewichtsfunktion $g(t)$ die Sprungantwort $h(t)$ durch Integration ermitteln.

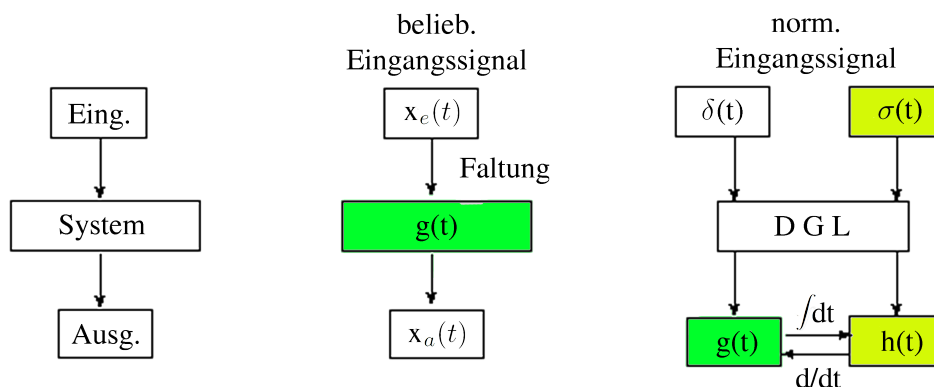
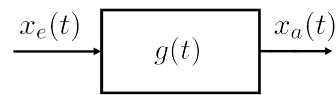


Bild 2.12: Zusammenhänge von Eingängen zu den Ausgängen im Zeitbereich

2.4.5 Faltung

Bei bekannter Gewichtsfunktion $g(t)$ kann die Ausgangsgröße $x_a(t)$ bei beliebiger Eingangsfunktion $x_e(t)$ mit dem Faltungsintegral berechnet werden:



$$x_a(t) = \int_0^t x_e(\tau) \cdot g(t - \tau) \cdot d\tau \quad (2.11)$$

$$x_a(t) = x_e(t) * g(t) \quad (2.12)$$

Die Faltung (engl.: *convolution*) beschreibt einen mathematischen Operator, der für zwei Funktionen $x_e(t)$ und $g(t)$ eine dritte Funktion $x_a(t) = x_e(t) * g(t)$ liefert.

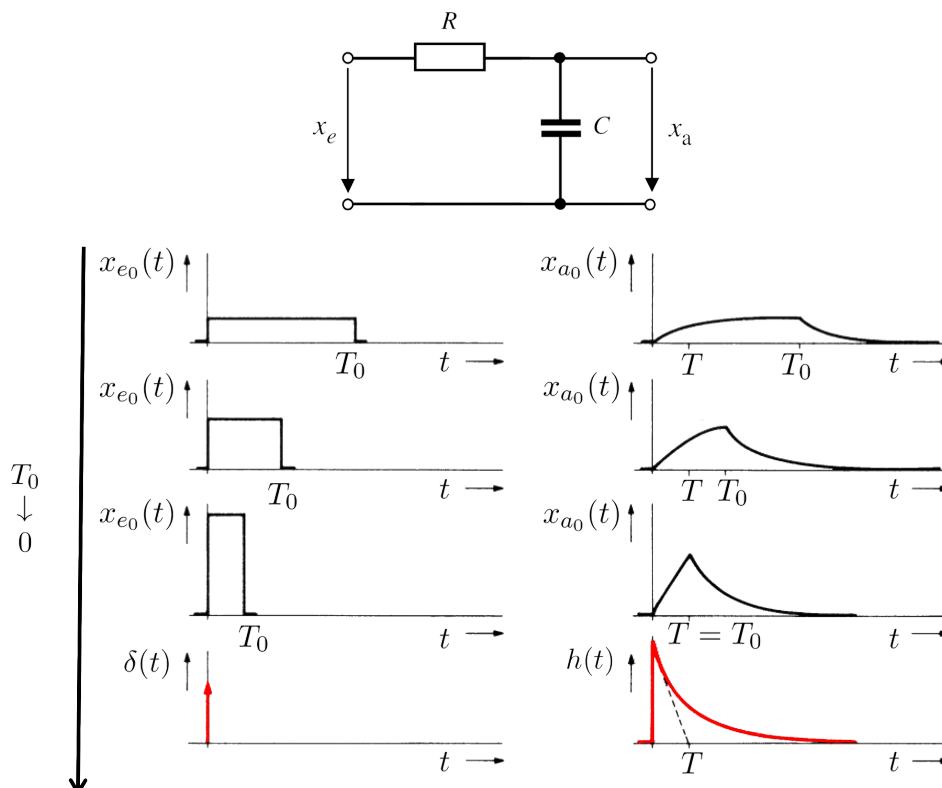
Die Faltung kann als ein Produkt von Funktionen verstanden werden.

Anschaulich ist $(x_e * g)(t)$ der gewichtete Mittelwert von x_e , wobei die Gewichtung durch $g(t)$ (Gewichtsfunktion) gegeben ist. Der Funktionswert $x_e(\tau)$ wird dabei mit $g(t - \tau)$ gewichtet. Dadurch erhält man für jedes t einen anderen gewichteten Mittelwert.

Faltet man eine Funktion $g(t)$ mit dem Diracstoß $\delta(t)$, so ergibt sich wieder $g(t)$. Dies ist sogleich die Definition des Diracimpulses.

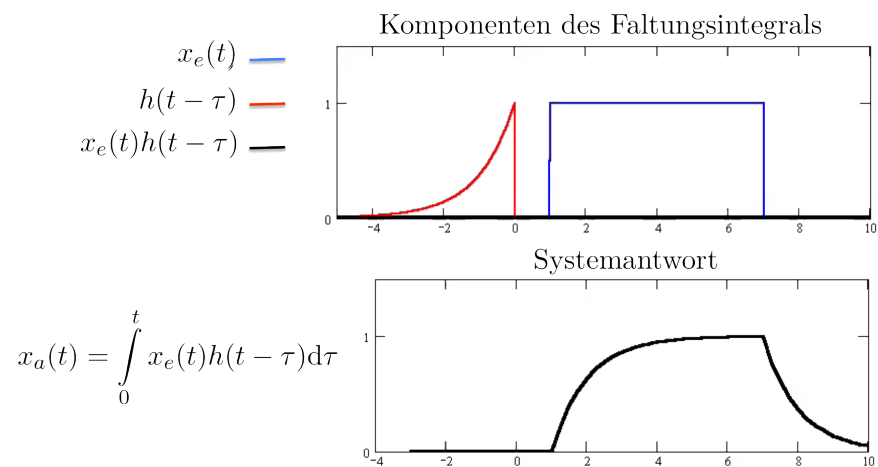
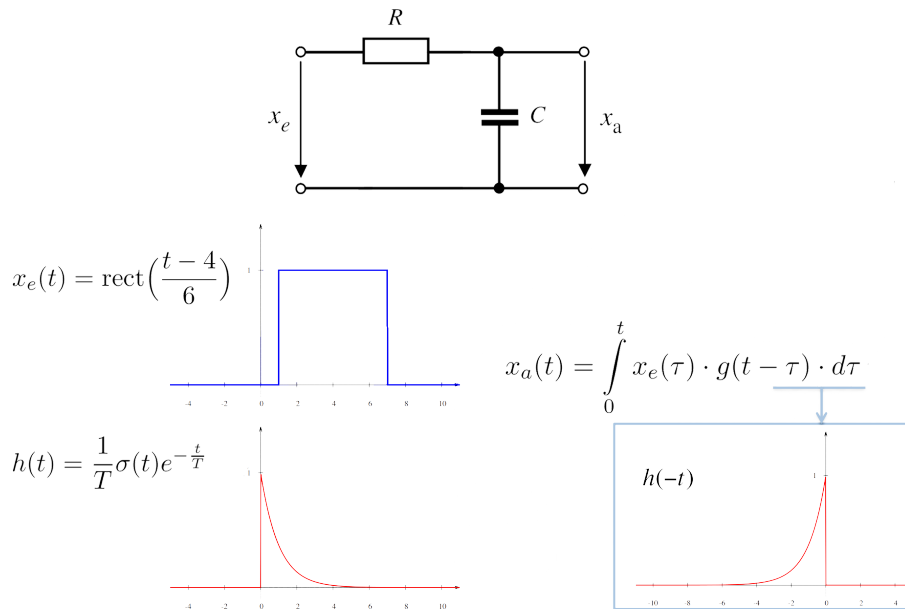
Beispiel 1:

Wie antwortet ein RC-Glied (Spannung) mit Breite $\frac{1}{T_0}$ und Höhe T_0 , wenn $T_0 \rightarrow 0$?



Beispiel 2:

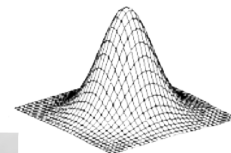
Faltung eines Rechteckimpulses $x_e(t)$ mit der Impulsantwort $h(t)$ des RC-Gliedes (mit $T = RC = 1$):

**Beispiel 3:**

Anwendung in der (2-dimensionalen) Bildbearbeitung.

$f(x, y)$ Intensitäten eines Grautonbildes

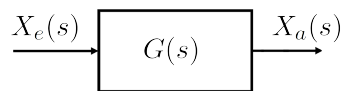
$h(x, y)$ Filter, z.B. 2d Gauß-Funktion: $h(x, y) = \frac{1}{2\sigma^2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$



Konvolution
Faltung
→
←
Dekonvolution
Entfaltung



Eine Faltung im Zeitbereich, entspricht einer Multiplikation im Bildbereich (mit der Bildvariablen $s = \sigma + j\omega$).



$$X_a(s) = X_e(s) \cdot G(s) \quad (2.13)$$

Diese Beziehung vereinfacht es im Bildbereich die Systemantworten zu berechnen.

2.5 Fourier-Reihen und Fourier-Transformation (Grundidee)

Viele Funktionen – speziell periodische Signale, wie sie in der Elektrotechnik und Akustik auftreten – lassen sich nicht sinnvoll durch Polynome approximieren, da Polynome für große x divergieren, periodische Funktionen aber nicht. Die Idee der Fourier-Reihe (Fourier, 1768-1830) ist stattdessen, eine periodische Funktion durch eine Summe von Sinus- und Cosinusschwingungen unterschiedlicher Frequenz anzunähern.

Die Fourier-Transformation verallgemeinert dieses Prinzip auf beliebige (auch nicht-periodische) Signale: Sie überführt eine Zeitfunktion in ihre Frequenzanteile (Amplitude und Phase je Frequenz). Viele Operationen, z.B. Filter, lassen sich im Frequenzraum leichter durchführen als im Zeitbereich.

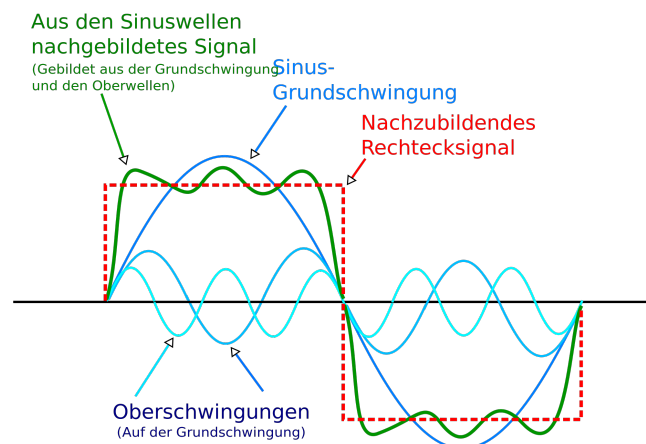


Bild 2.13: Rechtecksignal, angenähert durch Sinus-Grundschiwingung und Oberschwingungen

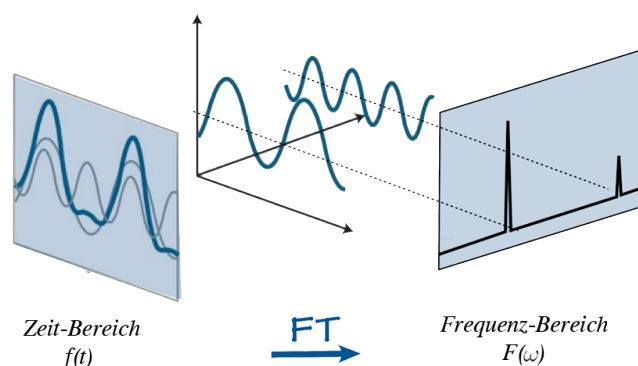


Bild 2.14: Übergang vom Zeitbereich $f(t)$ in den Frequenzbereich $F(\omega)$ durch die Fourier-Transformation

2.6 Anwendungen

Die Fourier-Reihe zerlegt eine periodische Funktion in ihre Anteile an Sinus- und Cosinusschwingungen. Mit jedem weiteren Reihenelement der Fourier-Reihe wird der Anteil der nächst höheren Oberschwingung addiert.

In Optik und Akustik kommen naturgemäß periodische Schwingungen vor. Zerlegt man diese in ihre Sinus- und Cosinusschwingungen, so kann man sich schnell überlegen, dass die hochfrequenten Anteile der Fourier-Reihe nicht mehr vom Auge optisch aufgelöst, bzw. vom Ohr akustisch gehört werden können.

Somit werden bei Abbruch der Fourier-Reihe nur die hochfrequenten Anteile der optischen bzw. akustischen Welle ignoriert, die allemal ausserhalb des menschlichen Wahrnehmungsvermögens liegen. Aus diesem Grunde ist die Darstellung als Fourier-Reihe die Basis für u.a. die digitale Fotografie, der digitalen Speicherung von Musik.

Durch die Fourier-Transformation lassen sich Signale von der Darstellung (Zeitpunkt, Abtastwert) in die Darstellung (Frequenzanteil, Amplitude, Phase) überführen. Viele Operationen, z.B. Filter, lassen sich im Frequenzraum leichter durchführen. Anschliessend wird das Signal mit der inversen Fourier-Transformation wieder zurück transformiert.

Anwendungs-Beispiele:

1. Regelungstechnik

In der Regelungstechnik werden fast ausschließlich Signale im Zeitraum betrachtet die bei $t = 0$ beginnen und somit in der Laplacetransformation münden. Das Grundprinzip ist jedoch dasselbe. Signalantworten können so sehr einfach für beliebige Eingangssignale von Systemen im Frequenzbereich berechnet und zurück in den Zeitbereich transformiert werden.

2. Mustererkennung

Die Grundidee ist, das Originalbild und das Vergleichsbild in den Frequenzbereich zu transformieren, um dort die Spektren der beiden Bilder einfacher vergleichen zu können.

3. JPEG

JPEG ist ein Bild-Kompressions-Verfahren beruhend auf der Fourier-Transformation der **J**oint **P**hotographic **E**xpert **G**roup. Konkret wird hier eine Darstellung als Kosinusreihe vorgenommen (Diskrete Cosinus-Transformation (DCT) – genauer gesagt die zweidimensionale DCT (2D-DCT)).

4. MP3

Es wird eine Modifizierte Diskrete Cosinus-Transformation (MDCT) verwendet. Sie wandelt die Audiodaten aus dem Zeitbereich (die Schwingungen der Schallwelle) in den Frequenzbereich (die einzelnen Töne) um. Erst dadurch kann das mathematische Verfahren erkennen, welche Frequenzen für das menschliche Ohr hörbar sind und welche weggelassen werden können (Datenkompression).

5. Google Suche (String Matching)

Wenn Sie nach einem Wort suchen, kann man Text mathematisch als „Signal“ darstellen. Um ein bestimmtes Suchwort in Millionen von Dokumenten blitzschnell zu finden (selbst mit Platzhaltern oder Tippfehlern), nutzt man die Schnelle Fouriertransformation (FFT). Sie berechnet eine sogenannte Faltung (Convolution) der Textdaten, was die exakte Textsuche drastisch beschleunigt.

2.7 Laplace-Transformation und Bildbereich

Neben der Beschreibung im Zeitbereich existiert also gleichberechtigt die Beschreibung eines Systems im Frequenz- bzw. Bildbereich (vgl. Komplexe Wechselstromrechnung).

Durch die Laplace-Transformation gelangt man nun sehr einfach in den Frequenzbereich. Die Basis zur Lösung ist dann die Übertragungsfunktion als algebraische Gleichung.

Diese algebraische Gleichung lässt sich bei linearen Systemen wiederum relativ einfach durch Ermittlung der **Eigenwerte** lösen.

Die Rücktransformation in den Zeitbereich erfolgt dann meist anhand existierender Lösungstabellen.

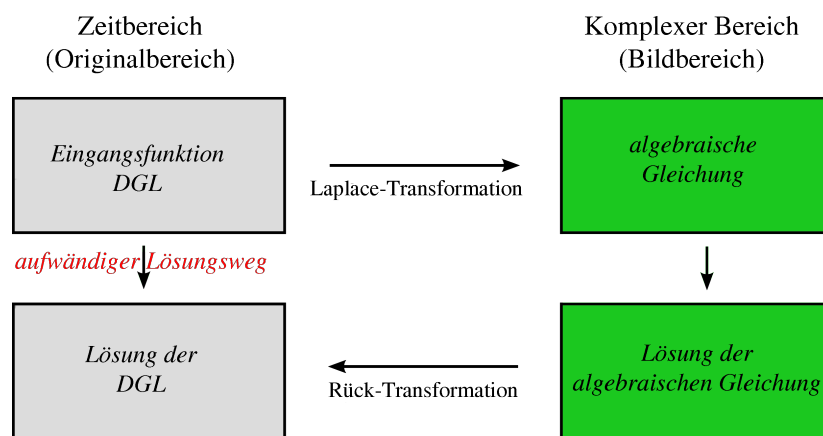


Bild 2.15: Zusammenhang Zeit- und Bildbereich

Analog zur Erweiterung eines 2-dimensionalen Objektes in ein 3-dimensionales Objekt, kann man in der Elektrotechnik ein statisches System auf ein dynamisches System erweitern.

Die Laplace-Transformation ist eine Integraltransformation, die eine Zeitfunktion $x(t)$ in eine Bildfunktion $X(s)$ im komplexen Bildbereich überführt.

Definition:

$$X(s) = \mathcal{L}(x(t)) = \int_0^{\infty} x(t) \cdot e^{-st} dt \quad (2.14)$$

Mit der Laplace-Transformation werden aus Differenzialen einfache algebraische Terme und somit aus DGL algebraische Gleichungen. Sie ist für alle Vorgänge $t \geq 0$ definiert, was in der Regelungstechnik fast immer der Fall ist.

Man kann die Laplacetransformation als eine Gewichtung der Originalfunktion mit e^{-st} ansehen, die im Original- sowie Bildbereich identisch ist und somit in beide Richtungen transformiert werden kann.

Diese Gewichtung entspricht einer Zusammensetzung von quasi unendlich vielen Sinus und Cosinus Schwingungen analog der Fouriertransformation (vgl. Bild 2.16).

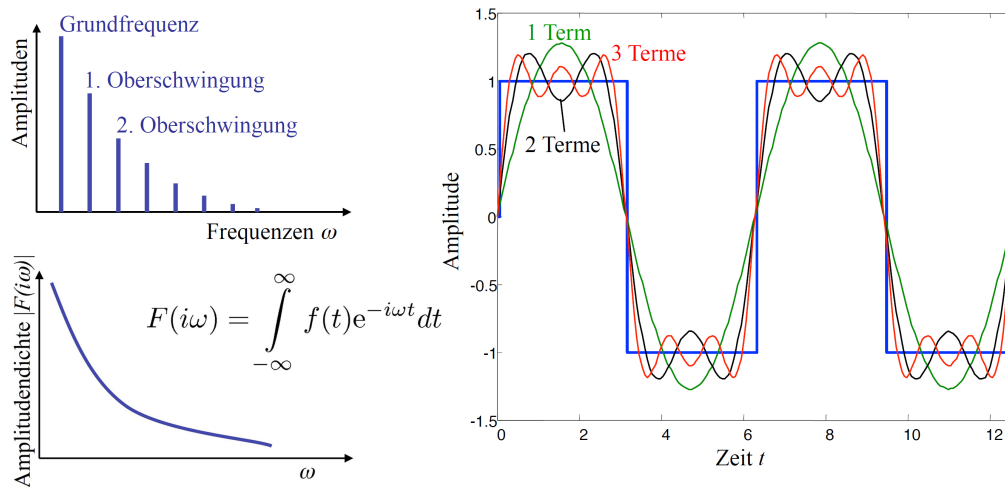


Bild 2.16: Gegenüberstellung von Fourier-Reihe (oben links), Fourier-Transformation (unten links) und Fourier-Synthese (rechts). Dargestellt ist die Approximation eines Rechtecksignals durch die Überlagerung seiner harmonischen Schwingungen.

Unterschied zwischen Fourier- und Laplace-Transformation

Beide Transformationen zerlegen ein Zeitsignal in Exponentialschwingungen. Der Unterschied liegt in der Frequenzvariablen und in den Integrationsgrenzen:

Fourier:	$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$	rein imaginär: $j\omega$
Laplace:	$X(s) = \int_0^{\infty} x(t) \cdot e^{-st} dt$ mit $s = \sigma + j\omega$	komplex: $\sigma + j\omega$

Setzt man $s = \sigma + j\omega$ ein, so erkennt man:

$$X(s) = \int_0^{\infty} \underbrace{x(t) \cdot e^{-\sigma t}}_{\text{gedämpftes Signal}} \cdot e^{-j\omega t} dt$$

Die Laplace-Transformation ist also die Fourier-Transformation des mit $e^{-\sigma t}$ **gedämpften** und bei $t = 0$ beginnenden Signals. Der Dämpfungsfaktor $e^{-\sigma t}$ sorgt dafür, dass das Integral auch für Signale konvergiert, die nicht abklingen – z.B. Sprung $\sigma(t)$, Rampe oder die Antwort eines instabilen Systems. Für diese Signale existiert die klassische Fourier-Transformation nicht.

	Fourier-Transformation	Laplace-Transformation
Variable	$j\omega$ (imaginäre Achse)	$s = \sigma + j\omega$ (ganze s-Ebene)
Zeitbereich	$-\infty < t < \infty$ (zweiseitig)	$t \geq 0$ (einseitig)
Zulässige Signale	abklingende bzw. absolut integrierbare Signale	auch Sprung, Rampe, aufklingende Signale
Anfangswerte	nicht berücksichtigt	werden berücksichtigt (Differentiationssatz)
Beschreibt	eingeschwungenen Zustand (Spektrum)	Einschwingvorgang + eingeschwungenen Zustand
Typische Anwendung	Signalanalyse, Filter, JPEG, MP3	Lösen von DGL, Übertragungsfunktion, Stabilität
Ergebnis in der RT	Frequenzgang $G(j\omega)$, Bodediagramm	Übertragungsfunktion $G(s)$

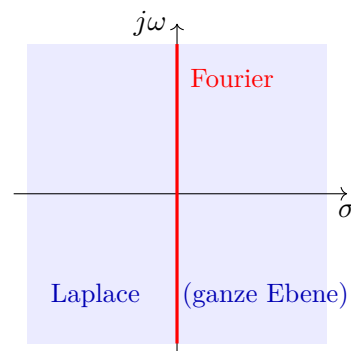
Zusammenhang über die s-Ebene:

Die Laplace-Transformation betrachtet die gesamte komplexe s-Ebene, die Fourier-Transformation nur deren **imaginäre Achse** ($\sigma = 0$).

Für stabile Systeme (alle Pole links der imaginären Achse) gilt daher:

$$G(j\omega) = G(s)|_{s=j\omega}$$

Den Frequenzgang (Kap. 3) erhält man also direkt aus der Übertragungsfunktion, indem man s durch $j\omega$ ersetzt.



Merke: Die Fourier-Transformation fragt: „Welche Frequenzen stecken im Signal?“
 Die Laplace-Transformation fragt zusätzlich: „Wie klingt das System ein – und ist es stabil?“
 Deshalb verwendet die Regelungstechnik die Laplace-Transformation.

Die Laplace-Transformation geht auf Untersuchungen von Pierre Simon Laplace (1749-1827) und Leonhard Euler (1707-1783) zurück.

Die praktische Anwendbarkeit dieser Transformation auf Probleme der Mechanik und der Elektrotechnik wurde durch Arbeiten von Oliver Heaviside (1850-1925) und Gustav Doetsch (1892-1977) aufgezeigt.

Neben dem Einheitssprung $\sigma(t)$ ist der Dirac-Impuls $\delta(t)$ die am häufigsten betrachtete Eingangsgröße für dynamische Systeme. Beide stehen in einer engen Beziehung.

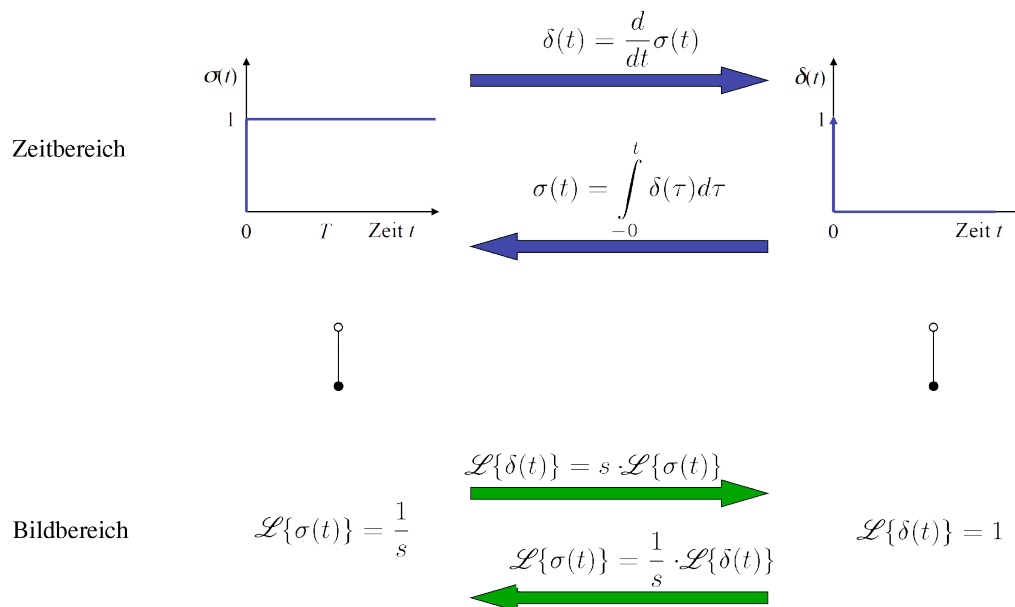


Bild 2.17: Sprung $\sigma(t)$ und Dirac-Impuls $\delta(t)$ im Zeit- und Bildbereich: Aus Differenzieren bzw. Integrieren wird im Bildbereich eine Multiplikation mit s bzw. Division durch s .

Zwei Kurzschreibweisen haben sich eingebürgert:

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} \quad \text{und} \quad X(s) \bullet \text{---} \circ x(t).$$

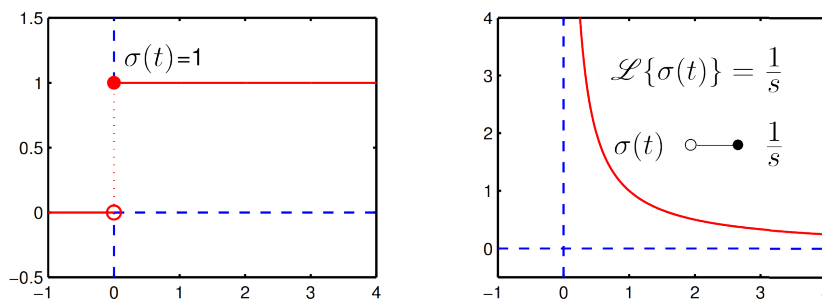
mit dem sogenannten Doetsch-Symbol $\bullet \text{---} \circ$.

Für einen Einheitssprung $\sigma(t)$ ergibt sich im Bildbereich z.B.:

$$X(s) = \int_0^{\infty} \sigma(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s} \quad (2.15)$$

Es ist also: $\mathcal{L}\{\sigma(t)\} = \frac{1}{s}$ und $\sigma(t) \circ \text{---} \bullet \frac{1}{s}$.

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1 \quad \text{und} \quad \delta(t) \circ \text{---} \bullet 1.$$



In Korrespondenztabelle kann man die Laplace-Transformationen herauslesen.
Die wichtigsten Laplace-Transformationen sind in folgender Tabelle aufgeführt:

$x(t)$	$\circ \longrightarrow \bullet$	$\mathcal{L}\{x(t)\}$	$x(t)$	$\circ \longrightarrow \bullet$	$\mathcal{L}\{x(t)\}$
$x(t)$	$\circ \longrightarrow \bullet$	$1 \cdot X(s)$	$\delta(t)$	$\circ \longrightarrow \bullet$	1 (Deltafunktion)
$\dot{x}(t)$	$\circ \longrightarrow \bullet$	$s \cdot X(s)$	$\sigma(t)$	$\circ \longrightarrow \bullet$	$\frac{1}{s}$ (Sprungfunktion)
$\ddot{x}(t)$	$\circ \longrightarrow \bullet$	$s^2 \cdot X(s)$	$r(t) = t$	$\circ \longrightarrow \bullet$	$\frac{1}{s^2}$ (Rampenfunktion)
$x(t)^{(n)}$	$\circ \longrightarrow \bullet$	$s^n \cdot X(s)$	$\sin(\omega t)$	$\circ \longrightarrow \bullet$	$\frac{\omega}{(s^2 + \omega^2)}$
e^{-at}	$\circ \longrightarrow \bullet$	$\frac{1}{s + a}$	$\cos(\omega t)$	$\circ \longrightarrow \bullet$	$\frac{s}{(s^2 + \omega^2)}$
$\int_0^t x(\tau) d\tau$	$\circ \longrightarrow \bullet$	$\frac{1}{s} \cdot X(s)$	$e^{-at} \cdot \sin(\omega t)$	$\circ \longrightarrow \bullet$	$\frac{\omega}{(s + a)^2 + \omega^2}$

Beispiel: Ladung eines Kondensators:

$$\mathcal{L}\{RC \cdot \dot{x}_a(t) + x_a(t) = x_e(t)\} \Rightarrow \quad (2.16)$$

$$RC \cdot s \cdot X_a(s) + X_a(s) = X_e(s) \quad (2.17)$$

Durch Umformen erhält man die sogenannte Übertragungsfunktion :

$$\frac{X_a(s)}{X_e(s)} = G(s) = \frac{1}{RC \cdot s + 1} = \frac{1}{s + \frac{1}{RC}} \quad (2.18)$$

Für die homogene DGL mit $x_e(t) = 0$ und $x_a(0) = x_{a0}$:

$$\mathcal{L}\{RC \cdot \dot{x}_a(t) + x_a(t) = 0\} \Rightarrow RC \cdot s \cdot X_a(s) - x_{a0} + X_a(s) = 0 \quad (2.19)$$

$$RC \cdot s \cdot X_a(s) + X_a(s) = x_{a0} \quad (2.20)$$

$$X_a(s) = x_{a0} \cdot \frac{1}{s + \frac{1}{RC}} \quad (2.21)$$

Rücktransformation ergibt lt. Tabelle:

$$F(s) = \frac{1}{s + a} \Rightarrow f(t) = e^{-at} :$$

$$x_a(t) = x_{a0} \cdot e^{-\frac{1}{RC}t}$$

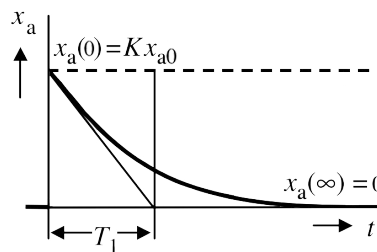


Bild 2.18: Verlauf mit Anfangsbedingung

Für die Sprungantwort mit $x_e(t) = x_{e0} \cdot \sigma(t) \circ \bullet \quad X_e(s) = x_{e0} \cdot \frac{1}{s}$:

$$X_a(s) = G(s) \cdot X_e(s) = \frac{1}{s + \frac{1}{RC}} \cdot x_{e0} \cdot \frac{1}{s} = x_{e0} \cdot \frac{1}{s \left(s + \frac{1}{RC} \right)} \quad (2.22)$$

Rücktransformation ergibt lt. Tabelle:

$$F(s) = \frac{1}{s(s + a)} \Rightarrow f(t) = \frac{1}{a} \cdot (1 - e^{-at}) :$$

$$x_a(t) = x_{e0} \cdot RC \cdot (1 - e^{-\frac{1}{RC}t})$$

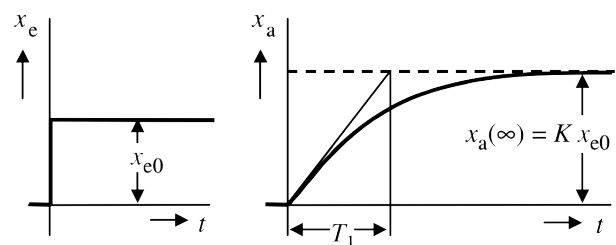


Bild 2.19: Sprungfunktion und Sprungantwort

2.8 Endwertsatz der Laplace-Transformation

Es ist meistens notwendig Aussagen über das Verhalten des Endwertes an den Grenzen des Systems bei $t \rightarrow \infty$ zu machen. Da eine Abschätzung der Laufvariablen gegen 0 immer einfacher ist, als diese gegen unendlich laufen zu lassen, bedient man sich des **Endwertsatzes**:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot X(s) \quad (2.23)$$

bzw. gilt umgekehrt auch

$$\lim_{t \rightarrow 0} x(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot X(s) \quad (2.24)$$

Es gilt somit für unsere Übertragungssysteme:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_a(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot X_a(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot G(s) \cdot X_e(s) \quad (2.25)$$

Beispiel:

Eine Übertragungsfunktion lautet

$$G(s) = \frac{2s + 6}{s^2 + 4s + 5} \quad \text{und wird am Eingang mit der Sprungfunktion}$$

$$x_e(t) = \sigma(t) \quad \circ \longrightarrow \bullet \quad X_e(s) = \frac{1}{s} \text{ angeregt.}$$

Dann lautet der Endwertsatz für $x_a(t)$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_a(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot G(s) \cdot X_e(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{2s + 6}{s^2 + 4s + 5} \cdot \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{2s + 6}{s^2 + 4s + 5} = \frac{6}{5}$$

Wenn die Dynamik abgeklungen ist, erreicht die Ausgangsgröße für große Zeiten den Endwert

$$x_a(t \rightarrow \infty) = \frac{6}{5}$$

2.9 Laplace-Rechenregeln

Rechenregel	Originalfunktion	Bildfunktion
Addition	$x_1(t) + x_2(t)$	$X_1(s) + X_2(s)$
Verstärkung	$ax(t)$	$aX(s)$
Differentiation	$\dot{x}(t)$	$sX(s) - X(0)$
Integration	$\int_0^t x(\tau) d\tau$	$\frac{1}{s}X(s)$
Faltung	$\int x_1(t - \tau)x_2(\tau) d\tau$	$X_1(s) \cdot X_2(s)$
Ähnlichkeit	$\frac{1}{a}x\left(\frac{t}{a}\right)$	$X(as)$
Dämpfung	$x(t)e^{-at}$	$X(s + a)$
Verschiebung	$x(t - T)$	$X(s)e^{-sT}$
Anfangswert	$\lim_{t \rightarrow +0} x(t)$	$\lim_{s \rightarrow \infty} sX(s)$
Endwert	$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$	$\lim_{s \rightarrow 0} sX(s)$

2.10 Polynomdivision

In der Regelungstechnik hat man es hauptsächlich im Bildbereich mit Polynomen zu tun, da die charakteristische Gleichung, also die Lösungsgleichung der DGL auf Polynomen basiert.

Die Polynomdivision, auch Partialdivision genannt, ist ein mathematisches Rechenverfahren. Das Verfahren verläuft analog zur üblichen und in der Schule gelehrt Division von Zahlen mit Rest, nur dass hier statt zweier Zahlen zwei Polynome durch einander dividiert werden und als Ergebnis wieder zwei Polynome - der 'Ganzteil' und der Rest der Division - stehen.

Dieses Verfahren wird hauptsächlich dazu angewendet um Null- oder Polstellen auf einfache Weise zu finden. Generell dürfen Pole in einer Übertragungsfunktion **nicht herausgekürzt** werden, da diese Informationen über das interne Verhalten des Systems aufweist, die sonst verloren gingen.

Beispiel:

$$\begin{array}{r}
 (x^3 - 12x^2 + 5x + 150) : (x - 5) = x^2 - 7x - 30 \\
 \underline{-(x^3 - 5x^2)} \\
 -7x^2 + 5x \\
 \underline{-(-7x^2 + 35x)} \\
 -30x + 150 \\
 \underline{-(-30x + 150)} \\
 0
 \end{array}$$

2.11 Weitere mathematische Grundlagen

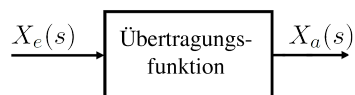
Folgende weitere mathematischen Grundlagen werden für die weitere Vorlesung vorausgesetzt, es handelt sich aber vorwiegend um Gymnasialstoff bzw. Stoff der ersten beiden Semester.

- Komplexe Zahlenebene
- Eigenwerte und Determinanten
- Partialbruchzerlegung
- Logarithmen-Rechenregeln (insbesondere $\log_{10}$ und dB-Umrechnung)
- Grenzwertrechnung

KAPITEL 3

Die Übertragungsfunktion

Die Übertragungsfunktion oder auch Systemfunktion beschreibt in der ingenieurwissenschaftlichen Systemtheorie mathematisch die Beziehung zwischen dem Ein- und Ausgangssignal eines dynamischen Systems im Frequenzraum bzw. im Bildbereich.



Ein dynamisches System kann beispielsweise ein mechanisches Gebilde, ein elektrisches Netzwerk oder ein anderer biologischer, physikalischer oder auch volkswirtschaftlicher Prozess sein.

Mithilfe der Übertragungsfunktion kann für ein beliebiges Eingangssignal das Ausgangssignal, d. h. die Reaktion des Systems bestimmt werden. Typisch für das Systemverhalten ist die zeitverzögerte Reaktion des Ausgangssignals gegenüber dem Eingangssignal.

Mit der Übertragungsfunktion gelingt ein einfacher, algebraischer Zusammenbau von Einzelsystemen zu Regelkreisen. Im Baukastensystem können die einzelnen Übertragungsfunktionen zu Reglern und Stecken mit einfachen Regeln zusammengestellt werden (gilt nur für lineare Systeme).

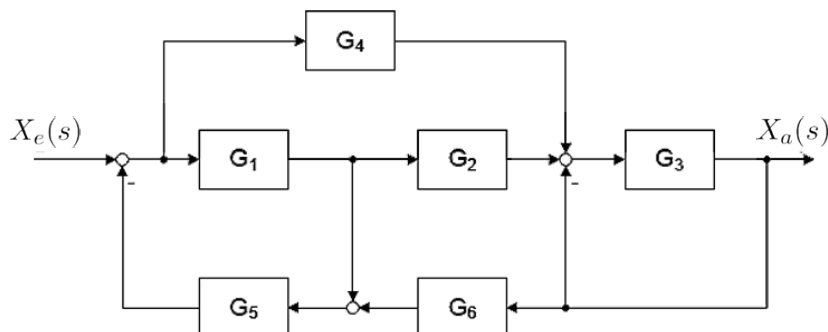


Bild 3.1: Baukastenprinzip für Übertragungsfunktionen.

3.1 Definition

Die Übertragungsfunktion beschreibt im **Bildbereich** der Laplace-Transformation, wie das Ausgangssignal eines linearen Systems auf ein Eingangssignal reagiert und ist der Quotient von Ausgangsgröße zu Eingangsgröße im Bildbereich:

$$\begin{array}{c} X_e(s) \rightarrow \boxed{G(s)} \rightarrow X_a(s) \end{array} \quad G(s) = \frac{X_a(s)}{X_e(s)} \quad (3.1)$$

$$X_a(s) = G(s) \cdot X_e(s) \quad (3.2)$$

Die Übertragungsfunktion in der allgemeinen Form ist eine gebrochen rationale Funktion und besteht aus einem Zählerpolynom $Z(s)$ mit Grad m und einem Nennerpolynom $N(s)$ mit Grad n :

$$G(s) = \frac{Z(s)}{N(s)} = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0} \quad m \leq n. \quad (3.3)$$

Im Bildbereich wird die Veränderliche s eine komplexe Größe mit Realteil σ und Imaginärteil $j\omega$. Ein Punkt s ist in der s -Ebene definiert durch Real- und Imaginärteil, oder durch Betrag (Amplitude) $|s|$ und Phase $\arg(s)$.

$$s = \sigma + j\omega \quad (3.4)$$

Damit lassen sich die Zähler- und Nennerpolynome auch in der komplexen Zahlenebene lösen, falls keine reellen Lösungen existieren.

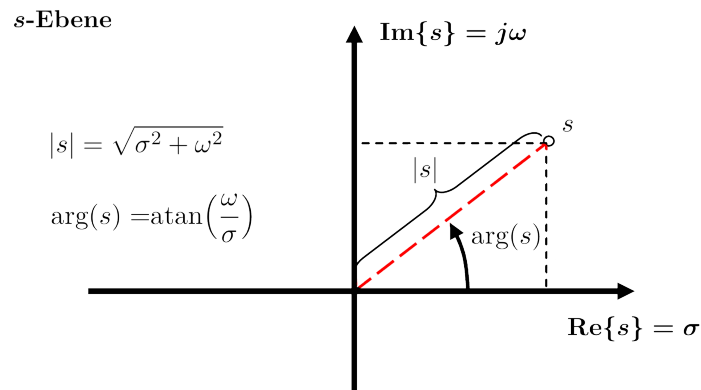


Bild 3.2: $G(s)$ wird aufgespannt von $\text{Re}\{s\} = \sigma$ und $\text{Im}\{s\} = j\omega$.

Die Lösungen des Zählerpolynoms $Z(s)$ bezeichnet man als **Nullstellen**, die Lösungen des Nennerpolynoms $N(s)$ als die **Pole** der Übertragungsfunktion. Die Systemeigenschaften, wie Dynamik und Stabilität hängen ganz entscheidend von der Lage der Nullstellen sowie (noch wichtiger) der Pole ab.

3.2 Allgemeine Darstellungsformen der Übertragungsfunktion

Aus der Laplace-Transformation einer systembeschreibenden Differenzialgleichung entsteht die Grundform der Übertragungsfunktion $G(s)$ in Polynom-Darstellung.

Daraus lassen sich weitere bekannte Schreibweisen der Übertragungsfunktionen errechnen, die unterschiedliche Eigenschaften für die Berechnung der Ausgangsgröße $x_a(t)$ aufweisen. Alle Formen der Übertragungsfunktionen sind mathematisch bei Rückrechnung mit der Polynomdarstellung identisch.

Übertragungsfunktion	Darstellungsform im s-Bereich
Polynom-Darstellung	$G(s) = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$
Pol-Nullstellen-Darstellung	$G(s) = k \cdot \frac{(s - s_{n1})(s - s_{n2}) \dots (s - s_{nm})}{(s - s_{p1})(s - s_{p2}) \dots (s - s_{pn})}$ (Darstellung für reelle Pole und Nullstellen) s = Laplace-Variable, s_n = Zahlenwert der Nullstelle, s_p = Zahlenwert der Polstelle
Zeitkonstanten-Darstellung	$G(s) = K \cdot \frac{(T_{V1} \cdot s + 1)(T_{V2} \cdot s + 1) \dots (T_{Vm} \cdot s + 1)}{(T_1 \cdot s + 1)(T_2 \cdot s + 1) \dots (T_n \cdot s + 1)}$ (Für reelle Pole und Nullstellen mit Absolutglied und negativen Zahlenwerten)
Partialbruch-Darstellung	$G(s) = \frac{A_1}{s - s_{p1}} + \frac{A_2}{s - s_{p2}} + \dots + \frac{A_n}{s - s_{pn}}$ (Für reelle Pole und Nullstellen mit Absolutglied)

Die Übertragungsfunktion eines dynamischen Systems kann algebraisch für die multiplikative (Reihenstruktur), subtraktive, additive und zurückgekoppelte Struktur (Regelkreis) beliebig zusammengestellt werden.

Es kann sich um eine Steuerstrecke, eine Regelstrecke, einen Regler oder einen Regelkreis handeln.

Beispiel 1:

Die folgenden idealen PID-Reglerstrukturen sind mathematisch identisch. Die Koeffizienten T_1 und T_2 ergeben sich durch Faktorenvergleich mit den Koeffizienten K_P , T_N und T_V . Beide Schreibweisen haben ihre eigenen technischen Vorteile.

PID-Reglerstruktur	Übertragungsfunktion mit Nullstellenüberschuss
Reihenstruktur	$G(s) = \frac{K_P}{T_N} \cdot \frac{(T_1 \cdot s + 1)(T_2 \cdot s + 1)}{s}$
Parallelstruktur	$G(s) = K_P \cdot \left(1 + \frac{1}{T_N \cdot s} + T_V \cdot s \right)$

Beispiel 2:

Beim Reihenschwingkreis (PT₂-System) gilt für die DGL:

$$\underbrace{LC}_{T_1 T_2} \ddot{x}_a(t) + \underbrace{RC}_{(T_1 + T_2)} \dot{x}_a(t) + x_a(t) = \underbrace{1}_{K_S} \cdot x_e(t)$$

Und damit für die Übertragungsfunktion:

$$G_S(s) = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1} = \frac{K_S}{T^2 s^2 + 2DTs + 1}$$

$$\text{mit } T = \sqrt{LC}; \quad D = \frac{RC}{2\sqrt{LC}}; \quad T, D > 0$$

$$\text{Mit } T_{1,2} = T(D \pm \sqrt{D^2 - 1}) \quad \text{und} \quad T_1 T_2 = T^2 \quad \text{bzw.} \quad T_1 + T_2 = 2DT$$

3.3 Nullstellen und Pole

Das Zählerpolynom $Z(s)$ mit seinen Nullstellen beschreibt den Einfluss der Eingangsgröße auf das System.

Die Pole des Nennerpolynoms $N(s)$ entsprechen den Eigenwerten der DGL und bestimmen die Stabilität und Dynamik.

Ab Grad $n = 2$ hat die charakteristische Gleichung nur dann reelle Lösungen, wenn die Diskriminante (der Wurzelinhalt) positiv ist. Ist die Diskriminante negativ, gibt es keine reellen, sondern konjugiert komplexe Lösungen.

Das Stabilitätsverhalten der Übertragungsfunktion hat in Abhängigkeit der Eigenwerte der Polstellen folgende 3 Möglichkeiten:

1. **stabil:** negativer Realteil (linke komplexe s-Halbebene)
2. **grenzstabil:** mindestens ein Eigenwert auf der imaginären Achse
3. **instabil:** mindestens ein Eigenwert in der rechten komplexen s-Halbebene

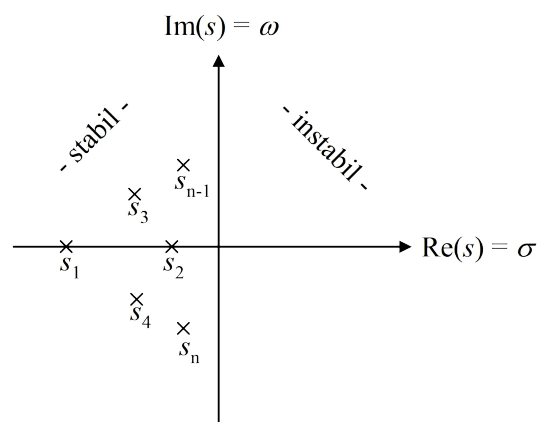


Bild 3.3: Die Wurzeln der charakteristischen Gleichung $s_1 \dots s_n$ für ein stabiles System befinden sich in der linken Halbebene

Beispiel 1: Ladung eines Kondensators (PT₁)

Das PT₁ System aus den Beispielen zuvor hat die Übertragungsfunktion:

$$G(s) = \frac{1}{1 + RCs} \quad (3.5)$$

Das Zählerpolynom besitzt keine Nullstelle.

Die Polstelle des Nennerpolynoms $1 + RCs = 0$ liegt bei $s = -\frac{1}{RC}$ mit ($R > 0$; $C > 0$).

Somit liegt der (reelwertige) Pol auf der linken Seite der komplexen Halbebene von s und zeigt **stabiles** Verhalten.

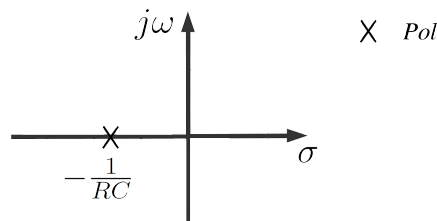


Bild 3.4: Lage des Pols und der Nullstellen in der komplexen Ebene.

Beispiel 2: PT₂

Die Differenzialgleichung:

$$\ddot{x}_a(t) + 2\dot{x}_a(t) + 5x_a(t) = \dot{x}_e(t) - 2x_e(t)$$

hat die Übertragungsfunktion im Bildbereich:

$$G(s) = \frac{Z(s)}{N(s)} = \frac{s - 2}{s^2 + 2s + 5}$$

$$Z(s) : \quad s - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad s_{Z1} = 2$$

$$N(s) : \quad s^2 + 2s + 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad s_{N1} = -1 + 2j, \quad s_{N2} = -1 - 2j$$

Die Nullstelle ist positiv reell, die Pole sind konjugiert komplex und befinden sich in der linken Halbebene. Somit weist das System stabiles Verhalten auf.

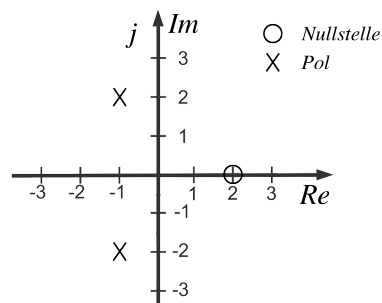


Bild 3.5: Lage des Pols und der Nullstellen in der komplexen Ebene.

Trägt man nun die Amplitude (Verstärkung), also den Betrag $|G(s)|$ über die komplexe s -Ebene auf, so erhält man folgende 3-dimensionale Darstellung der Übertragungsfunktion:

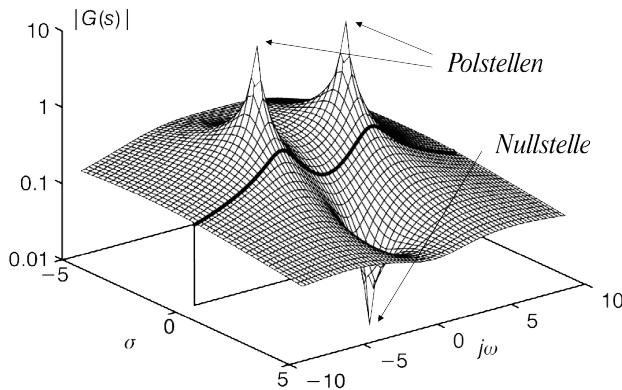


Bild 3.6: Lage des Pols und der Nullstellen aufgespannt über der komplexen Ebene

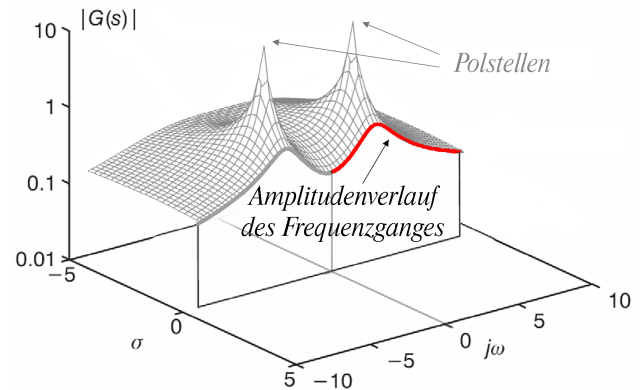


Bild 3.7: Verlauf der Verstärkung in Abhängigkeit der Frequenz ω

Wenn man nur den (positiven) Frequenzanteil der Übertragungsfunktion $G(s)$ betrachtet, also in der reellen Ebene $\sigma = 0$, $j\omega \geq 0$, dann erhält man den charakteristischen Frequenzgang, die Verstärkung $|G(s)|$ in Dezibel über $j\omega$.

Merke: Pole bestimmen das Zeitverhalten des Systems. Das System ist stabil, wenn alle Pole der Übertragungsfunktion in der offenen linken Halbebene **LHE** des Diagramms liegen. Besitzt ein Pol einen Realteil von 0, so ist das System grenzstabil.

Realisierbare (kausale) Systeme besitzen mindestens so viele Pole wie Nullstellen.

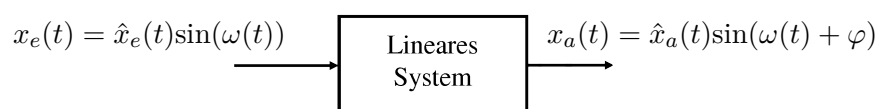
Bewegt man sich auf der Frequenzachse von $-\infty$ nach $+\infty$, so dreht jeder Pol in der LHE sowie jede Nullstelle in der rechten Halbebene **RHE** die Phase um $-\frac{\pi}{2}$. Jede Nullstelle in der LHE bewirkt eine Phasendrehung um $+\frac{\pi}{2}$.

3.4 Frequenzgang

Hierzu wird die Komplexe Übertragungsfunktion von der kartesischen in die Polarform umgewandelt damit man Amplitude und Phase getrennt darstellen kann.

Das Bodediagramm besteht aus 2 Diagrammen, dem Amplitudenfrequenzgang und dem Phasengang.

Um die Abhängigkeit der Amplitude bzw. der Phase von der Frequenz zu verdeutlichen, stellen wir uns eine Anregung des linearen Systems mit einer Sinusschwingung für verschiedene Frequenzen vor und betrachten das System nach der Einschwingphase:



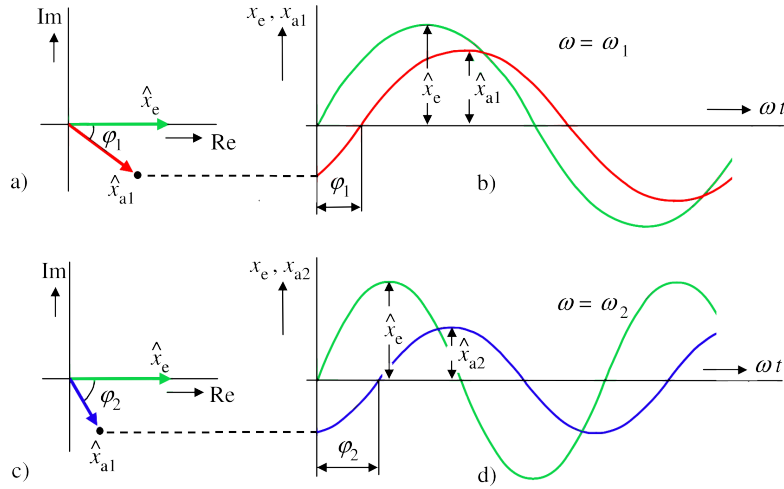


Bild 3.8: Ein- und Ausgangsgröße bei verschiedenen Frequenzen im Zeiger- und Linienbild

Sowohl die Phasenverschiebung $\varphi(\omega)$, als auch das Amplitudenverhältnis $\frac{\hat{x}_a(\omega)}{\hat{x}_e}$ sind direkt abhängig von der Kreisfrequenz ω des Eingangssignals $x_e(t)$.

Um die Berechnungen zu vereinfachen, betrachten wir das Eingangssignal als Imaginärteil der komplexen Funktion:

$$x_e(t) = \hat{x}_e(t) \sin(\omega(t)) \quad \Rightarrow \quad X_e(j\omega) = \hat{x}_e(t) \cdot (\cos(\omega t) + j \sin(\omega t)) \quad (3.6)$$

Eingangssignal: $X_e(j\omega) = \hat{x}_e \cdot e^{j\omega t}$

Ausgangssignal: $X_a(j\omega) = \hat{x}_a \cdot e^{j(\omega t + \varphi(\omega))} = \hat{x}_a \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{j\varphi(\omega)}$

Der **Frequenzgang** $|F(j\omega)|$ des Übertragungssystems ergibt sich aus dem Quotienten von Ausgangssignal und Eingangssignal:

$$|F(j\omega)| = \frac{X_a(j\omega)}{X_e(j\omega)} = \frac{\hat{x}_a \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{j\varphi(\omega)}}{\hat{x}_e \cdot e^{j\omega t}} = \frac{\hat{x}_a(\omega)}{\hat{x}_e} \cdot e^{j\varphi(\omega)} \quad (3.7)$$

Der Frequenzgang gibt das Verhältnis der sinusförmigen Ausgangsschwingung zur sinusförmigen Eingangsschwingung in komplexer Form für alle Kreisfrequenzen an. Daher ist der Frequenzgang eine komplexe Größe, die sich auf zweierlei Arten darstellen lässt.

1. Realteil und Imaginärteil: $F(j\omega) = \text{Re}\{F(j\omega)\} + j \text{Im}\{F(j\omega)\}$
2. Betrag und Phase: $F(j\omega) = |F(j\omega)| \cdot e^{j\varphi(\omega)}$

Die zugehörigen Gleichungen für den Betrag und die Phase sind:

$$\text{Betrag: } |F(j\omega)| = \sqrt{\text{Re}^2\{F(j\omega)\} + \text{Im}^2\{F(j\omega)\}}$$

$$\text{Phase: } \varphi(\omega) = \varphi\{F(j\omega)\} = \arctan \frac{\text{Im}\{F(j\omega)\}}{\text{Re}\{F(j\omega)\}}$$

Darstellung in Dezibel:

Die Einheit Bel (B) ist nach Alexander G. Bell (1847-1922) benannt und als dekadischer Logarithmus zweier Signalleistungen definiert:

$$\log_{10}\left(\frac{P_2}{P_1}\right)\text{B} = \lg\left(\frac{P_2}{P_1}\right)\text{B} \quad (3.8)$$

Man verwendet praktischer Weise ein Zehntel dieses Wertes mit dem Vorsatz Dezi (*d*).

$$R = 10 \cdot \lg\left(\frac{P_2}{P_1}\right)\text{dB} \quad (3.9)$$

Da in der Regelungstechnik nicht die Leistung P , sondern die Amplitude $A = \frac{\hat{x}_a}{\hat{x}_e}$ mit $P \propto A^2$ betrachtet, gilt für R (Ratio):

$$R = 10 \cdot \lg\left(\frac{A_2^2}{A_1^2}\right)\text{dB} = 20 \cdot \lg\left(\frac{A_2}{A_1}\right)\text{dB} \quad (3.10)$$

oder:

$$R[\text{dB}] = 20 \cdot \lg\left(\frac{\hat{x}_a}{\hat{x}_e}\right) \quad (3.11)$$

$$\frac{\hat{x}_a}{\hat{x}_e} = 10^{\frac{R[\text{dB}]}{20}} \quad (3.12)$$

Somit ergeben sich beispielsweise für folgende Dezibel Werte die linearen Amplitudenverhältnisse:

$R[\text{dB}]$	0	20	40	60	-20	-40	-60	6	3	$-\infty$
$\frac{\hat{x}_a}{\hat{x}_e} = 20 \cdot \lg\left(\frac{\hat{x}_a}{\hat{x}_e}\right)$	1	10	100	1000	0.1	0.01	-0.001	≈ 2	$\approx \sqrt{2}$	0

3.5 Bodediagramm

Bodediagramm (und Ortskurve) sind Visualisierungen des Systemverhaltens und erlauben die Beurteilung des Systems und des Reglerentwurfs. In einem Bode-Diagramm wird das Verhalten einer Schaltung in Abhängigkeit der Frequenz dargestellt.

Und zwar in zwei Darstellungen, eine für das Amplitudenverhältnis und eine für die Phasenverschiebung zwischen Ausgangsspannung und Eingangsspannung. Die Frequenzachse wird hierbei logarithmisch dargestellt. Das Amplitudenverhältnis in dB.

Wenn Amplitude und Phase getrennt vorliegen, können diese in zwei getrennten Diagrammen, im sogenannten Bodediagramm dargestellt werden.

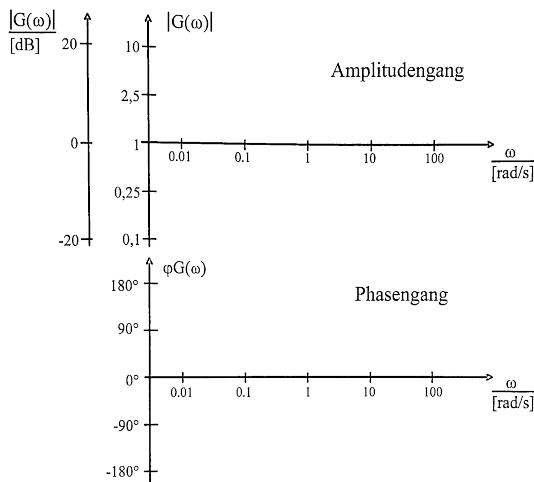
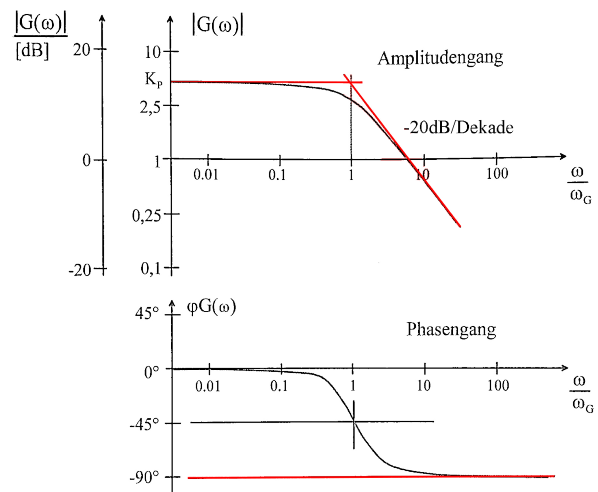


Bild 3.9: Bodediagramm

Bild 3.10: Bodediagramm (PT₁-System)

Asymptoten: Amplitudengang:

Für die wichtigsten Übertragungssysteme existieren die asymptotischen Amplitudengänge mit ihren Kennwerten für Steigungen und Eckfrequenzen an den Schnittpunkten in Tabellenform.

Regelstreckentyp	Asymptotischer Amplitudengang	Kennwerte
Reines Proportionalsystem P-System	R_0 0 dB/Dek.	$R_0 = 20 \lg(K_S) \text{ dB}$ $K_S = 10^{\frac{R_0}{20 \text{ dB}}}$
Proportionalsystem mit Verzögerung erster Ordnung P-T1-System	R_0 0 dB/Dek. ω_{E1} -20 dB/Dek.	$R_0 = 20 \lg(K_S) \text{ dB}$ $\omega_{E1} = \frac{1}{T_1}$
Proportionalsystem mit Verzögerung zweiter Ordnung P-T2-System	R_0 0 dB/Dek. ω_{E1} -20 dB/Dek. ω_{E2} -40 dB/Dek.	$R_0 = 20 \lg(K_S) \text{ dB}$ $\omega_{E1} = \frac{1}{T_1}, \omega_{E2} = \frac{1}{T_2}$
Proportionalsystem zweiter Ordnung mit Schwing- verhalten P-S2-System	R_0 0 dB/Dek. ω_{E1} -40 dB/Dek.	$R_0 = 20 \lg(K_S) \text{ dB}$ $\omega_{E1} = \omega_0$

Bild 3.11: Amplitudengänge für ausgewählte Systeme

Phasengang:

Sind die Steigungen der asymptotischen Amplitudengänge bekannt, ergeben sich die Phasengänge aus den jeweiligen Schnittpunkten (siehe folgende Tabelle).

Steigung Asymptote		Lage Phasengang	
	0 dB/Dekade	$\varphi = 0$	0 Grad
+	20 dB/Dekade	$\varphi = +\frac{\pi}{2}$	+ 90 Grad
-	20 dB/Dekade	$\varphi = -\frac{\pi}{2}$	- 90 Grad
+	40 dB/Dekade	$\varphi = +\pi$	+ 180 Grad
-	40 dB/Dekade	$\varphi = -\pi$	- 180 Grad

Bestimmung der Modellparameter:

Aus bekannten Amplitudengängen kann man somit die Modellparameter in folgenden Schritten bestimmen:

- Annäherung des Amplitudengangs mit Asymptoten $\pm n \cdot 20$ dB/Dekade, $n = 0, 1, 2 \dots$
- Bestimmung des Modelltyps durch Vergleich mit Tabellen
- Bestimmung der Lage der Asymptote bei niedrigen Frequenzen
- Bestimmung der Eckfrequenzen ω_E an den Schnittstellen der Asymptoten
- Berechnung der Modellparameter aus diesen Kennwerten

Zusammenschalten und Zerlegen:

Die Reihenschaltung von zwei Übertragungsfunktionen (z.B. Regler und Strecke) ergibt:

$$G(s) = G_1(s) \cdot G_2(s)$$

Es gilt analog für die Frequenzgänge:

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= F_1(j\omega) \cdot F_2(j\omega) = |F_1(j\omega)| \cdot e^{j\varphi_1} \cdot |F_2(j\omega)| \cdot e^{j\varphi_2} \\ &= |F_1(j\omega)| \cdot |F_2(j\omega)| \cdot e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)} \end{aligned}$$

Die Beträge werden multipliziert und die Winkel addiert, da sie im Exponenten stehen.

Da im Bodediagramm der Amplitudengang logarithmisch aufgetragen wird, kann man sowohl die Amplitudengänge als auch die Phasengänge der Einzelsysteme bei Reihenschaltungen addieren.

Merke: Reihenschaltungen von Systemen sind im Bode-Diagramm Additionen der einzelnen Amplitudengänge und Phasengänge. Beispiel hierzu findet sich in den Übungsaufgaben.

Beispiel 1: PT₁

Anhand unseres PT₁ System $G(j\omega) = \frac{K}{1 + j\omega T}$ erhält man relativ schnell:

$$|G(j\omega)| = \frac{|Z(j\omega)|}{|N(j\omega)|} = \frac{|K|}{\sqrt{1 + (\omega T)^2}} \Rightarrow R(\omega)[\text{dB}] = 20 \cdot \log(|K|) - 20 \cdot \log(\sqrt{1 + (\omega T)^2})$$

$$\text{Für } \omega \ll \frac{1}{T} : R(\omega) = 20 \cdot \log(|K|) - 20 \cdot \log(1) = 20 \cdot \log(|K|)$$

$$\begin{aligned} \text{Für } \omega \gg \frac{1}{T} : R(\omega) &= 20 \cdot \log(|K|) - 20 \cdot \log(\sqrt{(\omega T)^2}) \\ &= 20 \cdot \log(|K|) - 20 \cdot \log(T) - 20 \cdot \log(\omega) \end{aligned}$$

Zur Trennung in Real- und Imaginärteil wird $G(j\omega)$ mit dem konjugiert komplexen Ausdruck des Nenners erweitert:

$$G(j\omega) = \frac{K}{1 + j\omega T} \cdot \frac{(1 - j\omega T)}{(1 - j\omega T)} = \frac{K(1 - j\omega T)}{1 + (\omega T)^2} = \frac{K}{1 + (\omega T)^2} + j \cdot \frac{-K\omega T}{1 + (\omega T)^2}$$

Für den Phasenwinkel erhält man damit:

$$\varphi(\omega) = \arctan \left[\frac{\text{Im}\{G(\omega)\}}{\text{Re}\{G(\omega)\}} \right] = \arctan \left[\frac{-\frac{K\omega T}{1 + (\omega T)^2}}{\frac{K}{1 + (\omega T)^2}} \right] = -\arctan(\omega T)$$

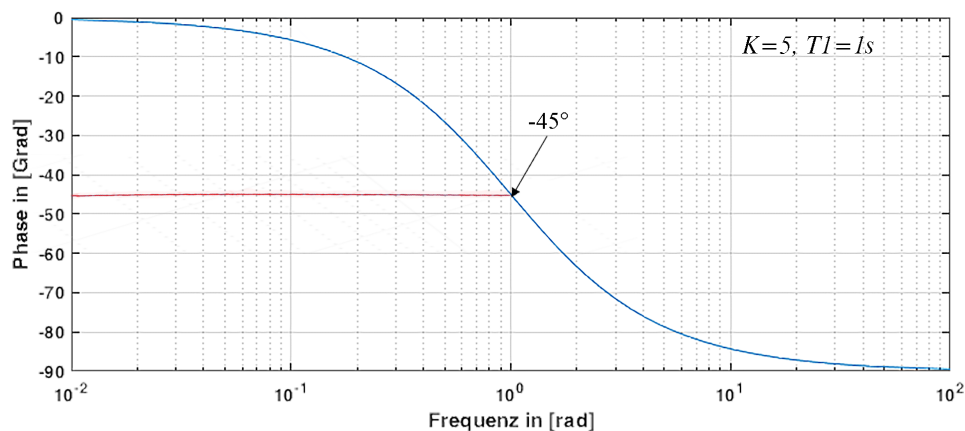
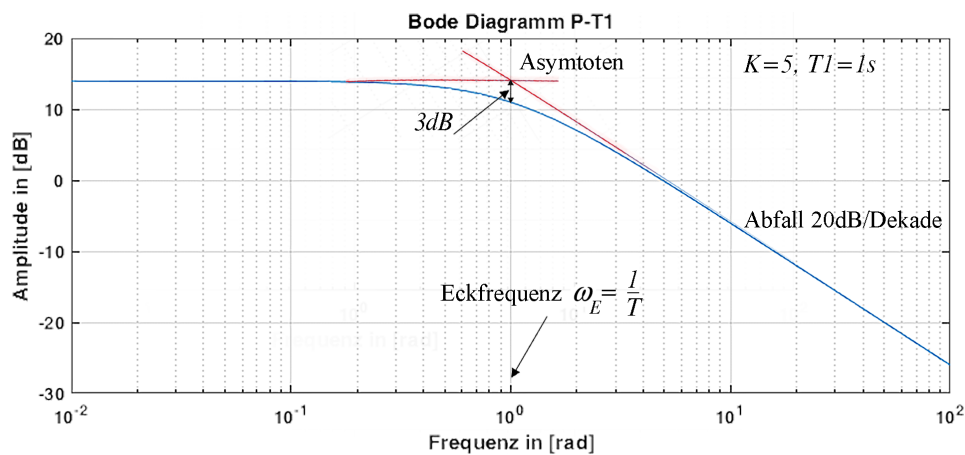


Bild 3.12: Bode Diagramm mit Darstellung der Amplitude und Phase mit $K=5$ und $T = 1s$

Beispiel 2: Schwingungsfähiges PT₂ System

DGL: $\frac{1}{\omega_0^2} \ddot{x}_a + \frac{2D}{\omega_0} \dot{x}_a + x_a = K \cdot x_e$

Übertragungsfunktion: $G(s) = \frac{K}{\frac{1}{\omega_0^2} s^2 + \frac{2D}{\omega_0} s + 1}$

Frequenzgang: $G(j\omega) = \frac{K}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) + j\omega\left(\frac{2D}{\omega_0}\right)}$

Betrag: $|G(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(2D\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$

Phasenwinkel: $\varphi(\omega) = \arctan \left[-2D \frac{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \right]$

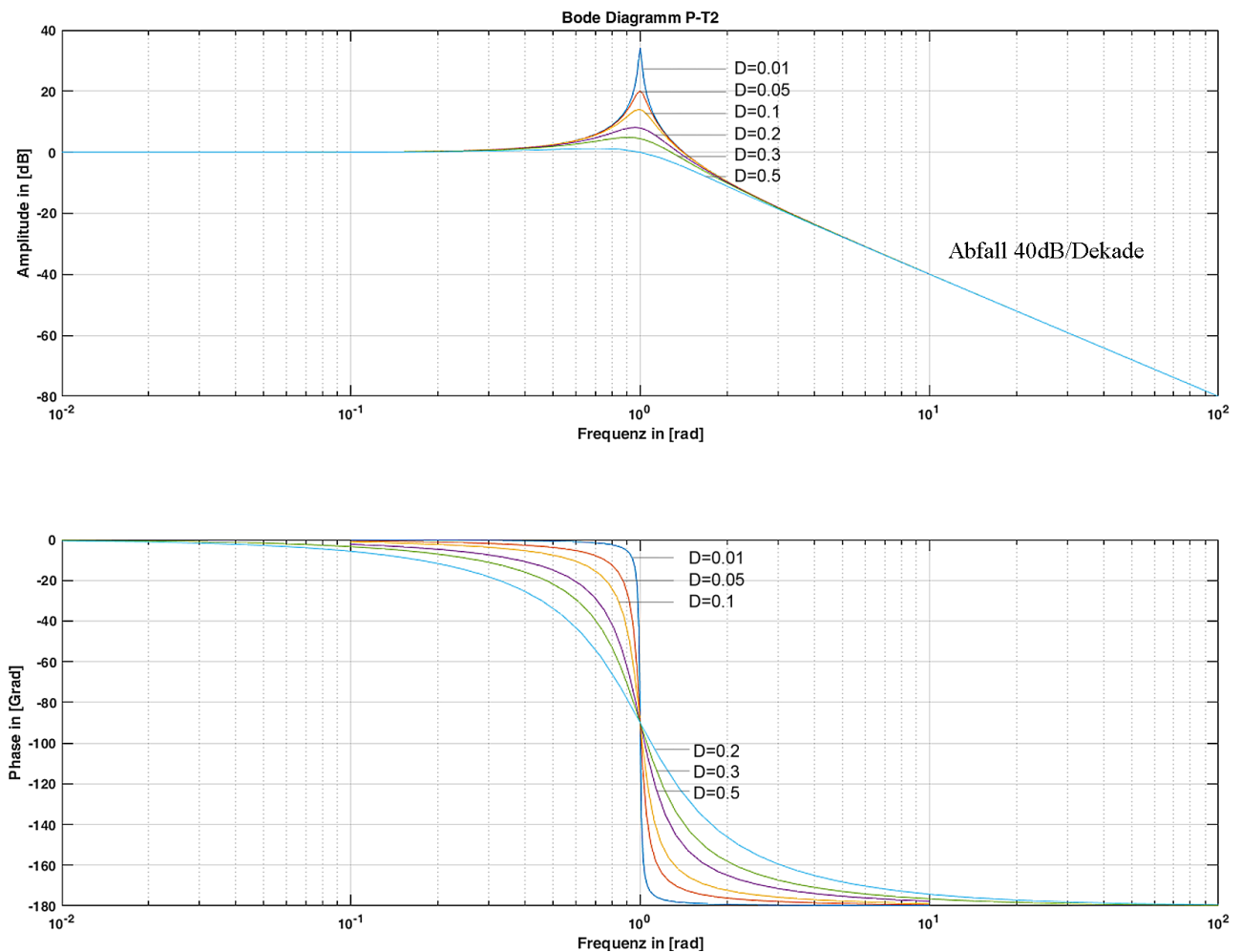


Bild 3.13: PT₂-System mit $K = 1$, Kreisfrequenz $\omega_0 = 1$ und variablen Dämpfungen D

3.6 Ortskurve (Nyquist Diagramm)

Die Darstellung der Ortskurve, also Amplitude und Phase in einem Diagramm, wird nach dem schwedisch-amerikanischen Physiker Harry Nyquist benannt.

Will man die Ortskurve aus dem Frequenzgang ermitteln, so wird der komplexe Ausdruck aus Real- und Imaginärteil für verschiedene Frequenzen in die Gaußsche Zahlenebene eingetragen.

Eine Linie entsteht, indem man für den Funktionsparameter ω alle möglichen Werte einsetzt.

Ein wesentlicher Unterschied zum Bode-Diagramm besteht darin, dass beim Nyquist-Diagramm häufig keine Werte des Funktionsparameters ω eingetragen werden, weshalb anhand des Graphen keine Aussage über **Knickfrequenzen** u. Ä. gemacht werden können.

Der Nutzen von Nyquist-Diagrammen besteht darin, dass damit die **Stabilität** des rückgekoppelten Systems leicht vorausgesagt werden kann. Dabei können Stabilität und andere Eigenschaften verbessert werden, indem man den Plot graphisch verändert.

Beispiel 1: PT₁-System:

In der folgenden Tabelle ist das für verschiedene ω -Werte in $[\frac{1}{s}]$ durchgeführt und als Ortskurve wiedergegeben.

ω	0	0.5	1	2	4	5	10	20	30	100	1000	∞
$\text{Re}(G)$	5	4	2.5	1	0.29	0.19	0.05	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00
$\text{Im}(G)$	0	-2	-2.5	-2	-1.18	-0.96	-0.50	-0.25	-0.17	-0.05	0.00	0.00

Man startet bei $\omega = 0$ und trägt jeweils den Realteil und Imaginärteil, bzw. Winkel und den Betrag als Zeiger in die komplexe Ebene mit ansteigendem ω ein.

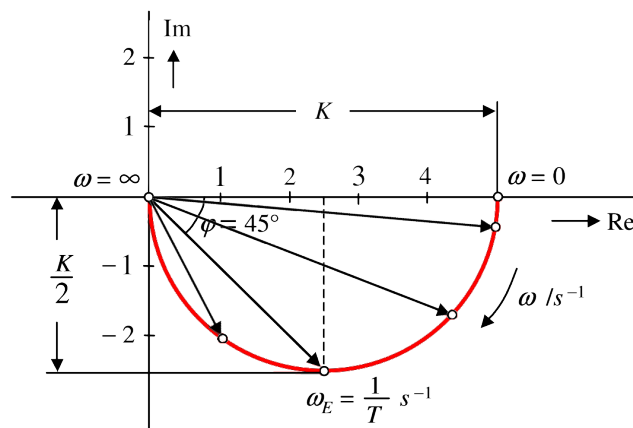
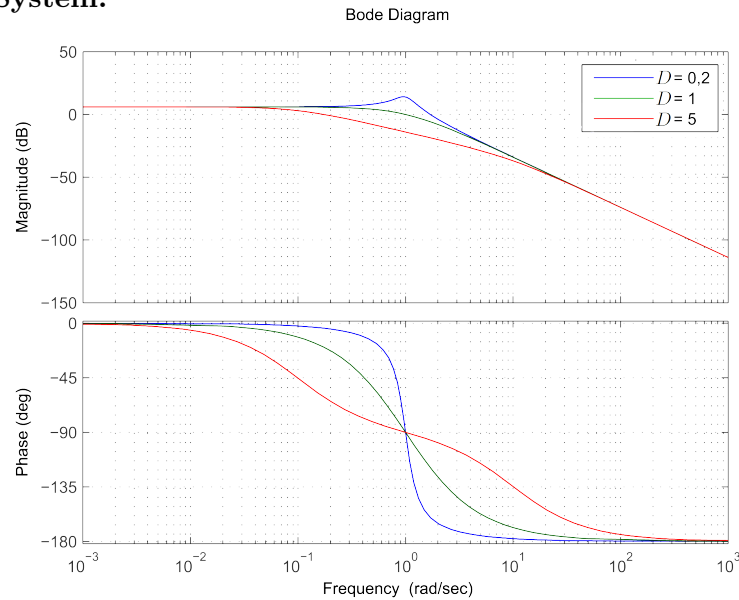
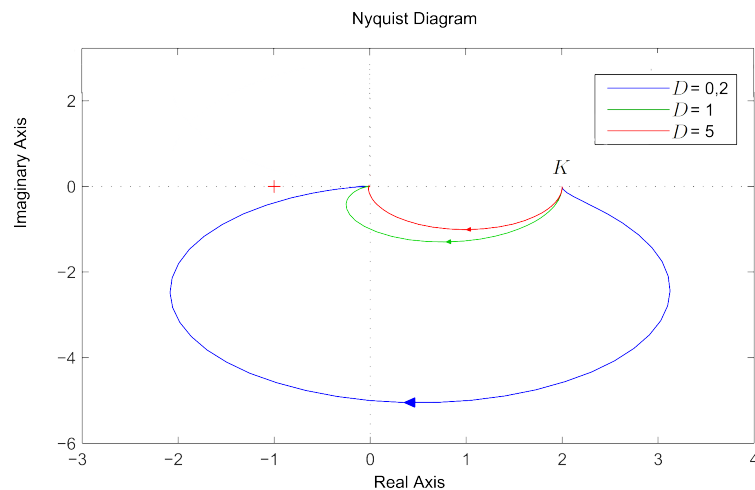


Bild 3.14: Verlauf der Amplitude und Phase in einem einzigen Diagramm für das PT₁-Beispiel ($K = 5, T_1 = 1s$)

Beispiel 2: PT₂-System:**Bild 3.15:** Bodediagramm eines PT₂-Gliedes ($K = 2, T = 1, D = 0.2; 1; 5$)

Die Ortskurve ($0 \leq \omega \leq \infty$) des PT₂-Gliedes verläuft vom Punkt K auf der positiven reellen Achse in Abhängigkeit von der Dämpfung D durch den vierten und dritten Quadranten für $\omega \rightarrow \infty$ aus Richtung der negativen reellen Achse in den Punkt 0.

**Bild 3.16:** Ortskurve eines PT₂-Gliedes ($K = 2, T = 1, D = 0.2; 1; 5$)**3.7 Sprungfähigkeit**

Unter Sprungfähigkeit eines Systems versteht man das Verhalten, dass auf einen Signalsprung am Eingang ein Sprung am Ausgang erfolgt.

Lineare, zeitinvariante Systeme, bei deren Übertragungsfunktion der Nennergrad (n) höher ist als der Zählergrad (m), sind *nicht* sprungfähig.

Der **Energieinhalt** kann sich nicht sprunghaft ändern, deshalb ändern sich auch die Zustandsgrößen eines Systems nicht sprunghaft.

Merke: Ein System ist nur dann sprungfähig, wenn der Sprung des Eingangssignals direkt auf das Ausgangssignal wirkt, dies ist gewährleistet bei ($n = m$).

3.8 Block-Verschaltung

Regelkreise bestehen aus mehreren zusammengeschalteten Blöcken, die jeweils durch eine Übertragungsfunktion beschrieben werden. Für die Zusammenschaltung dieser Blöcke gibt es Rechenregeln.

3.8.1 Parallelschaltung

Bei der Parallelschaltung wird den Systemen $G_1(s)$ und $G_2(s)$ jeweils das Eingangssignal x_e zugeführt. Die Ausgänge der beiden Systeme x_1 und x_2 werden dann addiert. Um diese beiden Systeme zusammenzufassen, bedienen wir uns der Bedingung, unter der die Laplace-Transformation stattfinden darf, nämlich der Linearität. Aufgrund dieser Voraussetzung darf das Superpositionsprinzip bzw. der Überlagerungssatz angewendet werden.

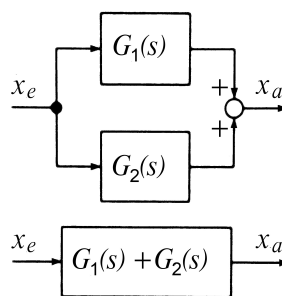


Bild 3.17: Parallele Systeme werden addiert

$$x_a(s) = (G_1(s) + G_2(s)) \cdot x_e(s) \quad (3.13)$$

Solche Parallelschaltungen werden häufig bei Proportional- bzw. P-Glieder und Integral- bzw. I-Gliedern angewendet.

3.8.2 Reihenschaltung

Wenn Systeme hintereinandergeschaltet werden, dann ist im Zeitbereich eine Faltungsoperation erforderlich. Im Laplace-Bereich entspricht die Reihenschaltung von $G_1(s)$ und $G_2(s)$ einer Multiplikation der beiden Übertragungsfunktionen:

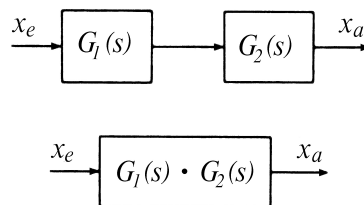


Bild 3.18: Reihenschaltung von Systemen

$$X_a(s) = G_1(s) \cdot G_2(s) \cdot X_e(s) \quad (3.14)$$

Da die Multiplikation eine kommutative Rechenoperation, kann dabei auch die Reihenfolge der Systeme im Blockschaltbild vertauscht werden.

Damit ist es möglich, Blöcke, die in Reihe geschaltet sind, in beliebiger Reihenfolge anzuordnen. Dies wird häufig bei der Vereinfachung von Blockschaltbildern angewendet.

3.8.3 Rückkopplung

Bei der Kreisschaltung wird das Ausgangssignal, das aus dem Vorwärtszweig mit dem Teilsystem $G_1(s)$ kommt, über das Teilsystem $G_2(s)$ zum Eingang zurückgeführt und dort negativ aufgeschaltet.

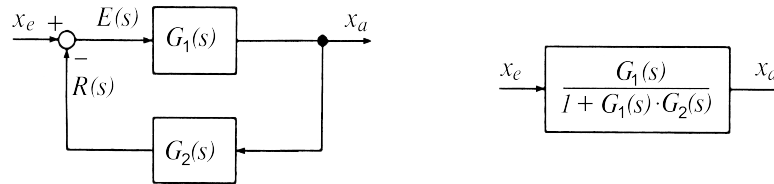


Bild 3.19: System mit Rückkopplung, der Regelkreis

Die negative Rückführung ist ein Grundprinzip der Dynamik und Regelungstechnik.

$$E(s) = X_e(s) - R(s) \quad (3.15)$$

Weiterhin wird $R(s) = X_a(s)G_2(s)$ aus dem Ausgangssignal $X_a(s)$ gebildet.

$$E(s) = X_e(s) - X_a(s)G_2(s) \quad (3.16)$$

Die Ausgangsgröße $X_a(s)$ berechnet sich dann aus $E(s)$ wie folgt:

$$X_a(s) = G_1(s)E(s) \quad (3.17)$$

Aus beiden Gleichungen wird $E(s)$ eliminiert.

$$X_a(s) = G_1(s)(X_e(s) - X_a(s)G_2(s)) \quad (3.18)$$

$$X_a(s) = G_1(s)X_e(s) - G_1(s)G_2(s)X_a(s) \quad (3.19)$$

Daraus resultiert dann die gesuchte Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises.

$$\frac{X_a(s)}{X_e(s)} = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} \quad (3.20)$$

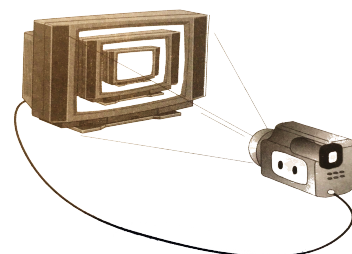
Das Rückkopplungsprinzip stellt das primäre Kennzeichen des Regelns dar. Es sagt aus, dass die Ausgangsgröße eines Prozesses auf eine Eingangsgröße des Systems zurückwirkt.

Beispiel 1:

Beim Duschen spürt der Benutzer unmittelbar die Temperatur und gleicht sie seinen Vorstellungen über die Ventile an.

Das Rückkopplungsprinzip hat die Aufgabe die Ausgangsgröße nach Vorgabe einzustellen.

Beispiel 2: Video Rückkopplung



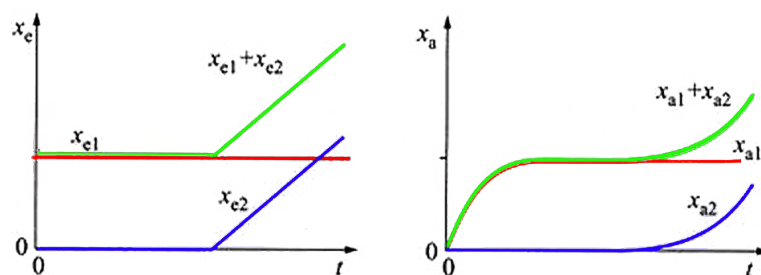
3.9 Linearisierung

Bei linearen und zeitinvarianten Systemen steht auf der rechten Seite ein Ausdruck $\dots = K \cdot x_e(t)$, also eine Gerade mit Steigung K . Es wird angenommen, dass die Stellgröße $x_e(t)$ mit dem konstanten Faktor K auf die Regelgröße $x_a(t)$ wirkt, die Regelgröße also linear von der Stellgröße abhängt.

Ein Beispiel für ein zeitvariantes System wäre ein temperaturabhängiger Widerstand, der mit der Zeit sein Verhalten ändert oder eine Rakete, die während des Fluges Treibstoff verbraucht.

Bei einem linearen System gelten das Superpositionsprinzip (Überlagerungsprinzip) und der Verstärkungssatz:

Superpositionsprinzip: $x_{a1} + x_{a2} = f\{x_{e1} + x_{e2}\} = f\{x_{e1}\} + f\{x_{e2}\}$ (3.21)



Verstärkungsprinzip: $k \cdot x_a = f\{k \cdot x_{e1}\} = k \cdot f\{x_e\}$ (3.22)

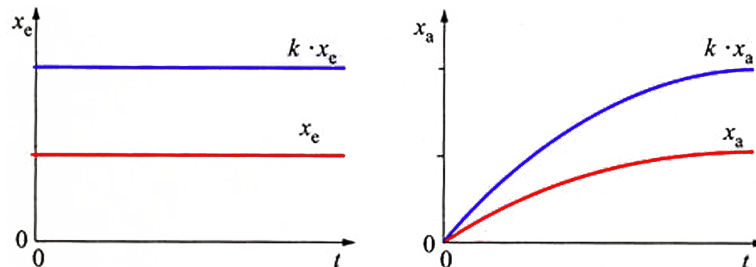


Bild 3.20: Superpositionsprinzip und Verstärkungssatz als Voraussetzung für Linearität

Zwei Signale, die überlagert werden, erscheinen als Summe am Ausgang. Verändert man die Amplitude eines Signals, so ändert sich in demselben Maß auch die Ausgangsamplitude. Ein zeitinvariantes System verändert außerdem seine Eigenschaften im Laufe der Zeit nicht.

Beispiele für nichtlineare Systeme:

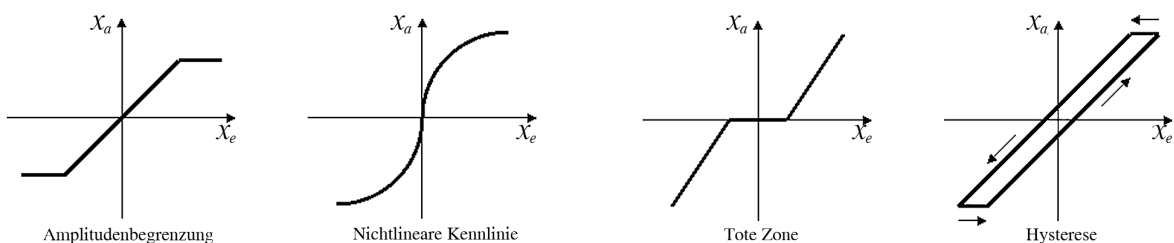


Bild 3.21: Nichtlineare Übertragungssysteme

Linearisierung bei nichtlinearem Verhalten

Da in der Realität zwischen Stell- und Regelgröße häufig ein nichtlinearer Zusammenhang besteht, wählt die Regelungstechnik den Weg der Linearisierung.

Bisher wurden die Bezeichnungen x_e und x_a allgemein für Eingangs- bzw. Ausgangsgrößen der Übertragungsfunktion verwendet. Um zu unterscheiden, an welchen Punkten des Regelkreises man sich befindet, werden y für den Eingang, z für die Störgröße und x für das Ausgangssignal der Regelstrecke verwendet.

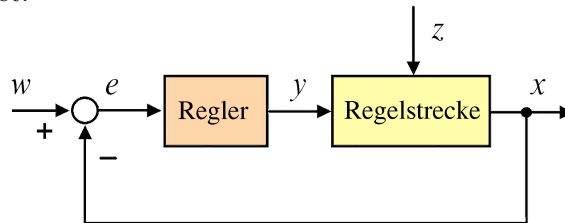


Bild 3.22: Wirkungsplan eines Regelkreises (mit Störverhalten z)

Betrachtet werden Übertragungsfunktionen im statischen Bereich, wie $X = f(Y, Z)$. Die Großbuchstaben deuten auf den nichtlinearen Zusammenhang hin (nicht zu verwechseln mit den Großbuchstaben im s -Bereich).

Die Linearisierung läuft in folgenden Schritten ab:

1. Arbeitspunkt A auf der Kennlinie wählen.
Die Regelung findet um den Punkt $A(X_0, Y_0, Z_0)$ statt.
2. Tangentensteigungen bzw. partiellen Ableitungen K_{PSy} und K_{PSz} im Arbeitspunkt A berechnen (oder grafisch ermitteln). Mathematisch wird die Taylorreihe nach dem linearen Glied abgebrochen.

$$K_{PSy} = \left(\frac{\partial X}{\partial Y} \right)_0 \quad \text{und} \quad K_{PSz} = \left(\frac{\partial X}{\partial Z} \right)_0$$

3. Ersetzen der nichtlinearen Funktion $X = f(Y, Z)$ durch eine neue Funktion $x = f(y, z)$ mit Koordinatenursprung in A :

$$x = K_{PSy} \cdot y + K_{PSz} \cdot z$$

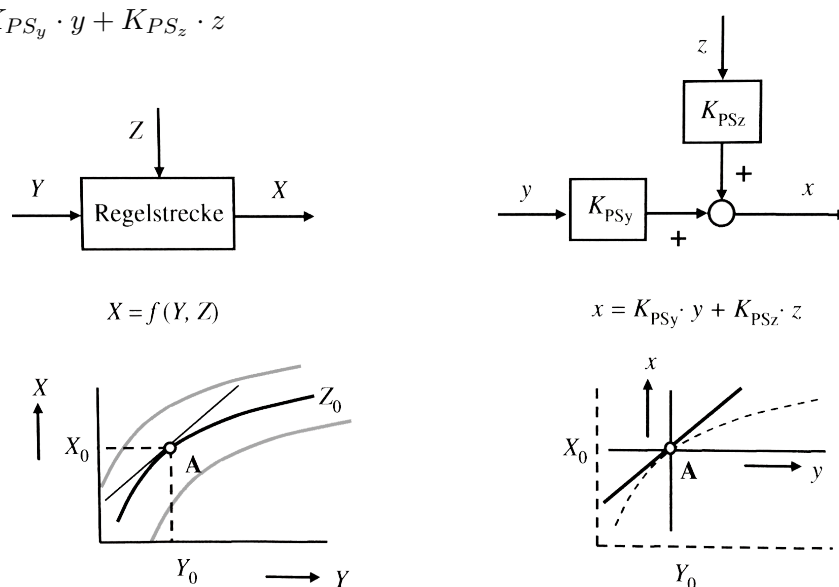


Bild 3.23: Die linearisierte Kennlinie ist die Tangente im Arbeitspunkt A .

Beispiel:

Eine Regelstrecke, die durch die Differentialgleichung:

$$T_2^2 \cdot \ddot{X}(t) + T_1 \cdot \dot{X}(t) + X(t) = 3 \cdot Y^2(t) + 5 \cdot \sqrt{Z(t)}$$

beschrieben wird, soll im Arbeitspunkt $Y_0 = 2$ und $Z_0 = 4$

linearisiert bzw. in der Form: $x = K_{PS_y} \cdot y + K_{PS_z} \cdot z$ dargestellt werden.

1. Linearisierung im Arbeitspunkt $A : Y_0 = 2, Z_0 = 4$
2. Für das statische Verhalten sind $\ddot{X}(t) = 0$ und $\dot{X}(t) = 0$.

Partielle Ableitung ergibt:

$$X = 3 \cdot Y^2 + 5 \cdot \sqrt{Z}$$

Die gesuchten Proportionalbeiwerte sind die partiellen Ableitungen im Arbeitspunkt:

$$K_{PS_y} = \left(\frac{\partial X}{\partial Y} \right) \Big|_{Y_0} = (2 \cdot 3 \cdot Y) \Big|_{Y_0} = 2 \cdot 3 \cdot Y_0 = 2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$$

$$K_{PS_z} = \left(\frac{\partial X}{\partial Z} \right) \Big|_{Z_0} = \left(5 \cdot \frac{1}{2\sqrt{Z}} \right) \Big|_{Z_0} = \frac{5}{2\sqrt{Z_0}} = \frac{5}{2\sqrt{4}} = 1,25$$

3. Damit ergibt sich die linearisierte Gleichung:

$$x = K_{PS_y} \cdot y + K_{PS_z} \cdot z = 12 \cdot y + 1,25 \cdot z$$

3.10 Übertragungsfunktionen von Reglern und Strecken

Regelstrecken		Regler	
Typ	Übertragungsfunktion	Typ	Übertragungsfunktion
P	$G_S = K_S$	P	$G_R = K_P$
P-T1	$G_S = \frac{K_S}{T_1 s + 1}$	PI	$G_R = K_P + \frac{K_I}{s} = \frac{K_P s + K_I}{s}$
P-T2	$G_S = \frac{K_S}{T_1 T_2 s^2 + (T_1 + T_2)s + 1}$	PD	$G_R = K_P + K_D s$
P-S2	$G_S = \frac{K_S}{\frac{1}{\omega_0^2} s^2 + \frac{2D}{\omega_0} s + 1}$	PD-T1	$G_R = \frac{K_P + K_D s}{T_1 s + 1}$
I	$G_S = \frac{K_S}{s}$	PID	$G_R = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s$
I-T1	$G_S = \frac{K_S}{s(1 + T_1 s)}$	PID-T1	$G_R = \frac{K_D s^2 + K_P s + K_I}{s(T_1 s + 1)}$

Bild 3.24: Die wichtigsten Übertragungsfunktionen für Regelstrecken und Regler

KAPITEL 4

Die Regelstrecke

Als Regelstrecke bezeichnet man in der Regelungstechnik denjenigen Teil eines Regelkreises, der die zu regelnde physikalische Größe - die Regelgröße - enthält, auf die der Regler über die Stellgröße wirken soll. Bekannte Regelgrößen sind z. B. Raumtemperatur, Füllstand eines Behälters, Position einer Mechanik.

Eingangsgröße der Regelstrecke ist die Summe aus der Stellgröße y bzw. (x_e) und der Störgröße z . Ausgangsgröße ist die Regelgröße x bzw. (x_a) .

Die Übertragungsfunktion der Strecke ist $G_S(s)$.

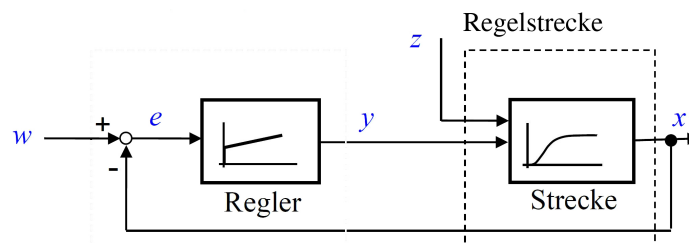


Bild 4.1: Wirkungsplan der Regelstrecke

Die Regelstrecke kann als dynamisches System aus einer Kette von meist unbekannten Einzelsystemen bestehen, deren Ausgangsgröße über ein Messglied gemessen und über einen Soll- Istwertvergleich an den Regler zurückgeführt wird. Das Stellglied als Schnittstelle zwischen Regler und Regelstrecke kann Bestandteil der Regelstrecke, des Reglers oder ein eigenständiges Gerät sein.

Mathematisch wird die Regelstrecke als Übertragungssystem definiert. Sie kann aus einem oder aus mehreren Übertragungssystemen und aus Eingrößen **SISO** - und Mehrgrößensystemen **MIMO** bestehen. Die Übertragungssysteme können lineares und nichtlineares Verhalten aufweisen. Dementsprechend sind die mathematischen Beschreibungen der Regelstrecke unterschiedlich.

Um den Regler für anspruchsvolle Regelaufgaben auslegen zu können, ist es nötig, die Regelstrecke zu identifizieren. Dies geschieht über die Erstellung eines mathematischen Modells der Regelstrecke, das möglichst genau das zeitliche Verhalten der Regelstrecke wiedergeben soll.

Lässt sich das Modell nicht berechnen, was fast immer der Fall ist, wird als Identifizierungsmethode die Regelstrecke durch ein geeignetes Testsignal angeregt und das Ausgangssignal aufgezeichnet. Das zeitliche Verhalten dieser Signale (meist ein Sprungsignal) erlaubt die Identifizierung zu einem Streckenmodell.

Es gilt allgemein für die Regelstrecken:

$$\cdots + a_3 \ddot{x}(t) + a_2 \dot{x}(t) + a_1 x(t) = y(t) \quad (4.1)$$

bzw.

$$\cdots + T_3^3 \ddot{x}(t) + T_2^2 \dot{x}(t) + T_1 x(t) + x(t) = K_{PS} y(t) \quad (4.2)$$

4.1 Regelstrecken mit und ohne Ausgleich

Strecken mit Ausgleich (**P-Strecken**):

Man spricht von einer Strecke mit Ausgleich, wenn nach einer sprunghaften Verstellung der Eingangsgröße $y(t)$ die Ausgangsgröße $x(t)$ (Regelgröße) für $t \rightarrow \infty$ wieder einen neuen Beharrungszustand $x(\infty)$ annimmt.

Für $t \rightarrow \infty$ wird der Beharrungszustand erreicht, x ist dann konstant, d. h. es findet keine zeitliche Änderung von x mehr statt, folglich sind alle Ableitungen $\dot{x}(t)$, $\ddot{x}(t)$, $\ddot{x}(t)$ usw. Null. Im Beharrungszustand gilt dann:

$$a_0 x(\infty) = y_0, \quad x(\infty) = \frac{1}{a_0} y_0, \quad \text{bzw.} \quad x(\infty) = K_{PS} \cdot y_0. \quad (4.3)$$

Sprungantwort einer Regelstrecke mit Ausgleich. Hierin ist $y(t) = y_0 = \text{konstant}$ der Eingangssprung.

Strecken mit Ausgleich bezeichnet man auch als proportionale oder kurz P-Strecken, weil im Beharrungszustand die Ausgangsgröße proportional der Eingangsgröße ist.

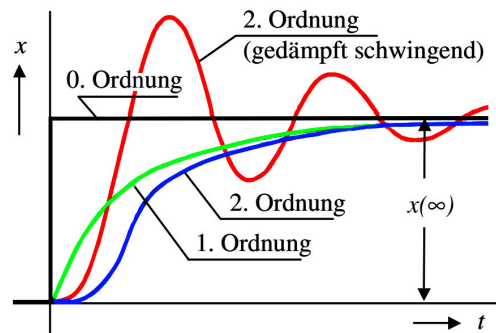


Bild 4.2: Sprungantwort mit Ausgleich

Strecken ohne Ausgleich (**I-Strecken**):

Bei Strecken ohne Ausgleich wird bei einer Sprungfunktion am Eingang die Regelgröße x keinen Beharrungswert annehmen, sondern monoton anwachsen. In der Differentialgleichung (4.1) drückt sich das so aus, dass der Beiwert $a_0 = 0$ ist.

$$\cdots + a_3 \ddot{x}(t) + a_2 \dot{x}(t) + a_1 x(t) = y(t) \quad (4.4)$$

bzw.

$$\cdots + a_3 \ddot{x}(t) + a_2 \dot{x}(t) + a_1 x(t) = \int y(t) dt \quad (4.5)$$

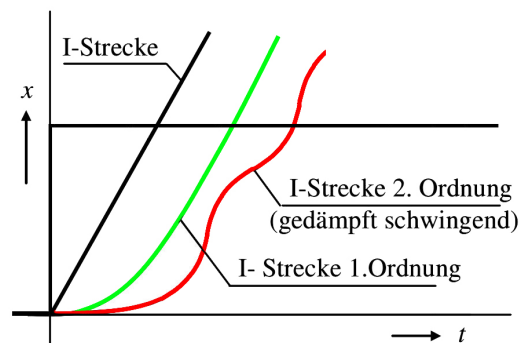


Bild 4.3: Sprungantwort ohne Ausgleich

4.2 P-System

P-Systeme sind Übertragungsglieder, die eine feste Verstärkung aufweisen.

DGL: $x_a(t) = K_S \cdot x_e(t)$

Übertragungskonstante: $K_S = \frac{x_a}{x_e}$

Sprungantwort: $h(t) = K_S \cdot \sigma(t)$

Übertragungsfunktion: $G_S(s) = K_S$

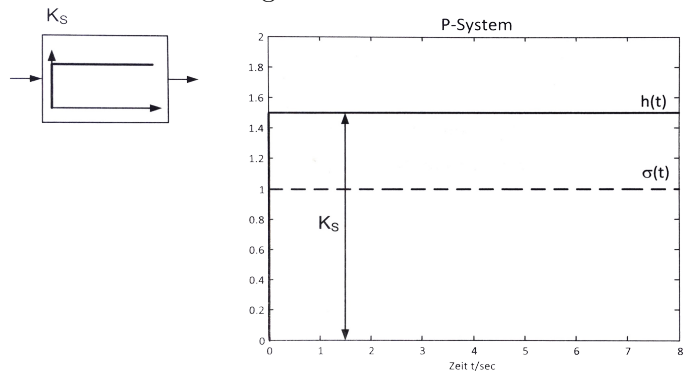


Bild 4.4: Das P-System springt ohne Verzögerung auf den Endwert

P-Systeme, die auf einen Eingangssprung ohne Verzögerung antworten sind in der Natur sehr selten, man findet sie allerdings näherungsweise in rein ohmschen Netzen, Hebeln, Getrieben und Sensoren.

Beispiele:

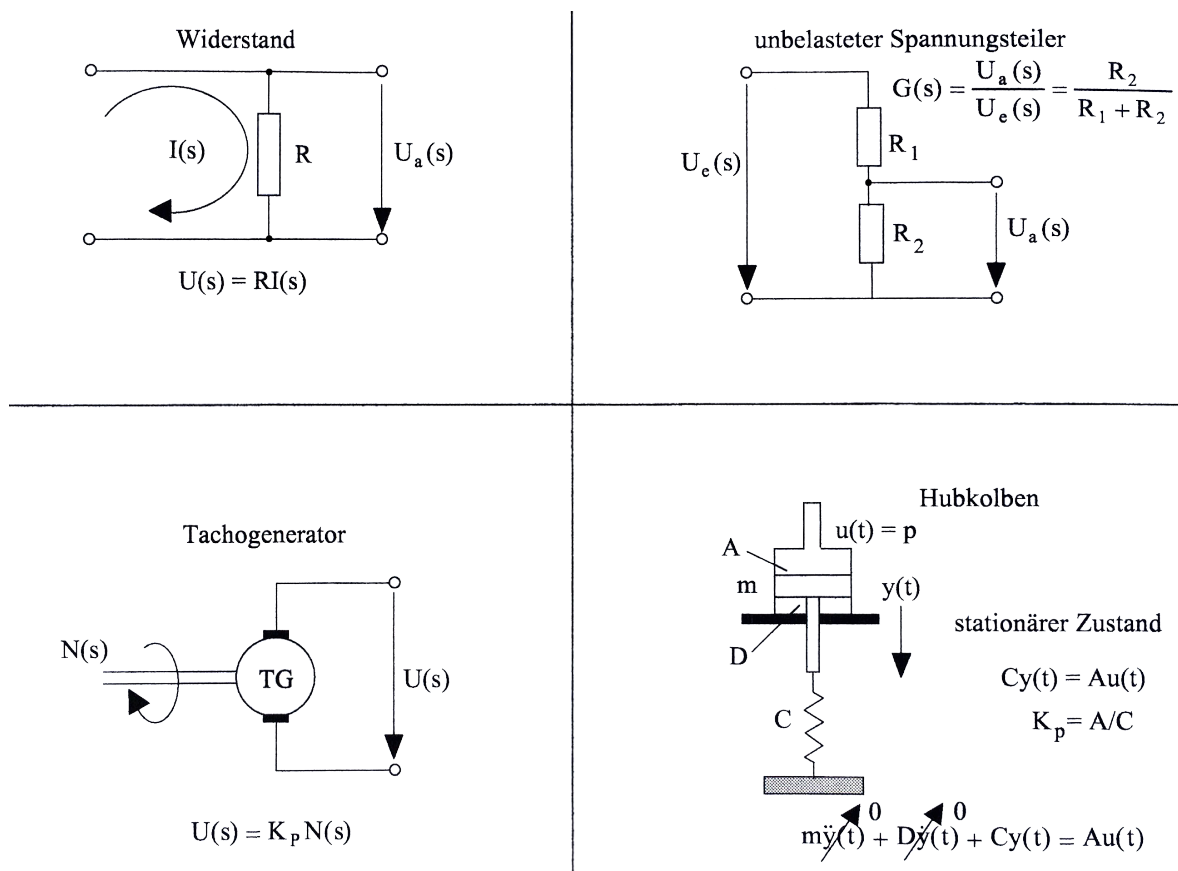


Bild 4.5: Beispiele für reale P-Strecken

4.3 T_0 -System (Totzeitsystem)

Gibt man auf den Eingang eines T_0 -Systems ein Eingangssignal $x_e(t)$, so erscheint am Ausgang das Eingangssignal, allerdings um die Totzeit T_0 verschoben. Ursache für das Auftreten einer Totzeit ist die endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit eines Signals zwischen Stell- und Messort bzw. zwischen Sende- und Empfangsort.

DGL: $x_a(t + T_0) = x_e(t)$

Übertragungskonstante: $K_S = 1$

Sprungantwort: $h(t) = \sigma(t - T_0)$

Übertragungsfunktion: $G_S(s) = e^{-sT_0}$

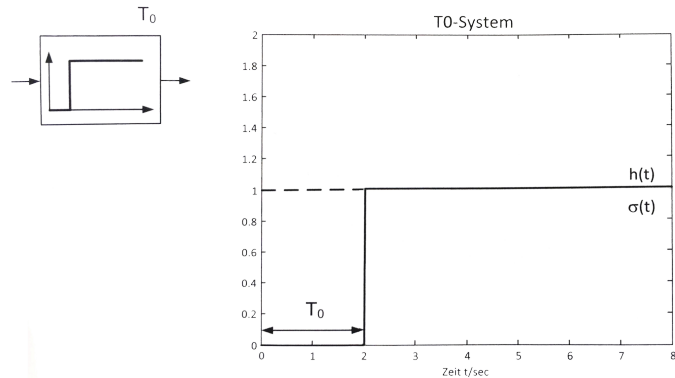
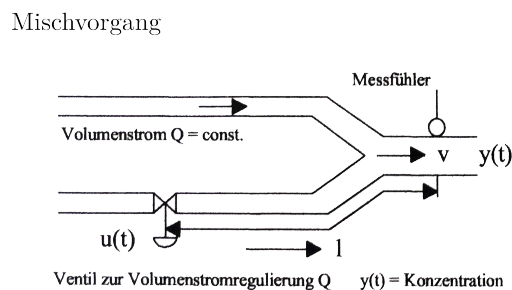
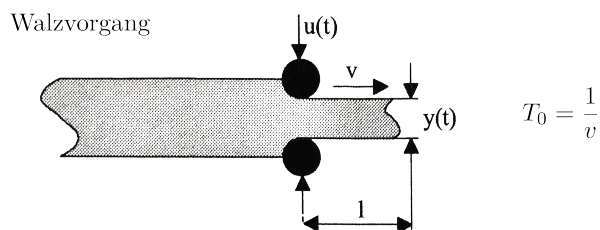


Bild 4.6: Das T_0 -System reagiert erst nach einer Laufzeit T_0 .

Beispiele:

Beispiele sind Förderbänder, laminare Strömungen in Röhren oder auch die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Schall oder Licht bei sehr großen Abständen.



Förderband

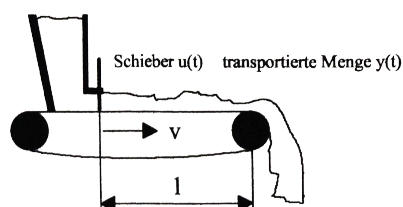


Bild 4.7: Beispiele für reale T_0 -Strecken

4.4 PT₁-System

PT₁-Systeme sind sehr verbreitete Dynamikmodelle. Sie beschreiben Ausgleichsvorgänge in der Mechanik, Wärmelehre und in der Elektrotechnik. Ein Energiespeicher ändert seinen Zustand so lange, bis die abgeführte Energie der zugeführten Energie entspricht

DGL: $T_1 \dot{x}_a(t) + x_a(t) = K_S x_e(t)$

Sprungantwort:

$$h(t) = K_S (1 - e^{-\frac{t}{T_1}}) \sigma(t)$$

Übertragungsfunktion: $G_S(s) = \frac{K_S}{T_1 s + 1}$

Pol: $s_1 = -\frac{1}{T_1}$

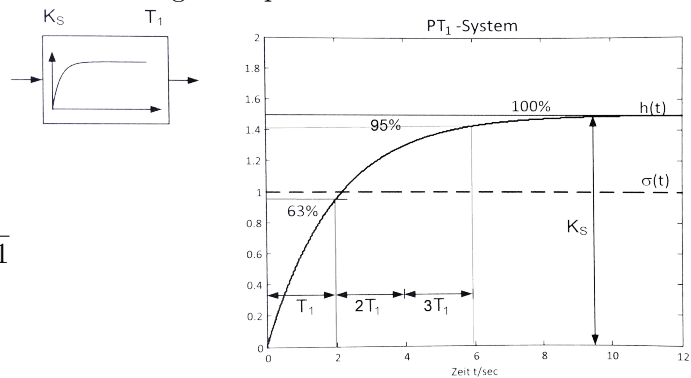


Bild 4.8: Das P-T1-System steigt verzögert auf den Endwert an

Die Übertragungskonstante K_S ist der Endwert der Übergangsfunktion (100%), die Zeitkonstante T_1 ist die Zeit, in der 63 Prozent des Endwertes erreicht sind.

Da bei realen Systemen eine Aufstellung der DGL meistens unmöglich ist (Innenleben der Strecke nicht zugänglich und zu komplex), ermittelt man experimentell z.B. die Sprungantwort und kann daraus T_1 und K_S direkt ablesen.

Beispiele:

Induktivität: $u = L \cdot \frac{di}{dt}$ Kapazität: $i = C \cdot \frac{du}{dt}$ Wärmespeicher: $Q = C_t \cdot \frac{d\Theta}{dt}$ Behälter: $q = A \cdot \frac{dh}{dt}$

In der Elektrotechnik findet man PT₁-Systeme oft bei (kapazitiven) Eingängen von Messinstrumenten oder bei einfachen Leiterbahnmodellen.

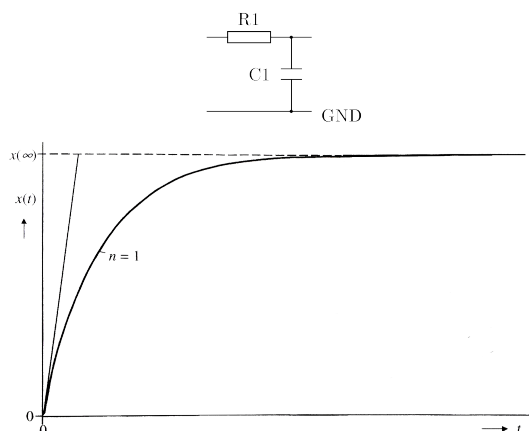


Bild 4.9: Simulation eines Leiterbahnabschnitts als PT₁-RC-Glied ($n=1$) modelliert. Antwort auf einen näherungsweisen Eingangssprung

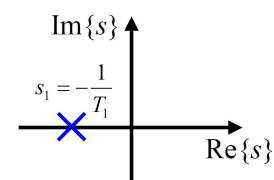
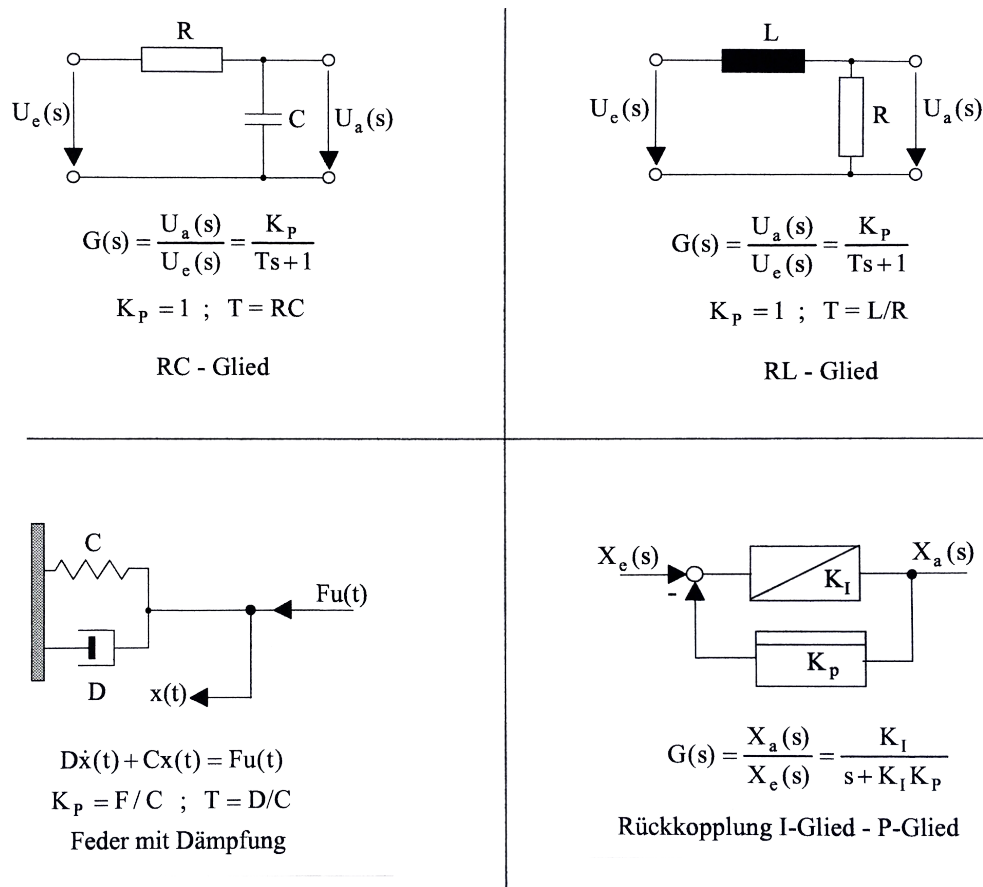


Bild 4.10: Lage des Pols in der komplexen Ebene

Bild 4.11: Beispiele für reale PT₁-Strecken

4.5 PT₂-System:

Prinzipiell kann man sich PT₂-Strecken als die Hintereinanderschaltung zweier PT₁-Strecken vorstellen.

Stellt man sich das PT₁-System als eine Anordnung mit einem Energiespeicher vor, so beinhaltet das PT₂-System zwei **miteinander gekoppelte** Energiespeicher und ist daher (bei unterschiedlichen Energiespeichern) auch schwingfähig.

Deshalb muss man das Verhalten des PT₂-Systems je nach Übertragungsbeiwerten unterscheiden. Zur Charakterisierung gibt es die Parameter Dämpfung D und Eckfrequenz ω_0 oder die Zeitkonstanten T_1 und T_2 .

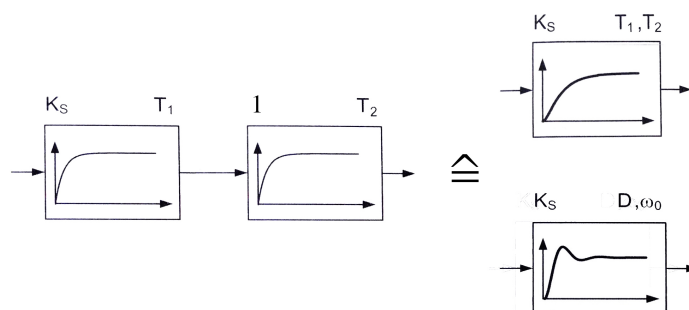


Bild 4.12: Zwei PT₁-Strecken hintereinandergeschaltet ergeben eine PT₂-Strecke mit Schwing- oder ohne Schwingverhalten

Für einen Dämpfungsgrad $0 < D < 1$ ist das System schwingungsfähig und wird oft auch zur Unterscheidung PT_1T_2 oder manchmal auch PS_2 oder PT_1T_2 oder $PT_{2_{kk}}$ (kk =konjugiert komplex) genannt.

In der Regelungstechnik ist ein schwaches Überschwingverhalten eines Regelkreises in der Größenordnung von ca. 10% des Sollwertes häufig erwünscht, weil die Regelgröße schneller den Sollwert erreicht.

Nicht schwingfähige P - T_2 -Systeme sind mit 2. Ordnung noch stärker verzögert als PT_1 -Systeme (Verzögerung 1. Ordnung).

Maßgeblich verantwortlich für das dynamische Verhalten sind immer die Pole (Nullstellen im Nenner) des Systems.

Es gilt für die DGL:

$$a_2\ddot{x}_a(t) + a_1\dot{x}_a(t) + a_0x_a(t) = b_0x_e(t)$$

Man schreibt diese Gleichung gewöhnlich in der Form:

$$\frac{a_2}{a_0}\ddot{x}_a(t) + \frac{a_1}{a_0}\dot{x}_a(t) + x_a(t) = \frac{b_0}{a_0}x_e(t)$$

und führt die folgenden Abkürzungen ein:

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{a_0}{a_2}} &= \omega_0, & \omega_0 &= \text{Kennkreisfrequenz} \\ \frac{a_1}{a_0} &= \frac{2D}{\omega_0}, & D &= \text{Dämpfungsgrad} \\ \frac{b_0}{a_0} &= K_S, & K_S &= \text{Übertragungsbeiwert}\end{aligned}$$

Laplace-Transformation der oben genannten Differentialgleichung:

$$G_S(s) = \frac{K_S}{\frac{1}{\omega_0^2}s^2 + (\frac{2D}{\omega_0})s + 1} \quad \text{bzw. mit } T = \frac{1}{\omega_0}$$

$$G_S(s) = \frac{K_S}{T^2s^2 + 2DTs + 1} = \frac{K_S}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)} = \frac{K_S}{T_1T_2s^2 + (T_1 + T_2)s + 1}$$

Die Polstellen werden zu Null wenn gilt:

$$\begin{aligned}s_{1,2} &= -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0} \\ s_{1,2} &= \omega_0 \left(-D \pm \sqrt{D^2 - 1} \right) \quad \text{und} \quad T_1T_2 = T^2 \quad \text{bzw.} \quad T_1 + T_2 = 2DT\end{aligned}$$

Es ergeben sich für das PT_2 -System folglich 5 prinzipiell verschiedene Polstellen-Fälle für D die im folgenden Diagramm im Überblick dargestellt sind.

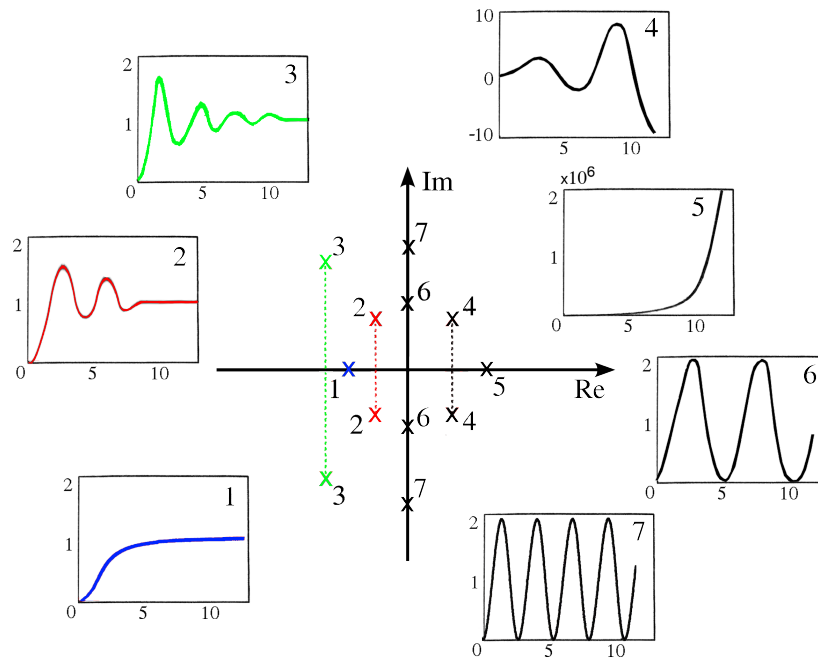


Bild 4.13: Sprungantworten eines Systems 2. Ordnung für verschiedenen Dämpfungen D

- | | |
|---|--|
| 1 - aperiodischer (Grenz-)Fall $D \geq 1$ | 4 - aufklingende Schwingung $-1 < D < 0$ |
| 2, 3 - gedämpfte Schwingung $0 < D < 1$ | 5 - ansteigend, instabil $D < -1$ |
| | 6, 7 - ungedämpfte Dauerschwingung $D = 0$ |

Beispiele:

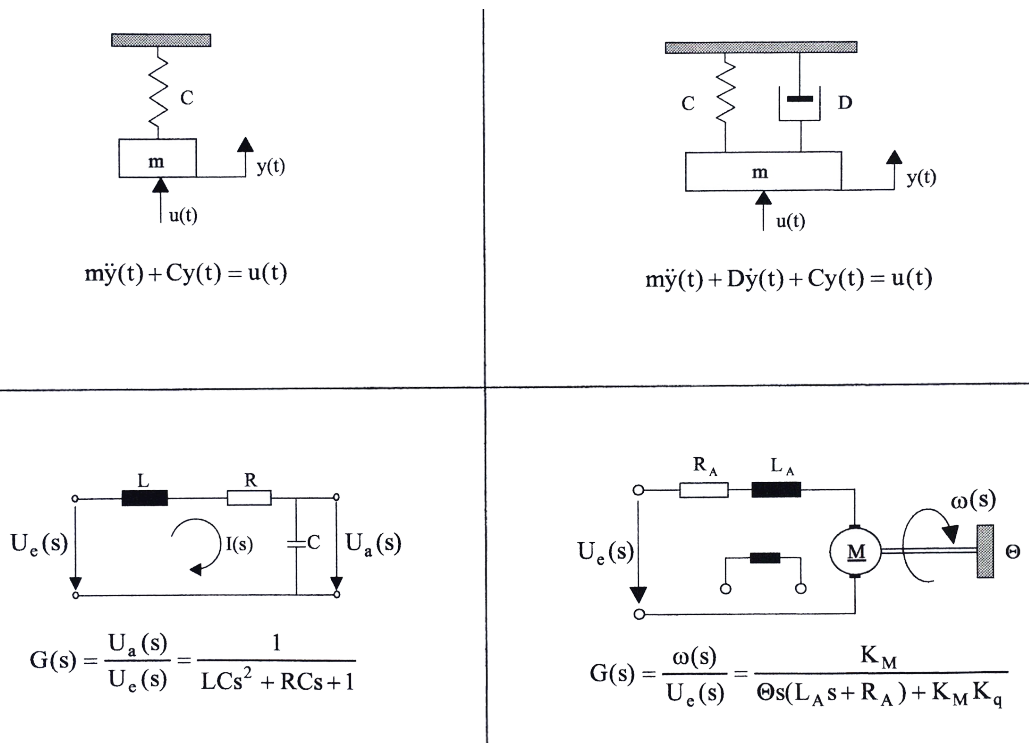
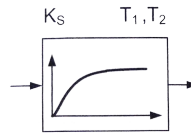


Bild 4.14: Beispiele für reale PT_2 -Strecken

4.5.1 PT₂-System: Nicht schwingfähig

DGL:

$$T_1 T_2 \ddot{x}_a(t) + (T_1 + T_2) \dot{x}_a(t) + x_a(t) = K_S x_e(t)$$



Sprungantwort ($T_1 \neq T_2$) $\rightarrow D > 1$:

$$h(t) = K_S \left(1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_1}} - \frac{T_2}{T_2 - T_1} e^{-\frac{t}{T_2}} \right) \sigma(t)$$

Übertragungsfunktion:

$$G_S(s) = \frac{K_S}{T_1 T_2 s^2 + (T_1 + T_2)s + 1}$$

$$G_S(s) = \frac{K_S}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$$

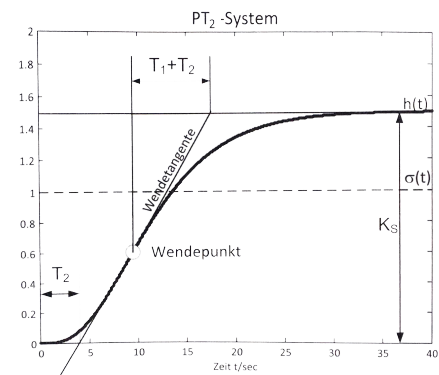


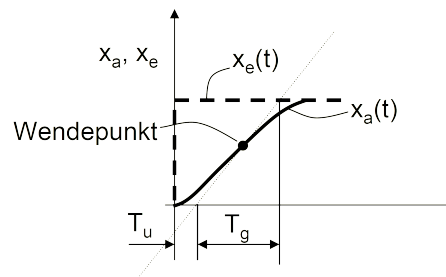
Bild 4.15: Das PT₂-System mit Dämpfung $D \geq 1$ steigt stärker verzögert an als das PT₁-System

Je größer die Zahl der (gleichartigen) Energiespeicher ist, desto höher werden die Verzögerungen. Man kann diese Systeme mit entsprechenden Zeitkonstanten näherungsweise auch mit einem PT₁-System beschreiben.

Kennzeichen für Systeme höherer Ordnung sind:

Verzugszeit T_u

Ausgleichszeit T_g



Verhältnis T_g/T_u

$$0 < \frac{T_g}{T_u} \leq 3$$

$$3 < \frac{T_g}{T_u} < 10$$

$$10 \leq \frac{T_g}{T_u}$$

Strecke ist ...

schwierig zu regeln,

noch regelbar,

gut zu regeln.

Beispiel:

Beispiele sind in der Elektrotechnik verteilte Leiterbahnmodelle auf Platinen oder in integrierten Schaltungen, bei denen die Flankensteilheit mit der Länge der Bahnen abnimmt. Die beteiligten Energiespeicher (hier Kapazitäten) sind die gleichen.

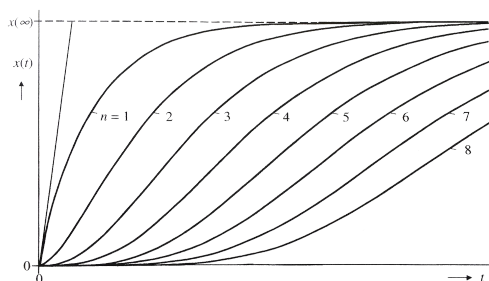
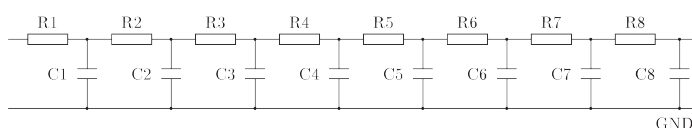


Bild 4.16: Leiterbahnabschnitte werden als verteilte RC-Glieder modelliert. Diese Unterteilung ermöglicht eine realistische Simulation des Signalverlaufs. Hier sind Sprungantworten für PT₁ bis PT₈-Systeme dargestellt

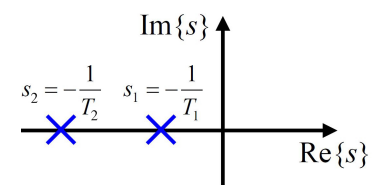


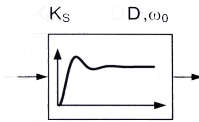
Bild 4.17: Lage der Pole in der komplexen Ebene

4.5.2 PT₁T₂-System: Schwingfähig

Beim PT₁T₂-System handelt es sich um ein PT₂-System mit Schwingverhalten das einen konjugiert komplexen Zweifachpol aufweist (auch PT_{2_{kk}} genannt).

DGL:

$$\frac{1}{\omega_0^2} \ddot{x}_a(t) + \frac{2D}{\omega_0} \dot{x}_a(t) + x_a(t) = K_S x_e(t)$$



Sprungantwort:

$$h(t) = K_S \left(1 - \frac{e^{-D\omega_0 t}}{\sqrt{1-D^2}} \sin(\omega_0 \sqrt{1-D^2} t + \arccos D) \right) \sigma(t)$$

Übertragungsfunktion:

$$G_S(s) = \frac{K_S}{\frac{1}{\omega_0^2} s^2 + \left(\frac{2D}{\omega_0}\right)s + 1}$$

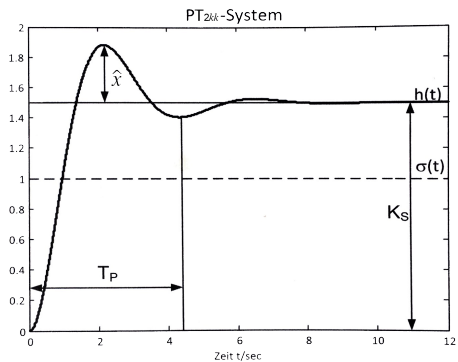


Bild 4.18: Das PT₁T₂-System schwingt gedämpft auf den Endwert zu

Die Übertragungskonstante K_S kann wie beim PT₂-System direkt abgelesen werden. Die Dämpfung D und die Eigenkreisfrequenz ω_0 kann man aus K_S , der Überschwingweite $\hat{x}$ und der Periodendauer T_P berechnen.

$$D = \sqrt{\frac{\lambda^2}{\lambda^2 + \pi^2}} \quad \text{mit} \quad \lambda = \ln\left(\frac{\hat{x}}{K_S}\right), \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_P \sqrt{1-D^2}}$$

Schwingungen treten hauptsächlich in mechanischen Regelstrecken auf, wenn Massen, Federn und Dämpfer beteiligt sind. Analog finden sich schwingende Systeme in der Elektrotechnik als Schwingkreis mit Kondensator, Spule und Widerstand.

Beispiel: Reihen-Schwingkreis mit Widerstand R als Dämpfung

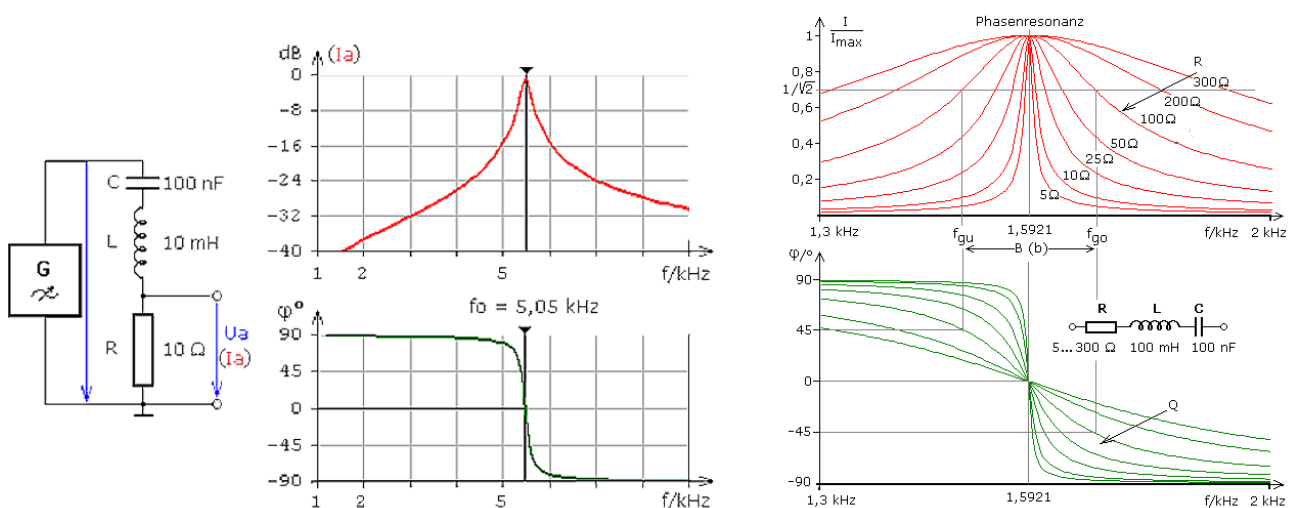


Bild 4.19: Bodediagramm links, bzw. Amplitude und Phase für ein weiteres Beispiel nichtlogarithmisch um $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$ aufgetragen für verschiedene Dämpfungen R

4.6 I-System

Das I-System verhält sich wie eine Integration und ein Beispiel für eine Regelstrecke ohne Ausgleich. Die Sprungantwort bedeutet z.B. dass die Zulaufmenge in einem Flüssigkeitsbehälter zum Füllstand integriert wird. In der Elektrotechnik wird der Strom, der in den Kondensator fließt integriert und ergibt die Ladung.

$$\text{DGL: } x_a(t) = K_I \int_0^t x_e(\tau) d\tau$$

$$\dot{x}_a(t) = K_I \cdot x_e(t)$$

$$\text{Integrationskonstante: } K_I = \frac{\Delta h}{\Delta t}$$

$$\text{Sprungantwort: } h(t) = K_I \cdot t \cdot \sigma(t)$$

$$\text{Übertragungsfunktion: } G_S(s) = \frac{K_I}{s}$$

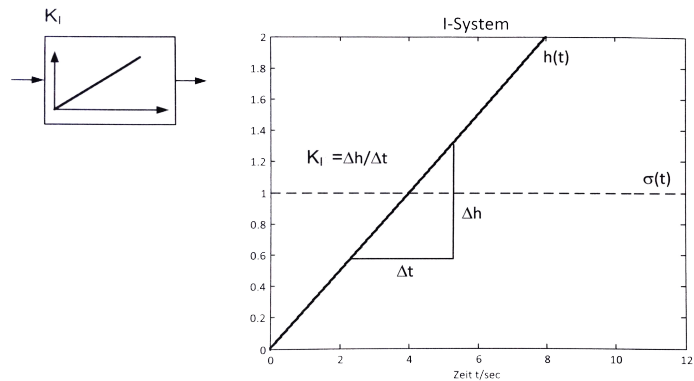


Bild 4.20: Das I-System läuft mit konstanter Steigung, proportional zur Eingangsgröße hoch

Beispiele:

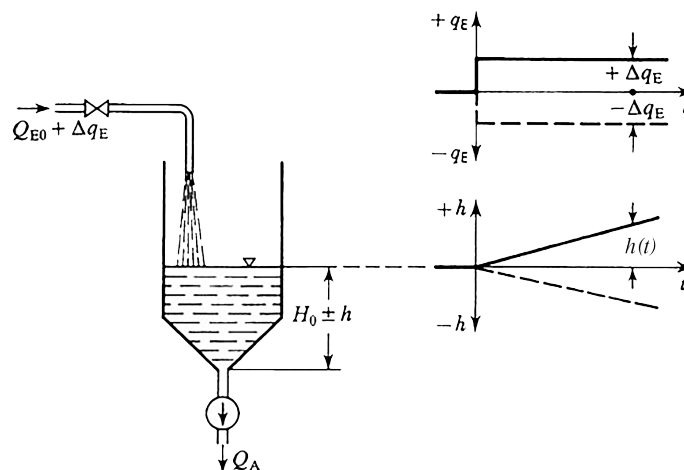


Bild 4.21: Flüssigkeitsstand in einem Behälter als Beispiel für ein integrierendes System. Sprungantwort des Wasserstandes mit H = Flüssigkeitsstand, $h(t)$ = Änderung des Flüssigkeitsstandes, Q_E = Zufluss, Q_A = Abfluss als Störgröße

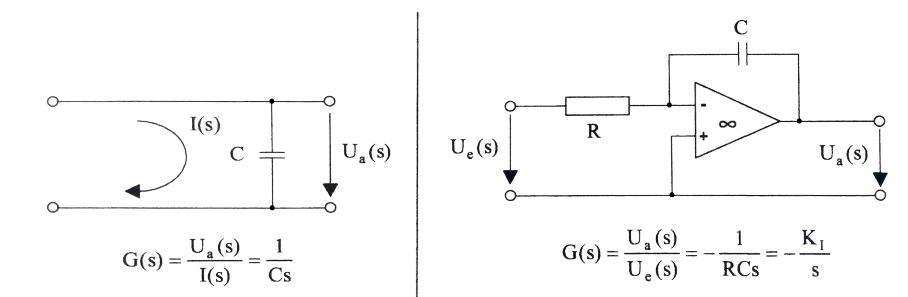


Bild 4.22: Beispiele für I-Systeme in der Elektrotechnik

4.7 IT₁-System

Das IT₁-System unterscheidet sich vom I-System nur dadurch, dass die Integration mit einer Verzögerung eintritt.

DGL:

$$T_1 \dot{x}_a(t) + x_a(t) = K_I \int_0^t x_e(\tau) d\tau$$

$$T_1 \ddot{x}_a(t) + \dot{x}_a(t) = K_I \cdot x_e(t)$$

Integrationskonstante: $K_I = \frac{\Delta h}{\Delta t}$

Sprungantwort: $h(t) = K_I \cdot \left(t - T_1(1 - e^{-\frac{t}{T_1}}) \right) \cdot \sigma(t)$

Übertragungsfunktion: $G_S(s) = \frac{K_I}{s(1 + T_1 s)}$

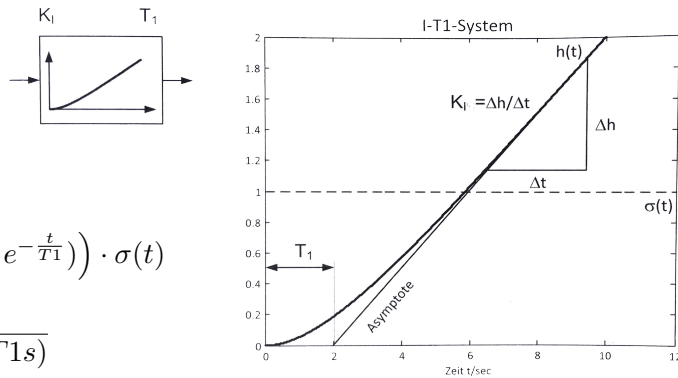


Bild 4.23: Das IT₁-System läuft verzögert auf die konstante Steigung zu

Die Integrationskonstante K_I ist die Steigung der Asymptote, angelegt an die Übergangsfunktion. Der Schnittpunkt der Asymptote mit der Zeitachse ergibt die Zeitkonstante T_1 der Verzögerung.

Beispiel wäre eine längere Zuleitung zu einem Flüssigkeitsbehälter, sodaß die Flüssigkeit erst verspätet im Behälter ankommt.

4.8 D-System

Das D-System ist ein Übertragungsglied in der Regelungstechnik, das ausschließlich in Verbindung mit anderen Regelgliedern eingesetzt wird. Die Ausgangsgröße des D-Gliedes reagiert auf die Änderungsgeschwindigkeit der Eingangsgröße.

Die Ausgangsgröße ist also proportional der zeitlichen Änderung der Eingangsgröße.

DGL:

$$x_a(t) = K_D \cdot \dot{x}_e(t)$$

Differenzierbeiwert: $K_D = \frac{\Delta x_e}{\Delta t}$

Sprungantwort: $h(t) = K_D \cdot \delta(t)$

Übertragungsfunktion: $G_S(s) = K_D \cdot s$

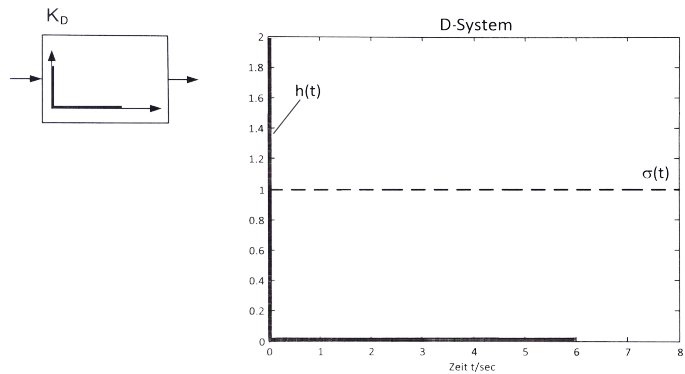


Bild 4.24: Das D-System springt mit einem Nadelimpuls nach oben

Bei einer konstanten Änderungsgeschwindigkeit des Eingangssignals ist das Ausgangssignal des D-Gliedes ebenfalls konstant. Ein sprungförmiger Anstieg am Eingang ruft am Ausgang einen Nadelimpuls hervor.

Technisch ist das D-System nicht realisierbar und es gilt deshalb für reale Systeme die Vereinfachung, dass die Sprungfunktion keinen Sprung, sondern einen kontinuierlichen, sehr steilen Übergang aufweist.

Beispiel:

Legt man an einen Kondensator plötzlich eine Spannung an, so würde ein unendlich hoher, unendlich kurzer Stromimpuls entstehen. Man ersieht schon aus diesem Beispiel, dass differenzierende Systeme nur näherungsweise zu realisieren sind; aufgrund des endlichen Innenwiderstandes der Spannungsquelle kann der Strom nur einen endlichen Wert annehmen. Der Kondensator würde also auch nicht plötzlich, sondern verzögert auf die entsprechende Spannung aufgeladen.

4.9 DT₁-System

Im Gegensatz zum reinen D-System, ist das differenzierende Verzögerungsglied 1. Ordnung technisch realisierbar und wird deshalb auch **reales D-System** genannt.

DGL:

$$T\dot{x}_a(t) + x_a(t) = K_D\dot{x}_e(t)$$

Differenzierbeiwert:

$$\text{Sprungantwort: } h(t) = \frac{K_D}{T} e^{-\frac{t}{T}}$$

$$\text{Übertragungsfunktion: } G_S(s) = \frac{K_D s}{Ts + 1}$$

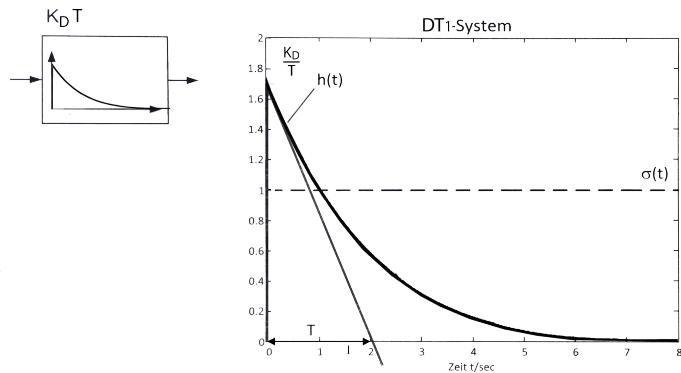


Bild 4.25: Verzögertes (reales) Differenzieren beim DT₁-Übertragungsglied

Beispiele:

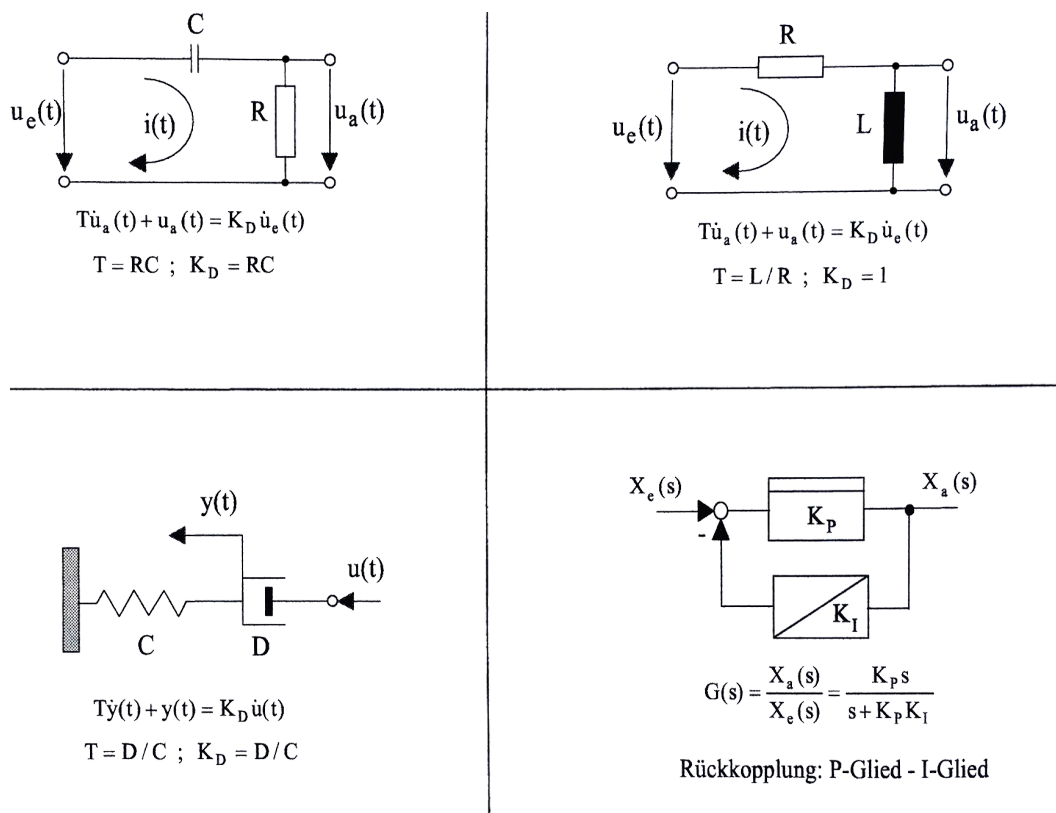
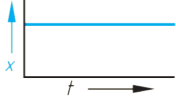
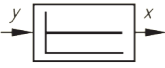
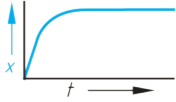
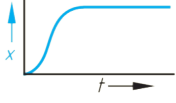
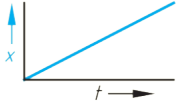
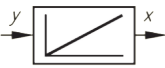
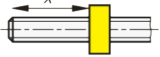
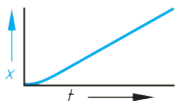


Bild 4.26: Beispiele für DT₁-Systeme.

4.10 Übersicht: Regelstrecken

Tabelle: Regelstrecken					
Bezeichnung der Regelstrecke	Beispiel		Sprungantwort	Schaltbild	Übertragungsbeiwert
	Regelstrecke	Regelgröße			
Regelstrecken mit Ausgleich	PT_0 Elektrischer Widerstand 	Spannung U			$K_S = \frac{\Delta x}{\Delta y}$
	PT_1 Druckluftkessel 	Druck P			$K_S = \frac{\Delta x}{\Delta y}$
	PT_n Heizung 	Temperatur ϑ			$K_S = \frac{\Delta x}{\Delta y}$
Regelstrecken ohne Ausgleich	IT_0 idealer Zufluss Behälter 	Füllstand h			$K_{IS} = \frac{\Delta x}{\Delta t \cdot \Delta y}$
	IT_n Trägheit beim Anlauf Spindel 	Lage x			$K_{IS} = \frac{\Delta x}{\Delta t \cdot \Delta y}$

KAPITEL 5

Regeleinrichtungen

Nachdem das dynamische Verhalten der Regelstrecke im Zeit- und Bildbereich beschrieben wurde, muss noch auf den zweiten Bestandteil eines Regelkreises, die Regeleinrichtung, eingegangen werden.

Auch hier erfolgt die Kennzeichnung des Übertragungsverhaltens durch die Differentialgleichung oder die Übertragungsfunktion bzw. den Frequenzgang.

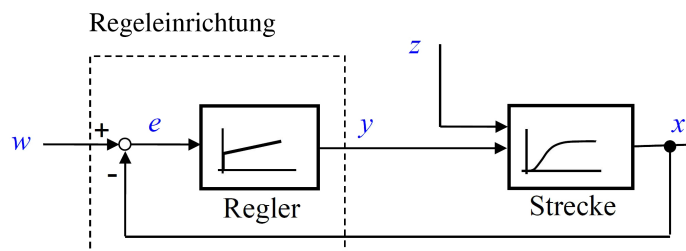


Bild 5.1: Der Regelkreis

Regler können auf unterschiedliche Weise realisiert werden. Neben mechanischen und analogen können auch elektrische und digitale Regler mit oder ohne Hilfsenergie zum Einsatz kommen.

Je nach der Art, wie die StellgröÙes des Reglers auf die Regeldifferenz reagiert unterscheidet man aber zwischen stetigen und unstetigen Reglern:

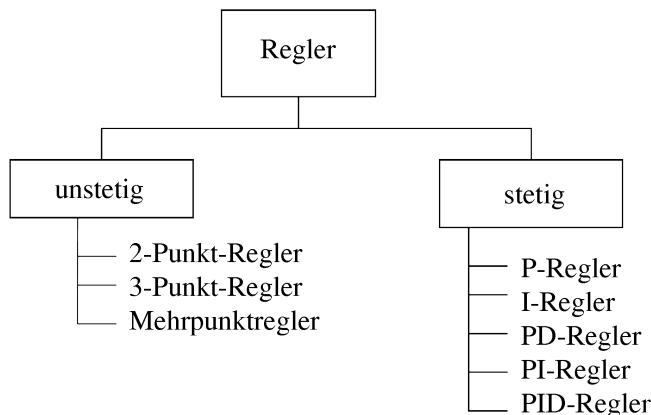


Bild 5.2: Man unterscheidet zwei Arten von Reglern, unstetige und stetige.

5.1 Unstetige Regler

Der **Zweipunktregler** wird aufgrund seiner einfachen Bauform sehr häufig verwendet und ist ein Vertreter der unstetigen Regler.

Beispiele sind:

- Regelung der Bügeleisentemperatur
- Regelung des Ölbrenners in einer Zentralheizung

Dabei kann der Zweipunktregler nur zwei Zustände annehmen ('Ein' oder 'Aus'). Je nachdem, ob die Regeldifferenz $e = (w - x)$ größer oder kleiner Null ist. Dies geschieht mit oder ohne **Hysterese**. Das System hat keine Ruhelage.

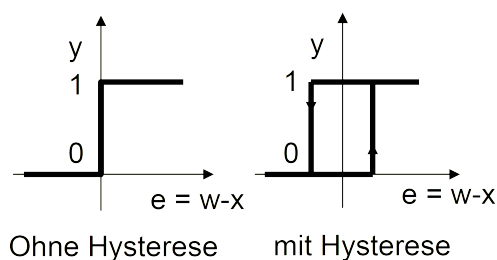


Bild 5.3: Kennlinie eines Zweipunktreglers

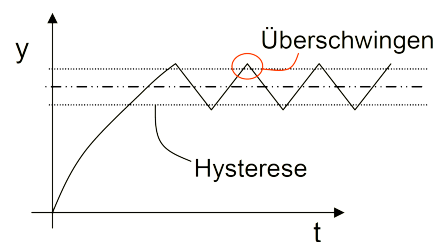


Bild 5.4: Verhalten mit 2-Punktregelung

5.2 Stetige Regler

Die in der Praxis verwendeten Regler entsprechen hauptsächlich den in Kapitel 4 bereits erläuterten Übertragungsgliedern oder Kombinationen aus ihnen. In den folgenden Kapiteln wird eine Zusammenstellung der wichtigsten Reglertypen gegeben.

Der Ausgangswert ändert sich sofort proportional mit der Regeldifferenz. Bei Strecken mit Ausgleich kann der P-Anteil die Regeldifferenz allerdings nicht vollständig zu null machen.

I-Regler: Die Regeldifferenz wird zu null, hat jedoch eine schlechtere Dynamik als der P-Regler.

D-Regler: Der Ausgangswert bestimmt sich nur durch die Änderungsgeschwindigkeit der Regelabweichung. Es wird in Zusammenspiel mit P- und I-Anteilen aber die Dynamik des Regelkreises erhöht.

Die wichtigsten Kombination von Regelglieder:

PI-Regler

PD-Regler

PID-Regler

5.2.1 P-Regler

Ein P-Regler ist ein Übertragungsglied in der Regelungstechnik, bei dem sich der Ausgangswert (Stellgröße $y(t)$) proportional zur Regeldifferenz $e(t)$ verändert.

Einer Änderung der Regelabweichung $e(t)$ folgt eine unmittelbare proportionale Änderung der Stellgröße $y(t)$. Die Stärke der Stellgrößenänderung beschreibt der Proportionalitätsbeiwert K_P bzw. K_R .

Bei auftretenden Regeldifferenzen kann eine Arbeitspunktveränderung um den Auslegungspunkt (Betriebspunkt) vorgenommen werden, die das gesamte System mit einem konstanten Korrekturfaktor y_0 beaufschlagt.

$$y(t) = K_P \cdot e(t) + y_0$$

$$G_R(s) = K_P = K_R$$

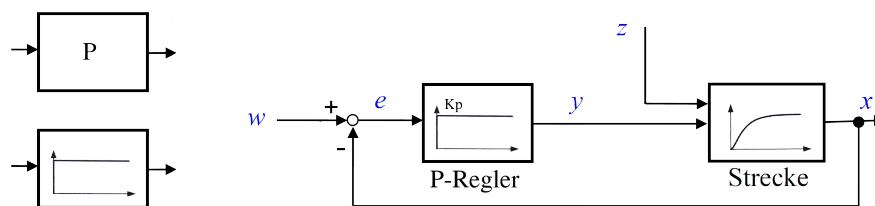


Bild 5.5: P-Regler

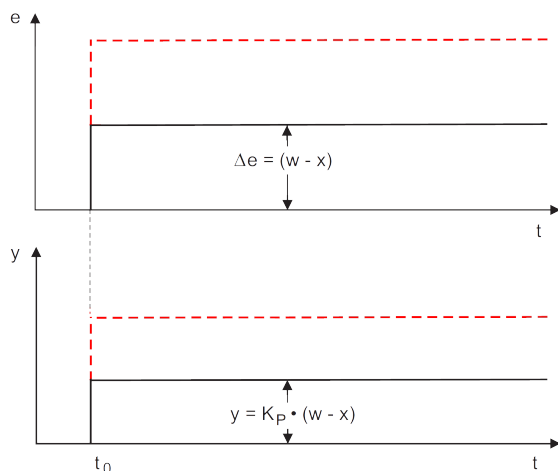


Bild 5.6: Sprungantworten P-Regler

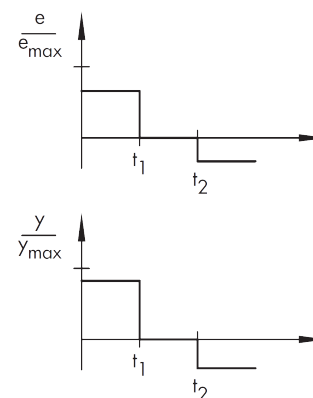


Bild 5.7: Dynamisches Verhalten des P-Reglers

Der P-Regler reagiert auf eine aufkommende Regelabweichung unmittelbar, kann jedoch nur mit seinem Proportionalitätsbeiwert arbeiten. Das schränkt seinen (alleinigen) Einsatz stark ein, da sich so teils recht hohe Regelabweichungen ergeben.

Die Regeldifferenz nimmt mit höherem Verstärkungsfaktor zwar zu, jedoch neigt der Regelkreis dann zu Schwingungen und kann dann zur Instabilität führen. Ein Hinzufügen eines I-Reglers ist dem Vergrößern der Verstärkung vorzuziehen.

- Vorteil:**
- reagiert unmittelbar
 - sehr robust bei richtig eingestelltem K_R

- Nachteil:**
- bleibende Regeldifferenz
 - bei großen Verstärkungen Schwingungsneigung

Beispiel: P-Regler mit PT₂-Strecke

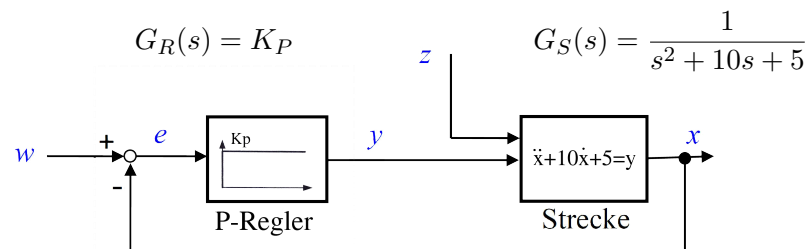


Bild 5.8: P-Regler mit PT₂-Strecke

P-Regler

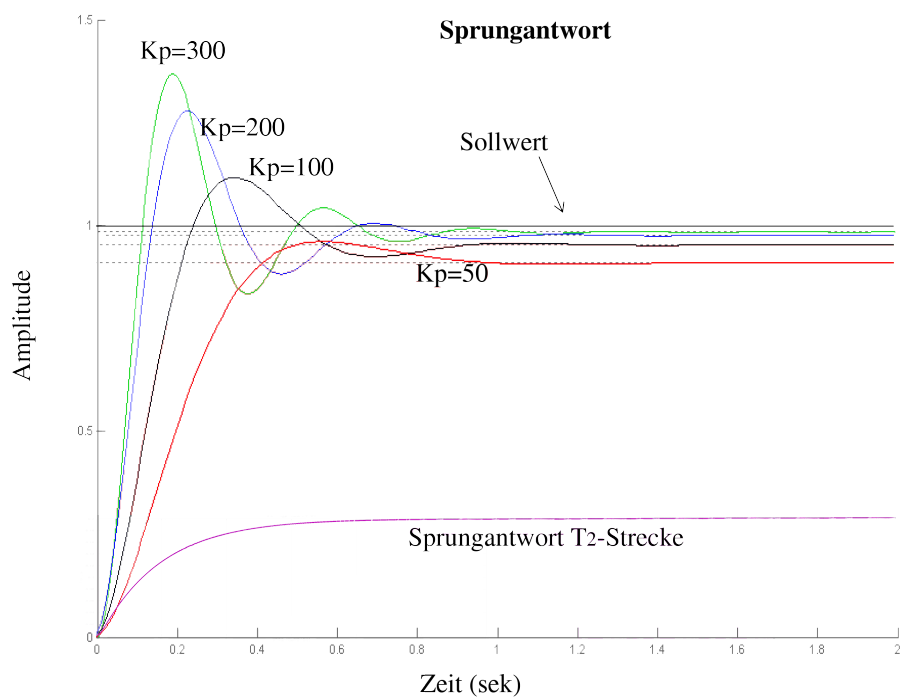
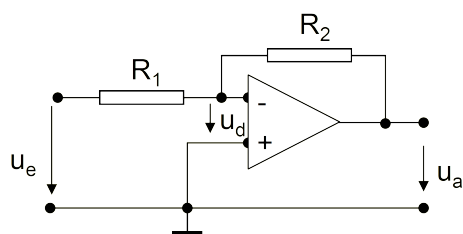


Bild 5.9: Beim P-Regler bleibt immer eine Regeldifferenz

Beispiel: Schaltungstechnische Realisierung:



Verstärkungsfaktor (Proportionalbeiwert)

$$\frac{U_a}{U_e} = -\frac{R_2}{R_1} = K_P$$

Bild 5.10: P-Regler: Rückgekoppelter Operationsverstärker

5.2.2 I-Regler

Beim I-Regler (integrierender Regler) ist die Stellgröße $y(t)$, abgesehen vom Anfangswert, **proportional** zum Zeitintegral der Regelabweichung $e(t)$:

Alle zurückliegenden Werte der Regelabweichung $e(t)$ werden integriert $\Rightarrow$ berücksichtigt die Vergangenheit.

$$y(t) = K_I \int_0^t e(\tau) d\tau$$

$$G_R(s) = \frac{K_I}{s} = \frac{1}{T_N \cdot s} \quad \text{mit } T_N = \frac{1}{K_I}$$

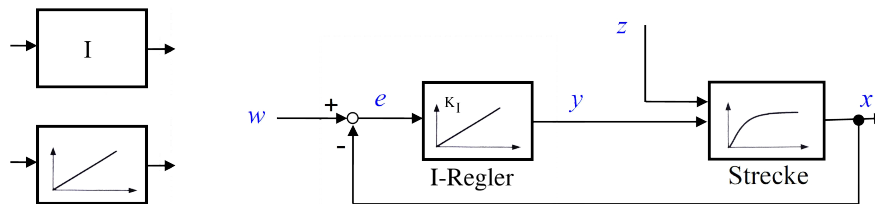


Bild 5.11: I-Regler

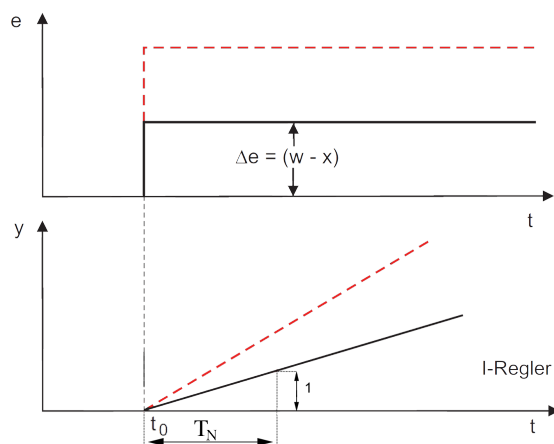


Bild 5.12: Sprungantworten I-Regler

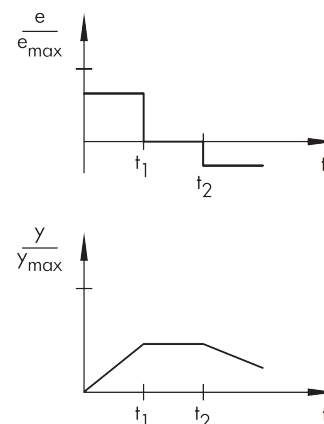


Bild 5.13: Dynamisches Verhalten des I-Reglers

Wie schnell die Stellgröße ansteigt (oder abfällt), hängt von der Regelabweichung und der Integrierzeit T_I ab (Kehrwert vom Integrierbeiwert).

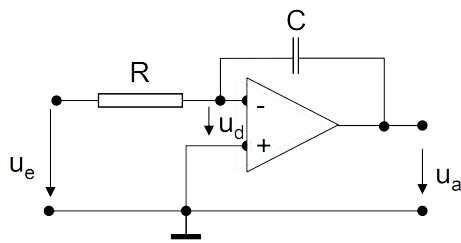
Bei einer kleinen Integrierzeit T_I steigt das Stellsignal schneller als bei einer großen Integrierzeit (kleiner Integrierbeiwert).

Merke: Die Integralwirkung des I-Reglers verringert sich bei steigender Integrierzeit T_I bzw. steigt mit dem Integrierbeiwert K_I .

Vorteil: - Keine Regeldifferenz

Nachteil: - greift langsamer als ein P-Regler

Beispiel: Schaltungstechnische Realisierung:



$$U_a = -\frac{1}{R \cdot C} \cdot \int_0^t U_e(t) dt + U_a(0)$$

$$\text{mit } \frac{1}{RC} = K_I$$

$$\text{bzw. } RC = T_I$$

Bild 5.14: I-Regler: Rückgekoppelter Operationsverstärker

Beispiel: I-Regler mit PT₂-Strecke

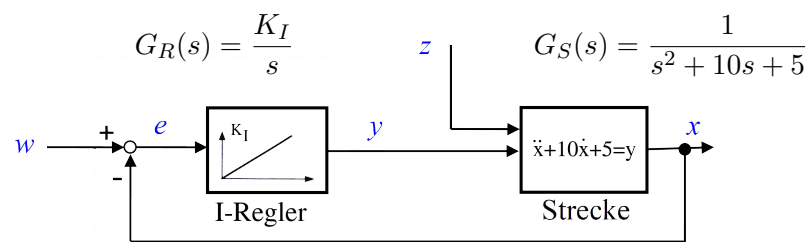


Bild 5.15: I-Regler mit PT₂-Strecke

I-Regler

Sprungantwort

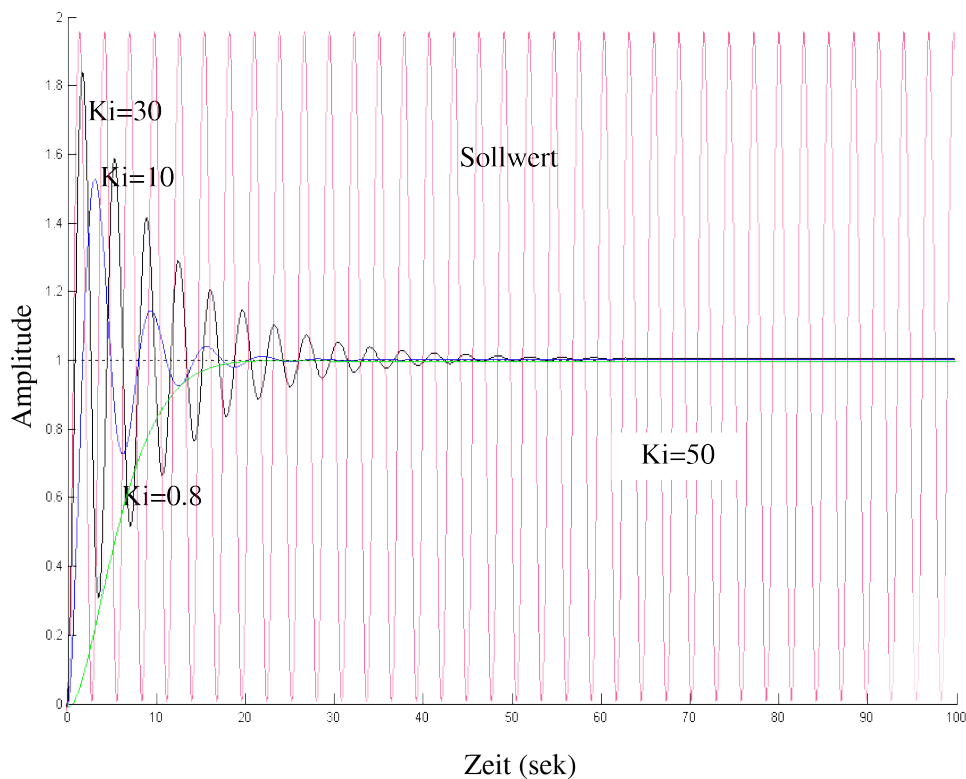


Bild 5.16: Sprungantwort der Strecke mit I-Regler: Keine bleibende Regeldifferenz, allerdings langsame Reaktion des Regelkreises. Dauer-Schwingung bei großen K_I -Werten

5.2.3 PI-Regler

Die Kombination eines I-Reglers mit einem P-Regler führt zum PI-Regler.

Der PI-Regler regelt PT_n -Strecken auf Grund des sofort wirkenden P-Gliedes wesentlich schneller als der I-Regler aus.

Er besitzt ungefähr ein maximales Überschwingen und eine Ausregelzeit wie der P-Regler und weist keine bleibenden Regelabweichungen auf.

$$y(t) = K_P \cdot e(t) + K_I \int_0^t e(\tau) d\tau$$

$$G_R(s) = K_P + \frac{K_I}{s} = \frac{K_P \cdot s + K_I}{s} = K_R \left(\frac{T_N s + 1}{T_N s} \right) \quad \text{mit } T_N = \frac{K_R}{K_I}$$

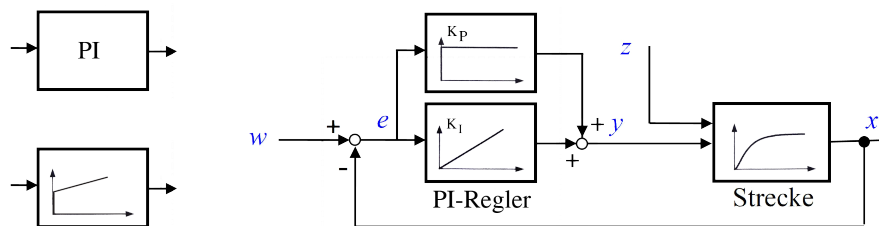


Bild 5.17: PI-Regler

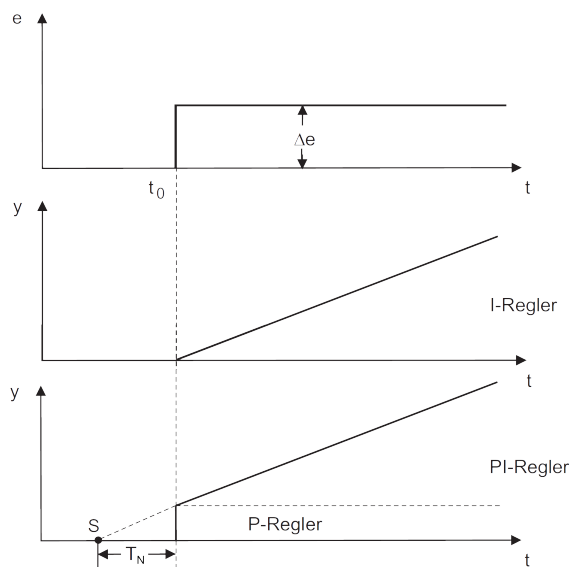


Bild 5.18: Sprungantworten PI-Regler

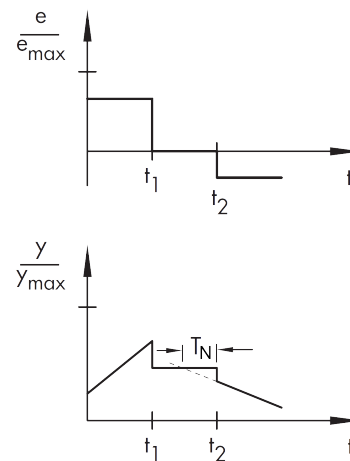


Bild 5.19: Dynamisches Verhalten des PI-Reglers

- Vorteil:**
- reagiert schneller als I-Regler
 - präziser als P-Regler (keine bleibende Regeldifferenz)
- Nachteil:**
- Einstellung von zwei Reglerparametern

Beispiel: PI-Regler mit PT₂-Strecke:

$$G_R(s) = K_P + \frac{K_I}{s} = \frac{K_P \cdot s + K_I}{s} \quad G_S(s) = \frac{1}{s^2 + 10s + 5}$$

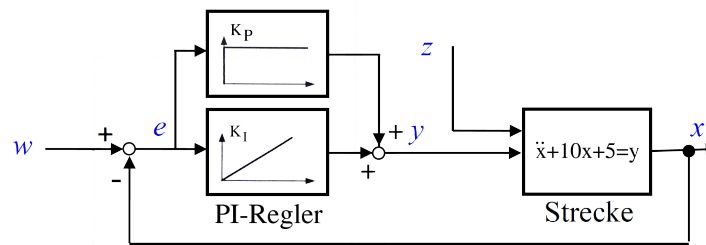


Bild 5.20: PI-Regler

PI-Regler

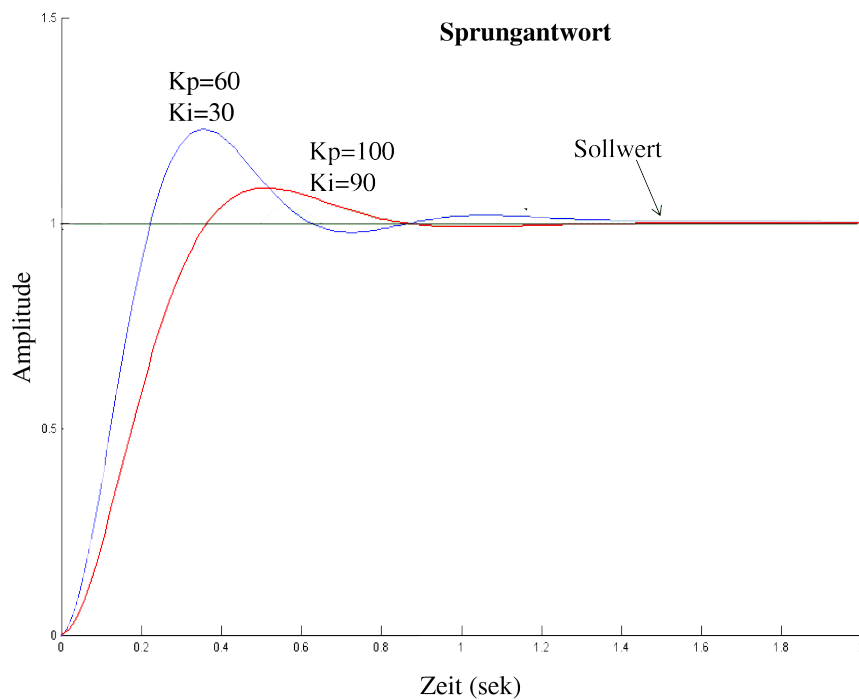


Bild 5.21: PI-Regler

Beispiel: PI-Regler mit PT₂-Strecke:

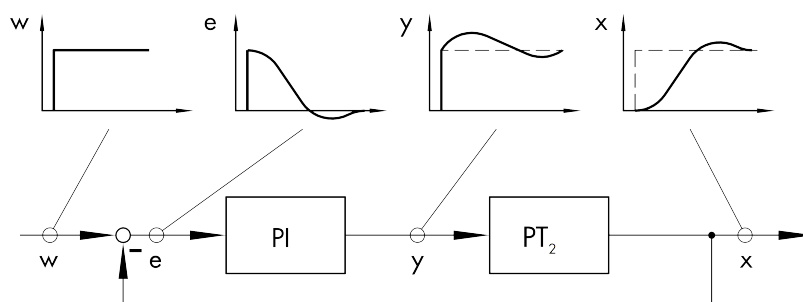


Bild 5.22: PI-Regler

5.2.4 D-Regler

Der D-Regler bildet seine Stellgröße aus der Änderungsgeschwindigkeit der Regeldifferenz und nicht - wie der P-Regler - aus deren Amplitude. Er reagiert deshalb noch wesentlich schneller als der P-Regler:

Selbst bei kleiner Regeldifferenz erzeugt er quasi **vorausschauend** große Stellamplituden, sobald eine Amplitudenänderung auftritt. Eine bleibende Regelabweichung erkennt der D-Regler hingegen nicht, denn, ganz unabhängig wie groß sie ist, ihre Änderungsgeschwindigkeit ist gleich null.

In der Praxis wird der D-Regler deshalb selten allein verwendet. Vielmehr kommt er zusammen mit anderen Regelementen, meistens in Verbindung mit einem Proportionalanteil, zum Einsatz. Der Regler ist in dieser Form gerätetechnisch auch nicht realisierbar, da die Verstärkung immer endlich ist.

$$y(t) = K_D \cdot \frac{de(t)}{dt}$$

$$G_R(s) = K_D \cdot s = T_V s \quad \text{mit } T_V = K_D$$

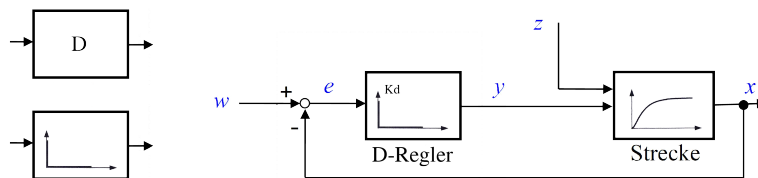


Bild 5.23: D-Regler

- Vorteil:**
- **greift sofort** ein beim Auftreten einer Regeldifferenz
 - Überspringen wird minimiert
- Nachteil:**
- reagiert nicht auf eine konstante Regeldifferenz
 - verstärkt (hochfrequentes) Messrauschen

Beispiel: D-Regler mit PT₂-Strecke

D-Regler

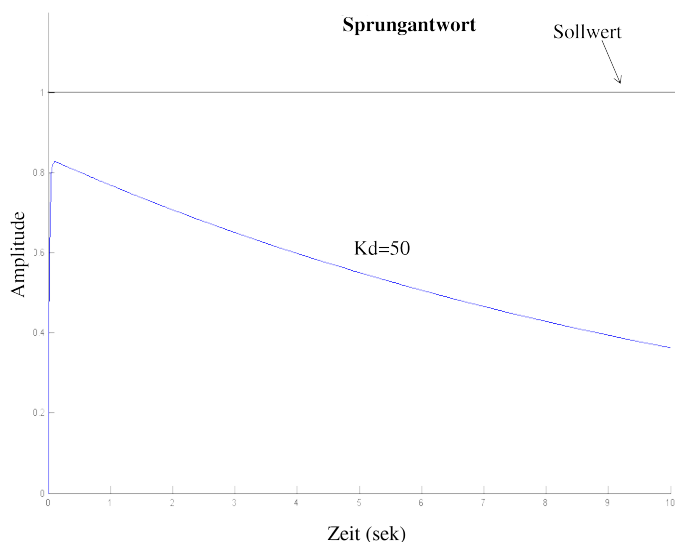


Bild 5.24: Sprungantwort D-Regler

5.2.5 PD-Regler

Die Parallelschaltung eines idealen D-Reglers und eines P-Reglers führt zum PD-Regler. Der Regler ist in dieser Form gerätetechnisch ebenfalls nicht realisierbar.

Es wird nicht nur die Regeldifferenz selbst, sondern auch die Änderung der Regeldifferenz zur Bildung der Stellgröße benutzt. Die Regeleinrichtung wirkt also bereits korrigierend, wenn die Regelgröße die Tendenz hat, von der Führungsgröße abzuweichen.

$$y(t) = K_P \cdot e(t) + K_D \cdot \frac{de(t)}{dt}$$

$$G_R(s) = K_P + K_D \cdot s = K_R T_V s \quad \text{mit } T_V = \frac{K_D}{K_R}$$

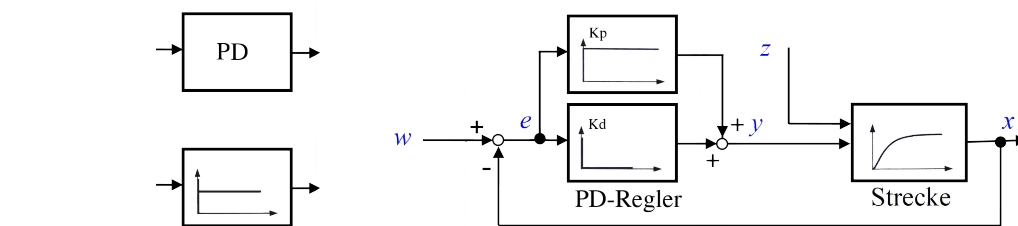


Bild 5.25: PD-Regler

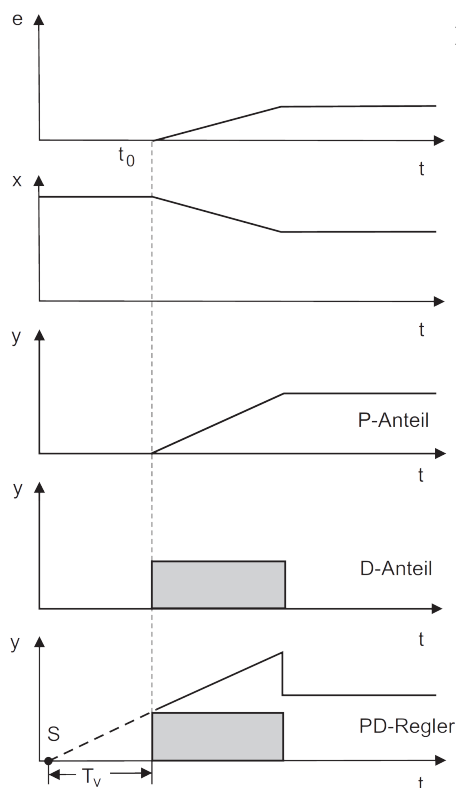


Bild 5.26: Rampenantwort PD-Regler

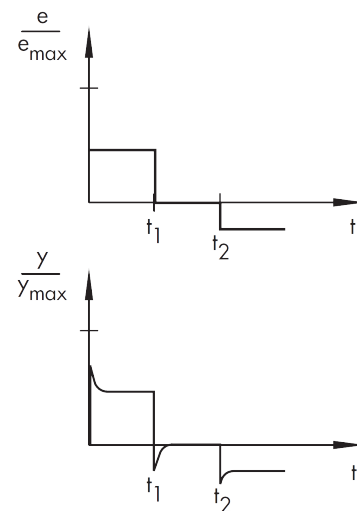
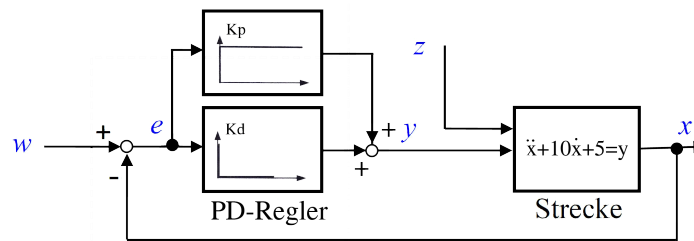


Bild 5.27: Sprungantwort PD-Regler

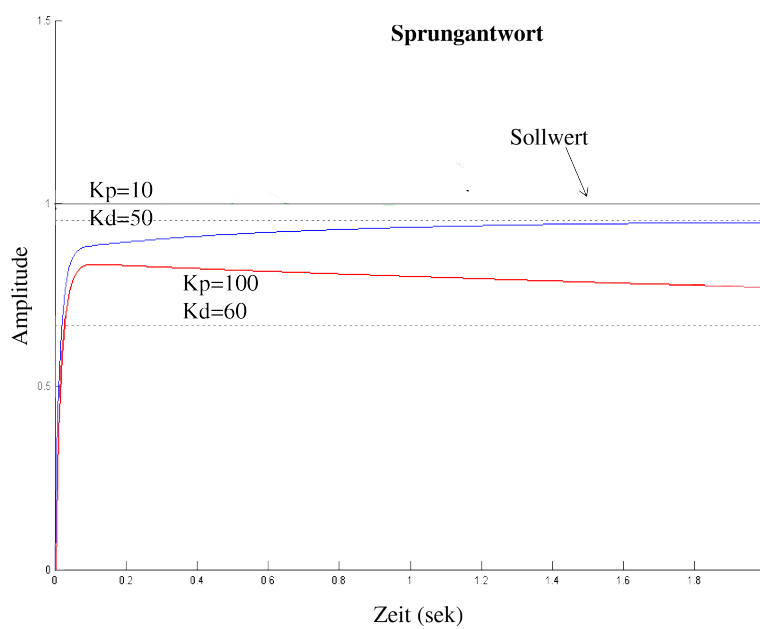
- Vorteil:**
- sehr schneller Regler
 - größere Regeldifferenz wird vermieden
- Nachteil:**
- bleibende Regeldifferenz tritt auf

Beispiel: PD-Regler und PT₂-Strecke

$$G_R(s) = K_P + K_D \cdot s$$

**Bild 5.28:** PD-Regler

PD-Regler

**Bild 5.29:** Sprungantwort PD-Regler und PT₂-Strecke mit unterschiedlichen Werten für K_P und K_D

5.2.6 Idealer PID-Regler

In der Industrie werden **Standardregler** eingesetzt, deren Übertragungsfunktionen proportionales oder integrales Übertragungsverhalten aufweisen, oder die eine Parallelschaltung von P-, I- und D-Gliedern enthalten.

Die allgemeinste Form dieses Standardreglers ist der **PID-Regler** und vereint die Verhaltensweisen der P-, I-, und D-Regler.

$$y(t) = K_P \cdot e(t) + K_I \int_0^t e(\tau) d\tau + K_D \cdot \frac{de(t)}{dt}$$

$$G_R(s) = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D \cdot s = K_R \left(1 + \frac{1}{T_N s} + T_V \cdot s \right) \quad \text{mit } T_N = \frac{K_R}{K_I}$$

$$\text{und } T_V = \frac{K_D}{K_R}$$

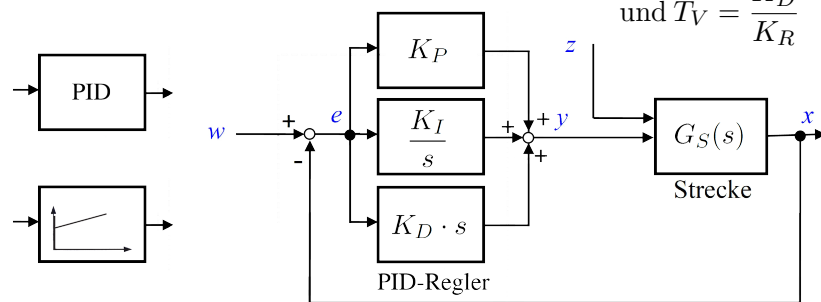


Bild 5.30: PID-Regler

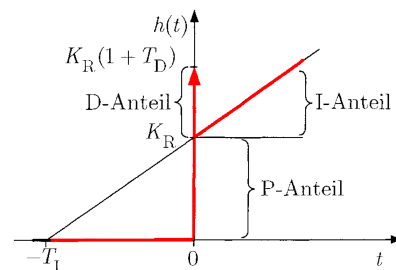
Die drei Größen K_R (oft auch als K_P bezeichnet), T_N und T_V werden als **Einstellwerte** des Reglers bezeichnet.

Es gilt für die Größen:

$$K_R = K_P \quad \text{Verstärkungsfaktor}$$

$$T_I = \frac{K_R}{K_I} = \frac{T_N}{K_R} \quad \text{Nachstellzeit oder Integralzeit}$$

$$T_D = \frac{K_D}{K_R} = T_V K_R \quad \text{Vorhaltezeit oder Differentialzeit}$$



Die Nachstellzeit T_N ist die Zeit, bei der der I-Anteil der Stellgröße gleich dem P-Anteil ist.

Die Vorhaltezeit T_V ist die Zeit, die bei der Anstiegsantwort vergeht, bis der P-Anteil die gleiche Wirkung wie der D-Anteil hat.

Typ	Parameter im komb. Regler	Parameter im Basisregler
PI	Proportionalbeiwert K_R Nachstellzeit T_N	Identisch zu K_R $T_I = T_N / K_R$
PD	Proportionalbeiwert K_R Vorhaltezeit T_V	Identisch zu K_R $T_D = T_V \cdot K_R$
PID	Proportionalbeiwert K_R Nachstellzeit T_N Vorhaltezeit T_V	Identisch zu K_R $T_I = T_N / K_R$ $T_D = T_V \cdot K_R$

Bild 5.31: Zeitkonstanten-Konvention der kombinierten- und der Basisregler

5.2.7 Realer PID-Regler (PIDT₁-Regler)

Der reale PID-Regler vereint die Verhaltensweisen der P- und I-Gliedes, sowie eines DT₁-Gliedes als D-Anteil.

$$G_R(s) = K_P + \frac{K_I}{s} + \frac{K_D s}{T_V s + 1} = K_R \left(1 + \frac{1}{T_N s} + T_V s \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{N} T_V s} \right) \right) \quad \text{mit } N = 5 \dots 20$$

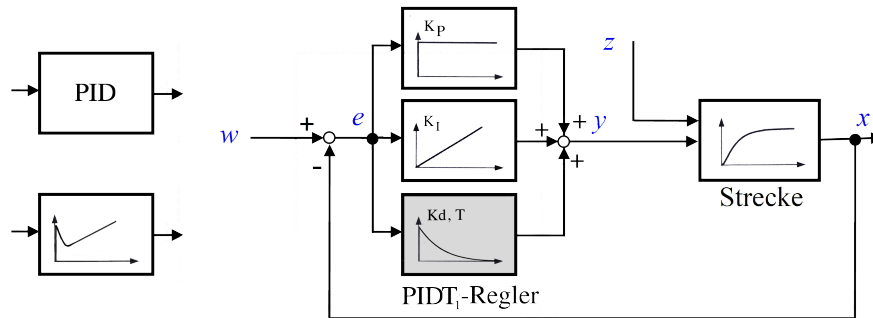


Bild 5.32: PID-Regler

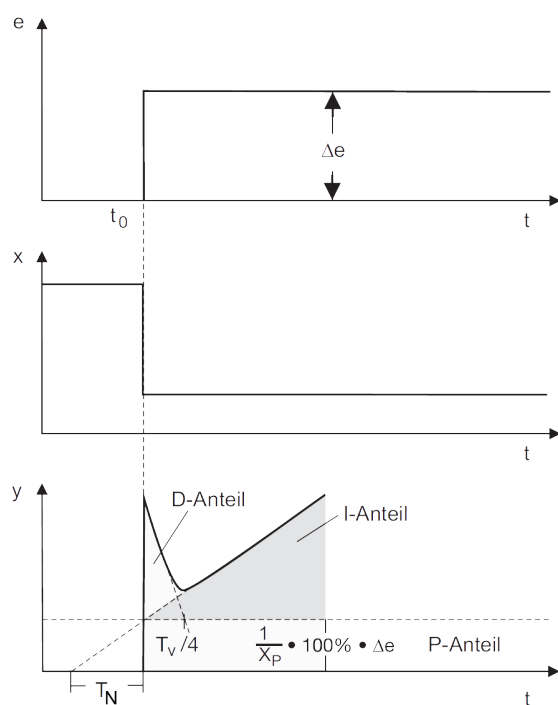


Bild 5.33: Sprungantwort PID-Regler

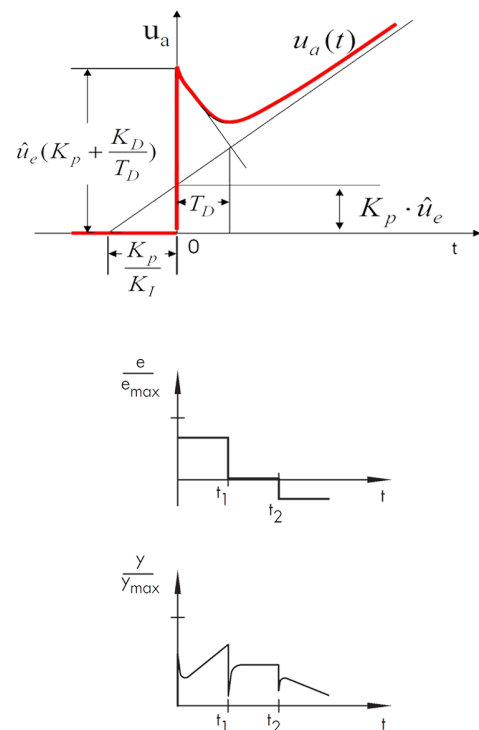


Bild 5.34: Sprungantwort PID-Regler

- Vorteil:**
- sehr schneller Regler
 - lässt keine bleibende Regeldifferenz zu
 - erlaubt keine großen Regelabweichungen

Nachteil: - Einstellung eines PID-Reglers erfordert einen großen Zeitaufwand

Beispiel: PID-Regler und PT_2 -Strecke

PID-Regler

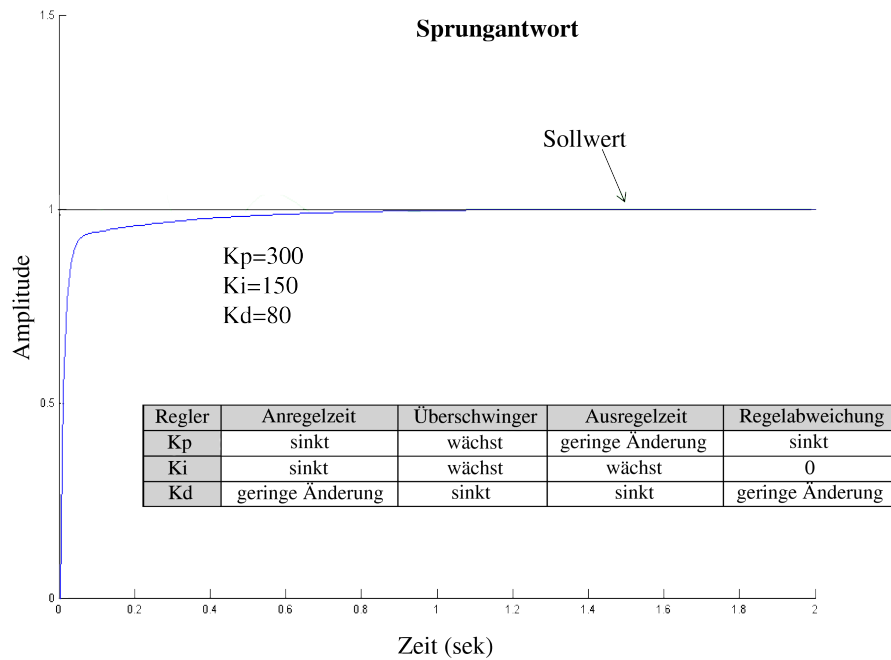


Bild 5.35: PID-Regler

Beispiel: PID-Regler für verschiedene N

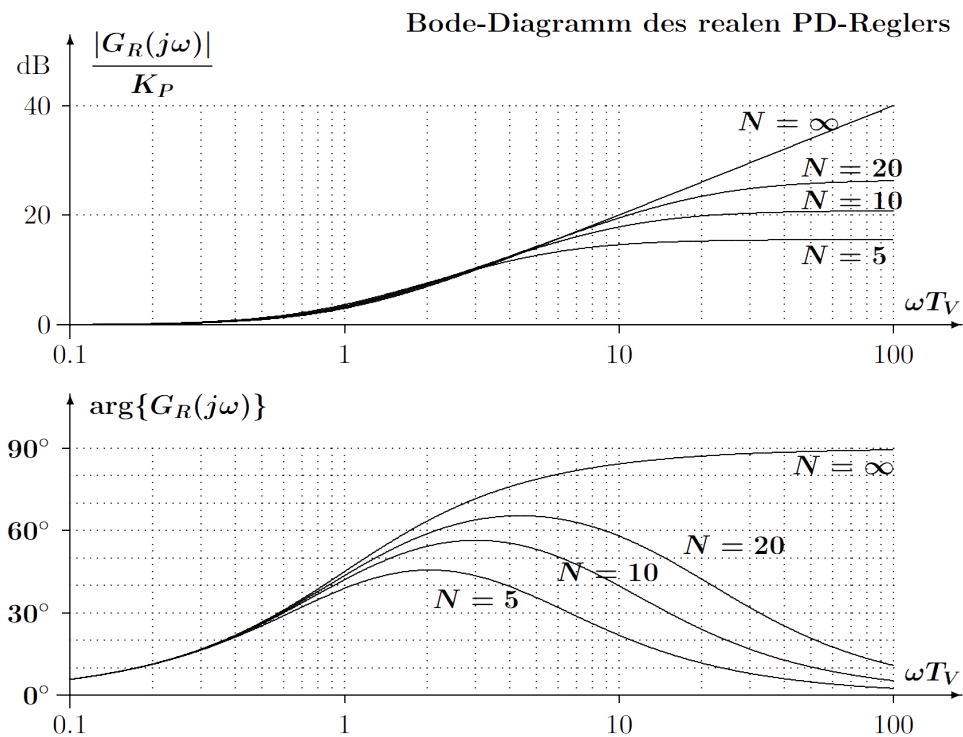


Bild 5.36: PID-Regler

Beispiel:

Im folgenden ist eine Drehzahlregelung einer Gleichstrommaschine mit dem dazugehörigen Blockschaltbild dargestellt.

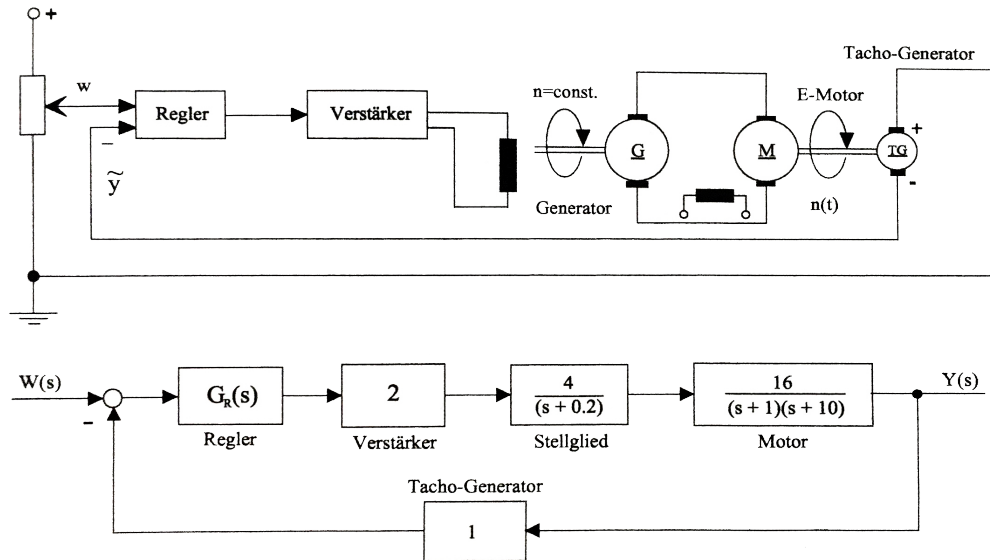


Bild 5.37: Beispiel: Drehzahlregelung einer Gleichstrommaschine

Der feldgeregelte Generator wird durch einen Synchronmotor mit konstanter Drehzahl angetrieben. Der Generator erzeugt eine Spannung, die zum Betrieb der Gleichstrommaschine benötigt wird.

Über einen Tachogenerator wird die Istdrehzahl erfasst, mit der Solldrehzahl verglichen und die Regeldifferenz gebildet. Die Drehzahlregelung der Gleichstrommaschine erfolgt über das Erregerfeld des Generators, das beim Auftreten einer Regeldifferenz über den Verstärker und das Stellglied entsprechend geändert wird.

Das Führungsverhalten des Kreises wird für die Reglertypen (P-, I-, PI- und PID-Regler) untersucht.

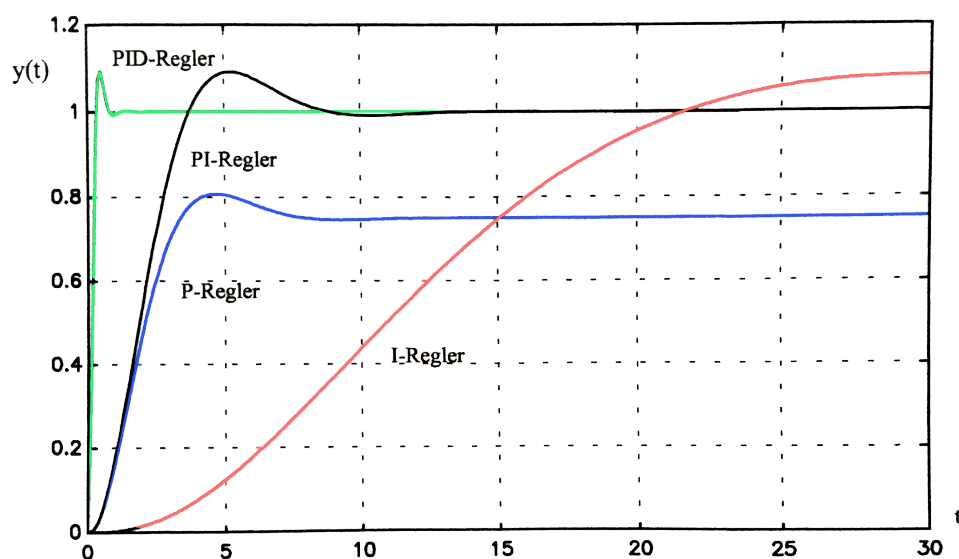


Bild 5.38: Sprungantworten der Drehzahlregelung für unterschiedliche Reglertypen

5.3 Realisierung in analoger Schaltungstechnik

Durch Beschalten eines **Operationsverstärkers** mit ohmschen und kapazitiven Widerständen lassen sich Regler-Übertragungsfunktionen aufbauen. Die Übertragungsfunktion eines invertierenden Operationsverstärkers ist:

$$G(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = -\frac{Z_2}{Z_1} \quad (5.1)$$

mit der Eingangsimpedanz Z_1 und der Rückführimpedanz Z_2 . Zum Herleiten der Beziehung für die Übertragungsfunktion des OP-Verstärkers wird angenommen, dass der Verstärkungsfaktor $V_0 \rightarrow \infty$ geht (real $V_0 > 10^6$). Unter dieser Voraussetzung sind dann der Strom I_0 und die Differenzspannung U_0 gleich Null.

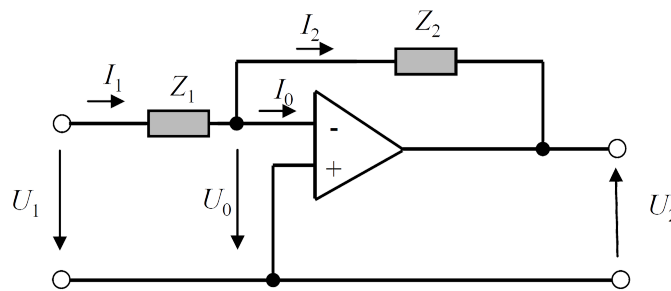


Bild 5.39: Invertierender Operationsverstärker (automatische Gegenkopplung)

Bezeichnung	$G(s)$	Z_1	Z_2
P-Glied	$\frac{R_2}{R_1} = K_P$		
PT ₁ -Glied	$\frac{R_2}{R_1} \frac{1}{R_2 C_2 s + 1} = K_P \frac{1}{T_1 s + 1}$		
I-Glied	$\frac{1}{RC s} = \frac{K_I}{s}$		
PI-Glied	$\frac{R_2}{R_1} \frac{R_2 C s + 1}{R_2 C s} = K_P \frac{T_n s + 1}{T_n s}$		
PD-T ₁ -Glied Lag/Lead (realer PD)	$\frac{R_2}{R_1} \frac{(R_1 + R_3) C s + 1}{R_3 C s + 1} = K_P \frac{T_v s + 1}{T_1 s + 1}$		
PID-T ₁ -Glied (realer PID in Produktform)	$\frac{R_2}{R_1} \frac{(R_1 + R_3) C_1 s + 1}{R_3 C_1 s + 1} \frac{(R_2 C_2 s + 1)}{R_2 C_2 s} = K_{Pn} \frac{(T_{vn} s + 1)(T_{nt} s + 1)}{(T_1 s + 1) T_{nt} s}$		

Bild 5.40: Beschaltungsmöglichkeiten eines Operationsverstärkers und zugehörige Übertragungsfunktionen

Beispiel: Summierer

Durch die folgende Beschaltung eines OP-Verstärkers erhält man einen Summierer, der auch zum Bilden der Regelabweichung $e(t)$, d.h. als Soll- Istwert-Vergleicher benutzt werden kann.

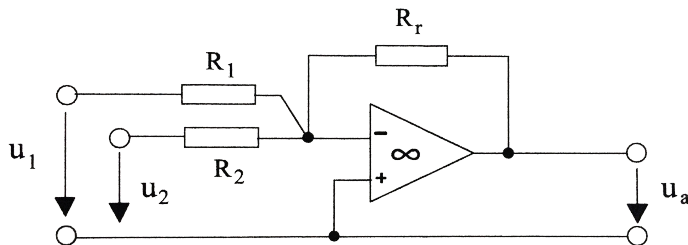


Bild 5.41: Summierer

$$U_a(s) = - \left(\frac{R_r}{R_1} U_1(s) \pm \frac{R_r}{R_2} U_2(s) \pm \dots \right) \quad (5.2)$$

Zum Bilden der Regeldifferenz schaltet man einen Summierer vor den entsprechenden Regler.

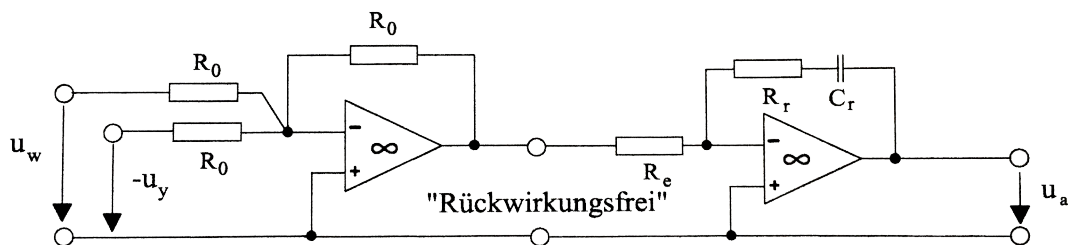


Bild 5.42: Serienschaltung von Summierer und Regler

5.4 Auswahl von stetigen Reglern

Zur Lösung einer Regelaufgabe gehört die Analyse der Regelstrecke und die passende Auswahl eines Reglers. Die wichtigsten Merkmale sind:

Regler	Stell- geschwindigkeit	Regel- abweichung	Arbeitspunkt- einstellung
P-Regler	hoch	ja	notwendig
I-Regler	niedrig	nein	entfällt
PD-Regler	sehr hoch	ja	notwendig
PI-Regler	hoch	nein	entfällt
PID-Regler	sehr hoch	nein	entfällt

Übersicht welche Regler für welche Strecken geeignet sind:

Strecke	P-Regler	I-Regler	PI-Regler	PD-Regler	PID-Regler
P	-	+	+	-	-
PT ₁	+	+	+	+	+
PT _n	+	+	+	+	+
PT ₀	-	+	-	-	-
I	+	-	+	+	+
IT ₁	+	-	+	+	+
I ₂	-	-	-	+	+
IT ₀	+	-	+	-	-

5.5 Digitale Regler

Bisher wurden hier nur analoge Regler betrachtet. Der Einsatz von Computern bietet eine extrem günstige und flexible Variante von Reglern. So können z.B. mehrere Regelkreise mit nur einem einzigen Rechner geregelt werden.

Die Regler können viel genauer der Regelstrecke angepasst werden. Um die Daten verarbeiten zu können ist allerdings die Wandlung der Analogdaten in Digitaldaten und umgekehrt notwendig.

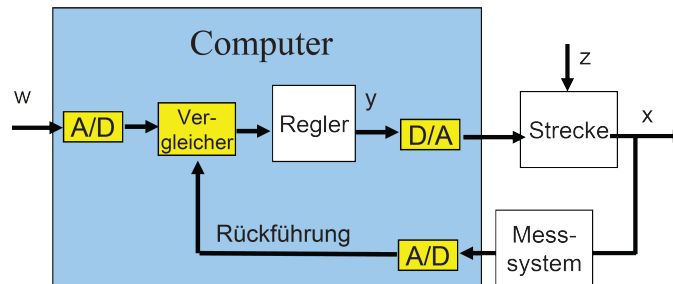


Bild 5.43: Digitaler Regler

Bei der Auswahl eines Computers zur Regelung eines Regelkreises sind allerdings folgende Aspekte unbedingt zu beachten, da sie die Güte der Regelung beeinflussen:

- 1. Auflösung des AD/DA-Wandlers:** Sie gibt an, wie fein der stetige analoge Wertebereich in Digitalschritten gerastert wird. Übliche Werte liegen bei 12 bzw. 16 Bit.
- 2. Abtastrate vom Wandler:** Sie gibt die Frequenz an, mit der die Daten gemessen und gewandelt werden. Schnelle Veränderung der Messwerte müssen erkannt werden (Totzeit).
- 3. Zykluszeit des Rechners:** Jeder Digitalrechner arbeitet in Taktzyklen. Die Taktrate des Rechners bzw. Programms muss so hoch sein, dass in der Zwischenzeit keine signifikanten Änderungen in der Strecke passieren. SPS und übliche PCs haben Taktzeiten im ms-Bereich! Besser sind spezielle Regelkarten.

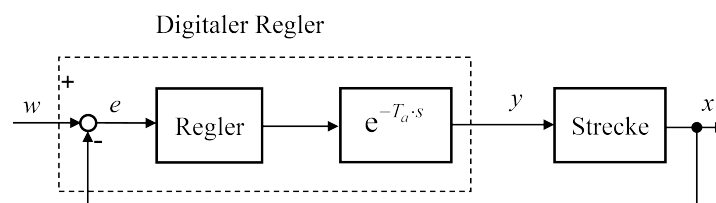


Bild 5.44: Ersatzschaltbild eines quasianalogen digitalen Regelkreises mit der Berücksichtigung der Abtast-Zykluszeit T_a als Totzeit

Für die Auswahl der Abtastrate sollten folgende Regeln zwingend eingehalten werden:

1. Abtastzeit so klein wie möglich zu wählen, um ein möglichst kontinuierliches Signal zu erhalten.
2. Abtastzeit nicht kleiner als die AD-Wandlerzeit wählen.
3. Abtastzeit sollte sich nach der Ersatzzeitkonstante T_E der Regelstrecke richten. T_E ergibt sich aus der Addition der Einzelzeitkonstanten T_0 , T_u und T_g .

$$\rightarrow \text{Programmmlaufzeit, Wandlerzeit} < T_a < 0,1 T_E$$

KAPITEL 6

Reglerauslegung

6.1 BIBO-Stabilität

BIBO-Stabilität (von englisch bounded input, bounded output), auch Eingangs-/Ausgangs-Stabilität.

Stabil, wenn ein begrenztes Eingangssignal zu einem begrenzten Ausgangssignal führt

Beispiel: Sprungantwort eines Integrators

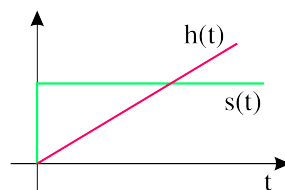
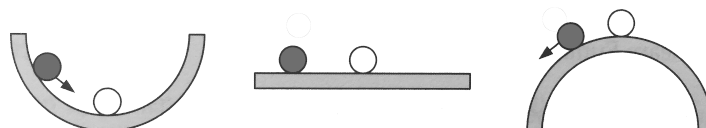
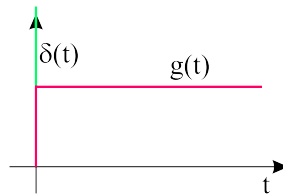
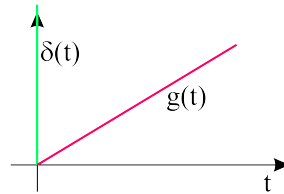


Bild 6.1: Sprungantwort eines Integrators: nicht stabil

6.2 Asymptotische Stabilität

- **Stabil**, wenn die *Impulsantwort* asymptotisch auf Null abklingt
- **Grenzstabil**, wenn die *Impulsantwort* einen endlichen Wert nicht überschreitet
- **Instabil**, wenn die *Impulsantwort* gegen unendlich geht

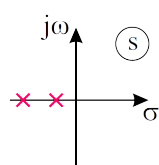


Beispiel: Impulsantwort eines Integrators**Bild 6.2:** Impulsantwort eines Integrators: grenzstabil**Beispiel: Impulsantwort eines doppelten Integrators****Bild 6.3:** Impulsantwort eines doppelten Integrators: instabil**6.3 Grundlegendes Stabilitätskriterium**

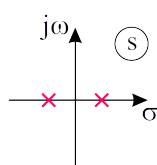
- **Stabil**, wenn die Übertragungsfunktion nur Pole in der linken Halbebene besitzt
- **Grenzstabil**, wenn kein Pol in der rechten Halbebene liegt, keine mehrfachen Pole auf der Imaginärachse vorhanden sind, sich aber mindestens ein einfacher Pol auf der Imaginärachse befindet
- **Instabil**, wenn mindestens ein Pol in der rechten Halbebene liegt oder wenn mindestens ein mehrfacher Pol auf der Imaginärachse liegt

Beispiel: Allgemeines System zweiter Ordnung

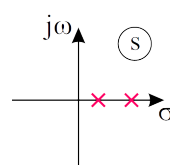
$$G(s) = \frac{1}{s^2 + a_1 s + a_0} \Rightarrow s_{1,2} = \dots$$



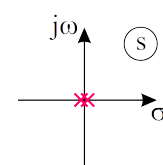
(a) Stabil, nicht schwingfähig



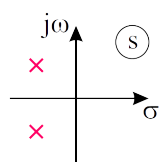
(b) Instabil, nicht schwingfähig



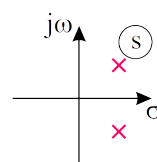
(c) Instabil, nicht schwingfähig



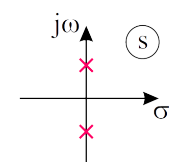
(d) Instabil, doppelter Integrator



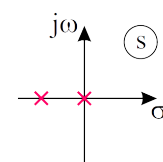
(e) Stabil, schwingfähig



(f) Instabil, schwingfähig



(g) Grenzstabil, ungedämpfter Schwinger



(h) Grenzstabil, verzögerter Integrator

Bild 6.4: Polverteilungen von stabilen und instabilen Systemen

6.4 Der Regelkreis

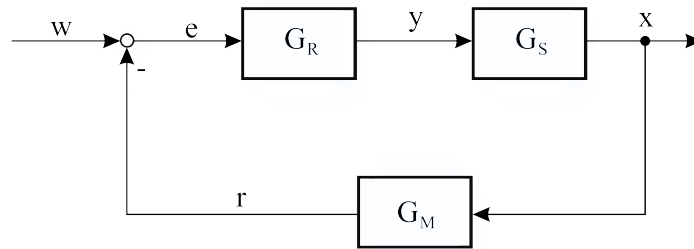


Bild 6.5: Allgemeiner Regelkreis

Vom Ausgang rückwärts bis zu allen Eingängen, bzw. bis zu der Ausgangsgröße selbst:

$$x = G_S \cdot y = G_S \cdot G_R \cdot e = G_S \cdot G_R \cdot (w - r) = G_S \cdot G_R \cdot (w - G_M \cdot x)$$

Sortieren:

$$x \cdot (1 + G_S \cdot G_R \cdot G_M) = G_S \cdot G_R \cdot w$$

Gesamtübertragungsfunktion:

$$G_g = \frac{x}{w} = \frac{G_S \cdot G_R}{1 + G_S \cdot G_R \cdot G_M} = \frac{G_V}{1 + G_0}$$

Vorwärtsübertragungsfunktion:

$$G_V = G_S \cdot G_R$$

Übertragungsfunktion des **offenen** Kreises:

$$G_0 = G_S \cdot G_R \cdot G_M$$

Beispiel:

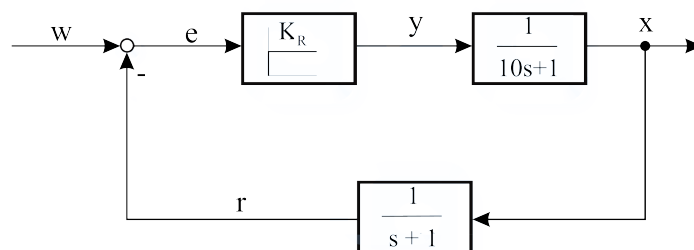


Bild 6.6: Beispiel eines einfachen Regelkreises

Gesamtübertragungsfunktion:

$$G_g = \frac{G_V}{1 + G_0} = \frac{K_R \cdot \frac{1}{10s+1}}{1 + K_R \cdot \frac{1}{10s+1} \cdot \frac{1}{s+1}} = \frac{K_R(s+1)}{(10s+1)(s+1) + K_R}$$

Normalform:

$$s^2 + \frac{11}{10}s + \frac{1 + K_R}{10} = 0$$

Zwei (reelle oder konjugiert komplexe) Pole:

$$s_{1,2} = -\frac{11}{20} \pm \sqrt{\left(\frac{11}{20}\right)^2 - \frac{1 + K_R}{10}}$$

Für die spezielle Reglerverstärkung $K_R = 1$:

$$s_{1,2} = -\frac{11}{20} \pm \sqrt{\left(\frac{11}{20}\right)^2 - \frac{2}{10}}$$

ergeben sich zwei reelle (stabile) Pole:

$$s_1 = -0.2 \quad \text{und} \quad s_2 = -0.87$$

Für die spezielle Reglerverstärkung $K_R = 10$:

$$s_{1,2} = -\frac{11}{20} \pm \sqrt{\left(\frac{11}{20}\right)^2 - \frac{11}{10}}$$

ergeben sich zwei reelle (stabile) Pole:

$$s_{1,2} = -0.55 - 0.89j$$

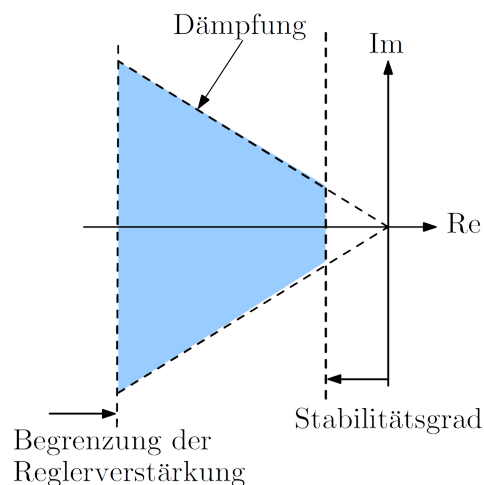
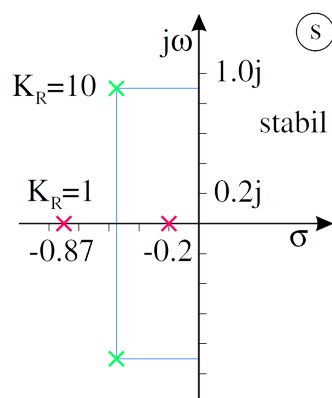


Bild 6.7: Pole eines einfachen Regelkreises in Abhängigkeit von der Reglerverstärkung

Bild 6.8: Gebiet für die Eigenwerte des stabilen Regelkreises

6.5 Nyquistkriterium

Vorüberlegung: Wann wird der akustische Kreis instabil, bzw. wann fängt die Lautsprecheranlage an zu pfeifen....

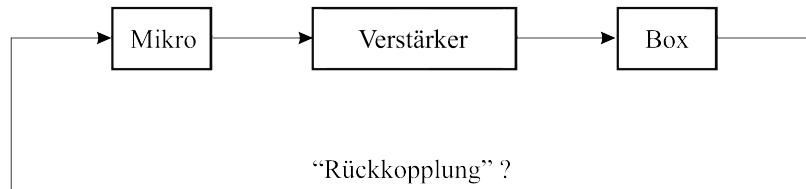


Bild 6.9: Wann kommt es zur „Rückkopplung“?

„Positive Rückkopplung“ nur, wenn:

1. Verstärkung groß genug (>1) und
2. Mitkopplung vorhanden (Phasenverschiebung $= n \cdot 2\pi$, bzw. $n \cdot 360^\circ$)

Mitkopplung ist meist unerwünscht, da das System schnell zum Zusammenbruch führen kann (Tacoma Bridge). Ausgenutzt wird es allerdings z.B. beim Laser, wo gezielt gleichphasig mitgekoppelt wird um die Laserleistung zu vervielfachen.

Ist die Phasenverschiebung gleich $n \cdot \pi$, bzw. $n \cdot 180^\circ$, spricht man von einer Gegenkopplung oder negativen Rückkopplung.

Regelkreis:

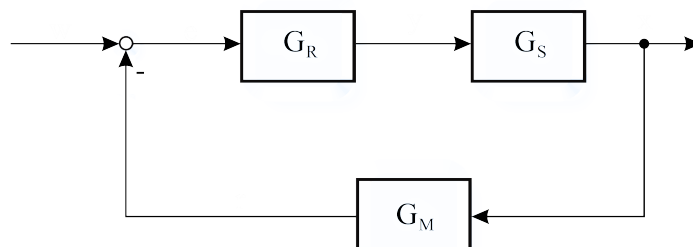


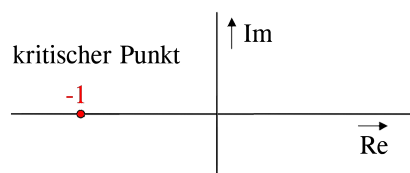
Bild 6.10: Allgemeiner Regelkreis

Übertragungsfunktion des offenen Kreises:

$$G_0 = G_R \cdot G_S \cdot G_M$$

Kritischer Punkt:

$$A = |G_0| = 1 \quad \text{und} \quad \varphi = -\pi$$



Vereinfachtes Nyquistkriterium an der Ortskurve des offenen Kreises:

Kritischer Punkt (-1) muss links liegen, dann ist der geschlossene Kreis G_g stabil!
 Voraussetzung: stabiler offener Kreis plus maximal zwei Integratoren.

Zwei Wege zur Stabilitätsuntersuchung des Regelkreises:

1. Übertragungsfunktion des *geschlossenen* Kreises berechnen und grundlegendes Stabilitätskriterium am geschlossenen Kreis anwenden (Pole des geschlossenen Kreises in der linken Halbebene)
2. Übertragungsfunktion des *offenen* Kreises ($G_0 = G_R G_S G_M$) berechnen und Nyquistkriterium anwenden

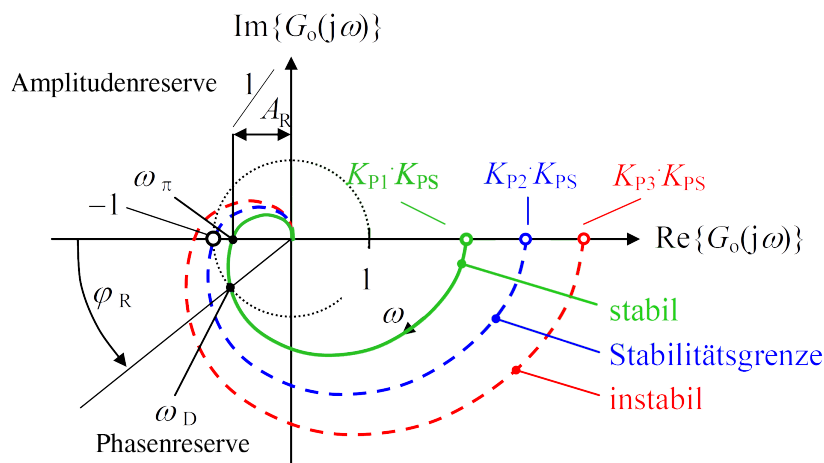


Bild 6.11: Verlauf der Ortskurve des offenen Kreises (System 3. Ordnung)

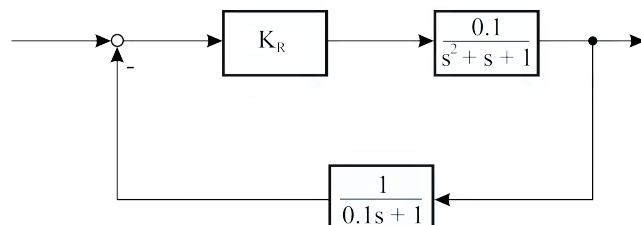
Phasenreserve φ_R:	Maß für die Stabilitätsgüte. Üblich: $40^\circ \leq \varphi_R \leq 70^\circ$
Amplitudenreserve $a_R = \frac{1}{A_R}$:	Maß für die Stabilitätsgüte. Üblich: $2,5 \leq a_R \leq 10$
Durchtrittsfrequenz ω_D:	Maß für die Schnelligkeit der Regelung. Je größer ω_D ist, umso schneller ist der Zeitvorgang.
Amplitudenrand A_R:	Amplitudenverstärkung bei der Phase $\varphi = -\pi$.

Beispiel: P-Regler

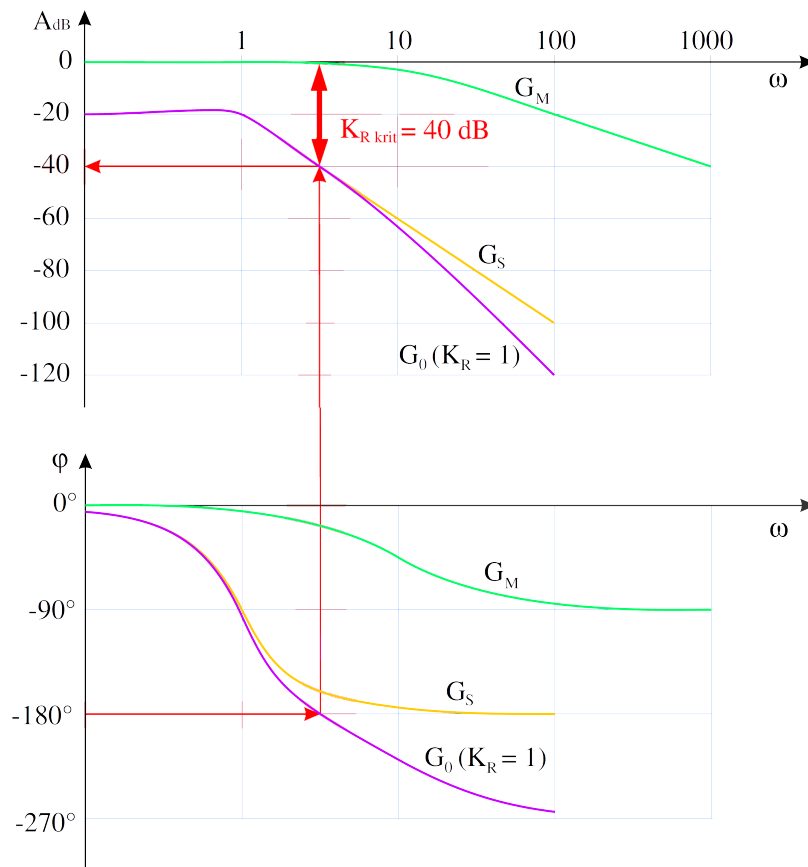
$$G_R = K_R$$

$$\text{PT}_2\text{-Strecke: } G_S = \frac{0.1}{s^2 + s + 1}$$

$$\text{PT}_1\text{-Messglied: } G_M = \frac{1}{0.1s + 1}$$

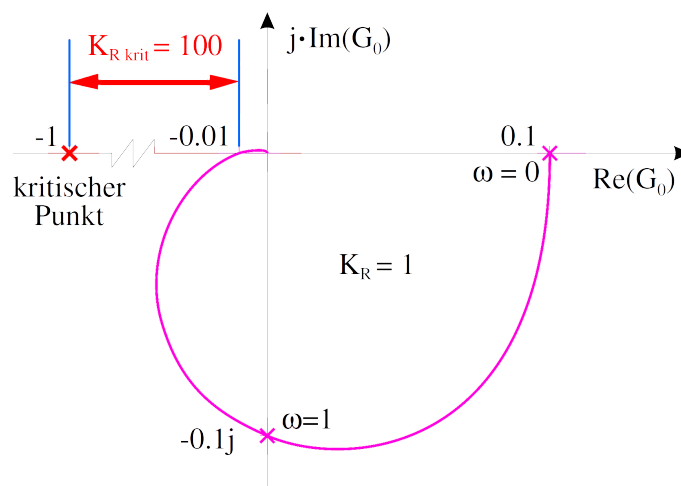


$$\text{Offener Kreis: } G_0 = G_R \cdot G_S \cdot G_M = K_R \cdot \frac{0.1}{s^2 + s + 1} \cdot \frac{1}{0.1s + 1}$$

Bild 6.12: Bodediagramm des offenen Kreises (G_0)

Bis 0 dB K_R erhöhen (hochschieben) → Amplitudenreserve :

$K_{R \text{ krit}} \approx 40 \text{ dB} = 100$ (geschlossener Kreis grenzstabil)

Bild 6.13: Nyquistortskurve des offenen Kreises (G_0)

6.6 Reglerentwurf

Drei (einander teilweise widersprechende) Forderungen:

1. Stabilität
2. Geschwindigkeit
3. Geringe Regelabweichung

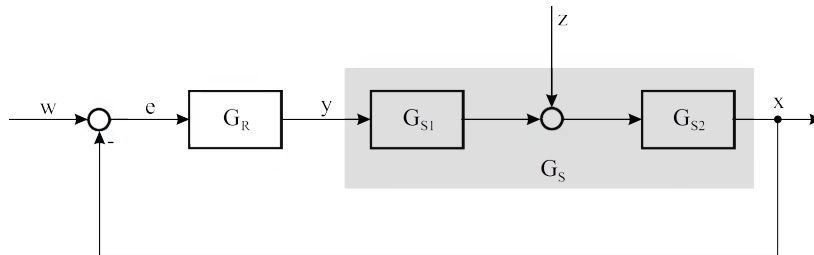


Bild 6.14: Allgemeiner Regelkreis mit Störgröße und geteilter Strecke: $G_S = G_{S1} \cdot G_{S2}$

Übertragungsfunktion des offenen Kreises:

$$G_0 = G_R \cdot G_{S1} \cdot G_{S2}$$

Führungsübertragungsfunktion: $G_w = \frac{x}{w} = \frac{G_0}{1 + G_0}$ (möglichst $\rightarrow 1$)

Störübertragungsfunktion: $G_z = \frac{x}{z} = \frac{G_{S2}}{1 + G_0}$ (möglichst $\rightarrow 0$)

Regelabweichung bei Führung: $G_{ew} = \frac{e}{w} = \frac{1}{1 + G_0}$ (möglichst $\rightarrow 0$)

Regelabweichung bei Störung: $G_{ez} = \frac{e}{z} = -\frac{G_{S2}}{1 + G_0}$ (möglichst $\rightarrow 0$)

Beispiel: P-Regler:

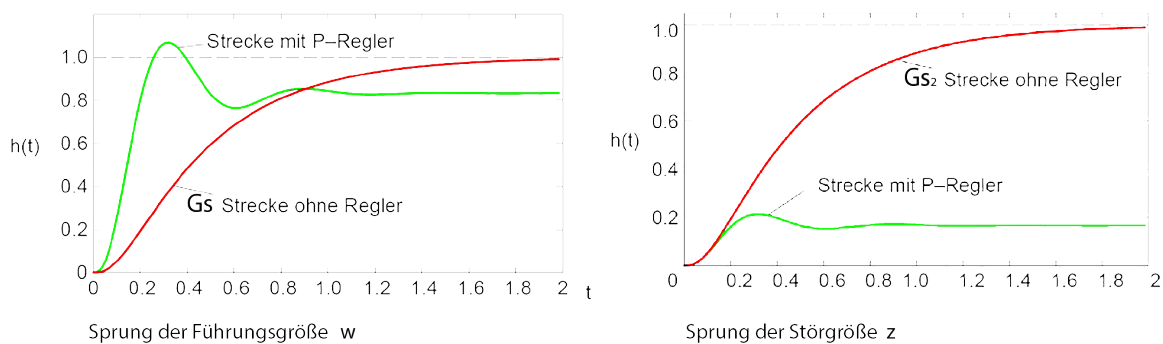


Bild 6.15: Sprungantworten für Führungsgröße w und Störgröße z

6.7 Gütekriterien

Die Anforderung an die Regelung können auch quantifiziert werden. Die Maßstäbe an den geschlossenen Kreis können getrennt für das Führungsverhalten und Störverhalten angegeben werden.

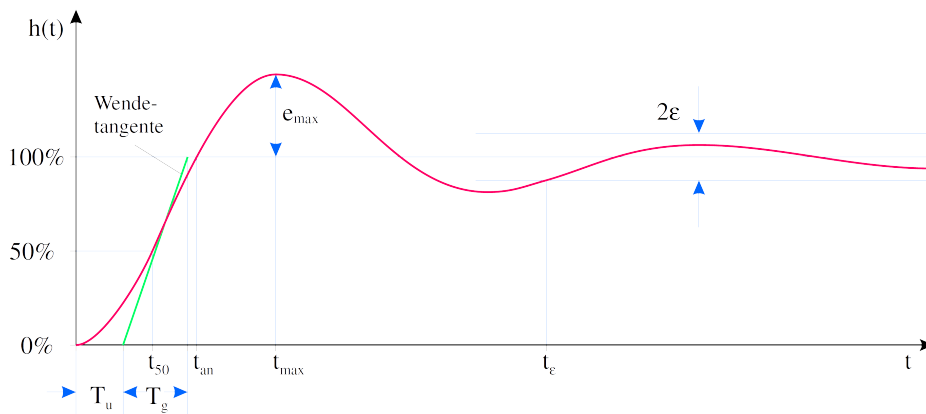


Bild 6.16: Sprungantwort (Führung)

- e_{max} Maximale Überschwingweite
- t_{max} e_{max} tritt auf
- e_∞ Bleibende Regeldifferenz
- T_u Verzugszeit
- T_g Ausgleichszeit
- t_{50} Anstiegszeit
- t_{an} Anregelzeit

t_E Betrag der Regelabweichung nie größer als ϵ (z. B. $t_{3\%}$)

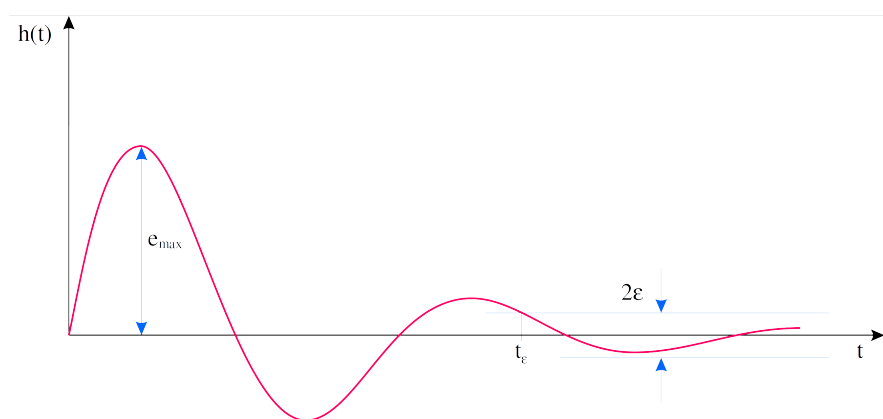


Bild 6.17: Sprungantwort (Störung)

Kostenfunktion :

$$K = K_1 t_{an} + K_2 t_\epsilon + K_3 e_{max} + K_4 \dots = \text{Minimum}$$

$\Rightarrow K_i$ willkürlich wählen $\Rightarrow$ Kompromiss

6.8 Integralkriterien

Für die Kennzeichnung eines wünschenswerten Einschwingverhaltens gibt es verschiedene Gütekriterien, denen eine Bewertung des zeitlichen Verlaufes der Regeldifferenz $e(t)$ bei einer sprungförmigen Störung zugrunde liegt.

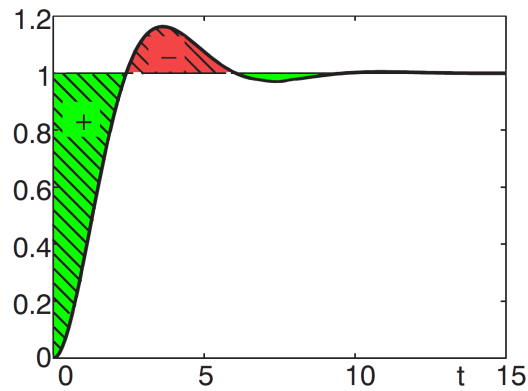


Bild 6.18: Regelfläche der Sprungantwort

Dabei kann z.B. gefordert werden, dass die quadratische Regelfläche

$$\int_0^{\infty} e^2 dt \rightarrow \min \quad (6.1)$$

zu einem Minimum wird. Diese Bedingung bewertet große Abweichungen besonders stark. Vielfach wird auch

$$\int_0^{\infty} |e| dt \rightarrow \min \quad (6.2)$$

verlangt. Man spricht dann von Betragsoptimierung.

Das so genannte ITAE-Kriterium (Integral of time multiplied absolute value of error) lautet

$$\int_0^{\infty} t \cdot |e| dt \rightarrow \min \quad (6.3)$$

Die Bedingung bewertet außer dem Betrag vor allen Dingen die Dauer der Abweichung.

Es existieren noch eine Reihe weiterer Kriterien, die im Einzelnen nicht aufgeführt werden.

Regler Strecke	P	I	PI	PD	PID
reine Totzeit	-	etwas schlechter als PI	Führung + Störung	-	-
Totzeit + Verzögerung 1. Ordnung	-	schlechter als PI	etwas schlechter als PID	-	Führung + Störung
Totzeit + Verzögerung 2. Ordnung	nicht geeignet	schlecht	Störung	Führung	Führung + Störung
1. Ordnung + sehr kleine Totzeit (Verzugszeit)	Führung	nicht geeignet	Störung	Führung bei Verzugszeit	Störung bei Verzugszeit
mit Ausgleich höhere Ordnung PT_n	nicht geeignet	schlechter als PID	etwas schlechter als PID	nicht geeignet	Führung + Störung
ohne Ausgleich mit Verzögerung IT_n	Führung (ohne Verzögerung)	instabil	Störung (ohne Verzögerung)	Führung	Störung

Bild 6.19: Wahl eines geeigneten Reglers bei gegebener Strecke. Es kann im Einzelfall sein, dass aus speziellen Gründen auch einmal eine andere Zuordnung getroffen wird.

6.9 Einstellregeln für PID-Regler

PID-Regler

P Grundregelung

I Statische Genauigkeit (langsam)

D Geschwindigkeit (I-Kompensation)

Bei diesen Verfahren ist es nicht notwendig, die Daten der Regelstrecke zur Ermittlung der Reglerparameter zu bestimmen. Man geht davon aus, dass Strecken höherer Ordnung vorliegen, die näherungsweise durch ein PT_n - T_0 -Übertragungsverhalten beschrieben werden können.

$$G_S(s) \approx \frac{K_{PS}}{1 + sT_n} \cdot e^{-sT_0} \quad (6.4)$$

Zwei bewährte Methoden:

6.9.1 Ziegler und Nichols (Stabilitätsmethode)

Wird die Strecke versuchsweise mit einem P-Regler betrieben, so kann bei genügender Vergrößerung von K_P der Stabilitätsgrenzfall erreicht werden.

Der Regelkreis führt dann beim kritischen Übertragungsbeiwert des Proportionalreglers $K_{P_{kr}}$ Dauerschwingungen der Periodendauer $T_{kr}(T_u)$ aus.

Wählen der PID-Werte:

- I-Beiwert ($K_I = \frac{1}{T_N}$) 'sehr klein'
- D-Beiwert ($K_D = T_V$) 'sehr klein' $\Rightarrow$ Einstellungen entsprechen einer Deaktivierung!
- P-Beiwert wird variiert, bis Stellsignal aus gleichförmigen Schwingungen besteht

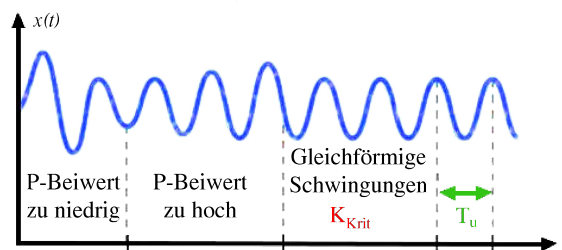


Bild 6.20: K_P erhöhen bis zur Dauerschwingung mit T_u

1. Kritischer P-Beiwert K_{Krit}
2. Kritische Periodendauer T_u

Reglerdimensionierung erfolgt aufgrund der ermittelten Werte K_{Krit} und T_u gemäß Tabelle:

Regler	Reglerverstärkung K_R	Nachstellzeit T_N	Vorhaltzeit T_V
P	$0.5 K_{R_{krit}}$	-	-
PI	$0.45 K_{R_{krit}}$	$0.85 T_{krit}$	-
PID	$0.6 K_{R_{krit}}$	$0.5 T_{krit}$	$0.12 T_{krit}$

Bild 6.21: Reglereinstellung nach Ziegler-Nichols

6.9.2 Nach Chien, Hrones und Reswick (Wendetangen-Methode)

Die Tangente am Wendepunkt der Sprungantwort liefert 2 Parameter zur Dimensionierung:

1. Verzugszeit T_u
2. Ausgleichszeit T_g

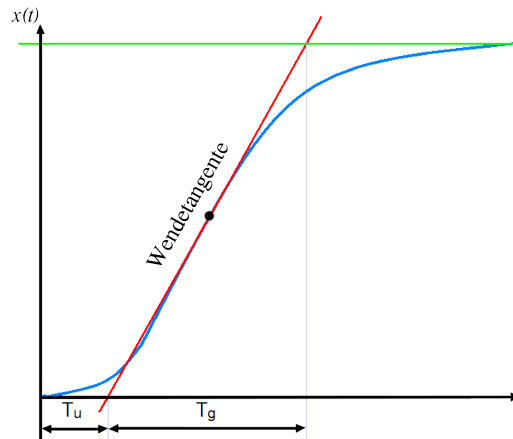


Bild 6.22: S-Förmige Strecke wird als PT_1 - T_0 -System angenommen

Anwendbar, wenn $\frac{T_g}{T_u} > 3$ und Definition einer Hilfsgröße: $K_H = \frac{T_g}{K_S T_u}$

Regler	Optimiert für	Überschwingen	K_R	T_N	T_V
P	Störung	0 %	$0.3 K_H$	-	-
		20 %	$0.7 K_H$	-	-
	Führung	0 %	$0.3 K_H$	-	-
		20 %	$0.7 K_H$	-	-
PI	Störung	0 %	$0.6 K_H$	$4.0 T_u$	-
		20 %	$0.7 K_H$	$2.3 T_u$	-
	Führung	0 %	$0.35 K_H$	$1.2 T_g$	-
		20 %	$0.6 K_H$	$1.0 T_g$	-
PID	Störung	0 %	$0.95 K_H$	$2.4 T_u$	$0.42 T_u$
		20 %	$1.2 K_H$	$2.0 T_u$	$0.42 T_u$
	Führung	0 %	$0.6 K_H$	$1.0 T_g$	$0.5 T_u$
		20 %	$0.95 K_H$	$1.35 T_g$	$0.47 T_u$

Bild 6.23: Reglerverstärkung, Nachstellzeit und Vorhaltzeit in Abhängigkeit von stationärer Verstärkung, Verzugszeit und Ausgleichszeit

6.10 Wurzelortungsverfahren

Die Wurzelortskurve **WOK** ist eine grafische Darstellung der Lage der Polstellen und Nullstellen der komplexen Führungs-Übertragungsfunktion $F_0(s)$ eines Regelkreises in Abhängigkeit von einem Parameter (meist die Verstärkung K) und wird im Bereich der Regelungstechnik zu Stabilitätsuntersuchungen eingesetzt.

Das Verfahren wurde 1948 vom US-amerikanischen Regelungstechniker Walter Richard Evans entwickelt. Mit dem Verfahren der Wurzelortskurve können allerdings Systeme mit **Totzeiten** **nicht** auf Stabilität analysiert werden.

Der Bildbereich lehrt, dass die Polstellen stabiler Regelkreise im negativ reellen Bildbereich liegen müssen.

Es lassen sich dort sogar Sektoren angeben, in denen sich die dominanten Polstellen aufhalten sollten, um definierte Regelgüten zu gewährleisten.

Die nachfolgende Abbildung zeigt solche Bereiche im Bildbereich, will man z.B. ein definiertes PT₂-Übergangsverhalten bei Führungsänderung erzielen.

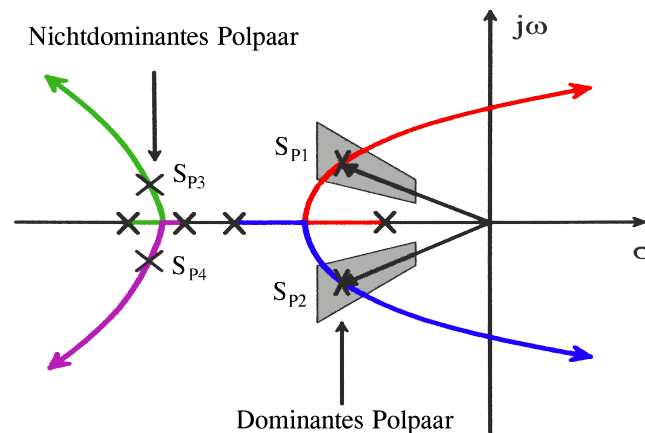


Bild 6.24: Optimaler Sektor für Polstellen mit PT₂-Verhalten

Durch geeignete Vorgabe von Pol- und Nullstellen für den Regler kann erreicht werden, dass der Regelkreis ein solches PN-Schema erhält, wodurch seine dynamischen Eigenschaften festgelegt sind.

Die Pol- und Nullstellen des Reglers müssen so festgelegt werden, dass die Wurzelortskurve des dominierenden Polpaars durch den gewünschten Bildsektor verläuft und alle anderen WOK-Äste im negativ reellen Bildbereich verschwinden.

Das WOK-Entwurfsverfahren lässt sich in folgende Regeln zusammenfassen:

1. Ausgangspunkt der Regelkreissynthese ist das PN-Schema der Regelstrecke
2. Die qualitativen Lagen der Wurzelortskurven des Regelkreises werden durch Vorgabe von Pol- und Nullstellen des Reglers festgelegt:

$$G_R(s) = K_R \cdot \hat{G}_R(s) = K_R \cdot \frac{(s - s_{N_1}) \cdots (s - s_{N_m})}{(s - s_{P_1}) \cdots (s - s_{P_n})} \quad (6.5)$$

wobei man die Strukturbilder typischer Wurzelortskurven berücksichtigt (siehe Tabelle). Die Pol- und Nullstellen des Reglers bestimmen die Dynamik und Stabilität des Regelkreises. Dabei lassen sich zwei Feststellungen treffen:

- a) Das Hinzufügen einer Polstelle s_{P_i} verursacht eine Verbiegung der WOK nach rechts, was zu einer Verlangsamung und Destabilisierung des Regelkreises führt.
- b) Fügt man eine Nullstelle s_{N_i} in die Regler-Übertragungsfunktion ein, erreicht man ein verbiegen der WOK nach links. Der Regelkreis wird stabiler und reagiert auch schneller.

Die technische Realisierung der Regler ist natürlich im Auge zu behalten. Dies drückt sich in der Übertragungsfunktion dadurch aus, dass die Zahl der Nullstellen i. Allg. die Zahl der Polstellen nicht übersteigen darf.

3. Nachdem die qualitative Reglerstruktur gefunden ist, werden seine Pol- und Nullstellen so platziert, dass der dominante WOK-Ast durch den gewünschten Bildsektor verläuft. Für dieses Gebiet bestimmt man den notwendigen Reglerverstärkungsfaktor K_R .
4. Nun überprüft man die Lagen der übrigen Polstellen für diesen Verstärkungsfaktor K_R . Sie sollten einen vernachlässigbaren Einfluss besitzen. Durch die rechnergestützte Simulation des Regelkreises überprüft man abschließend die Regelkreisdynamik.

Stellt sich kein befriedigendes Ergebnis ein, durchläuft man die Entwurfsschritte ein weiteres Mal.

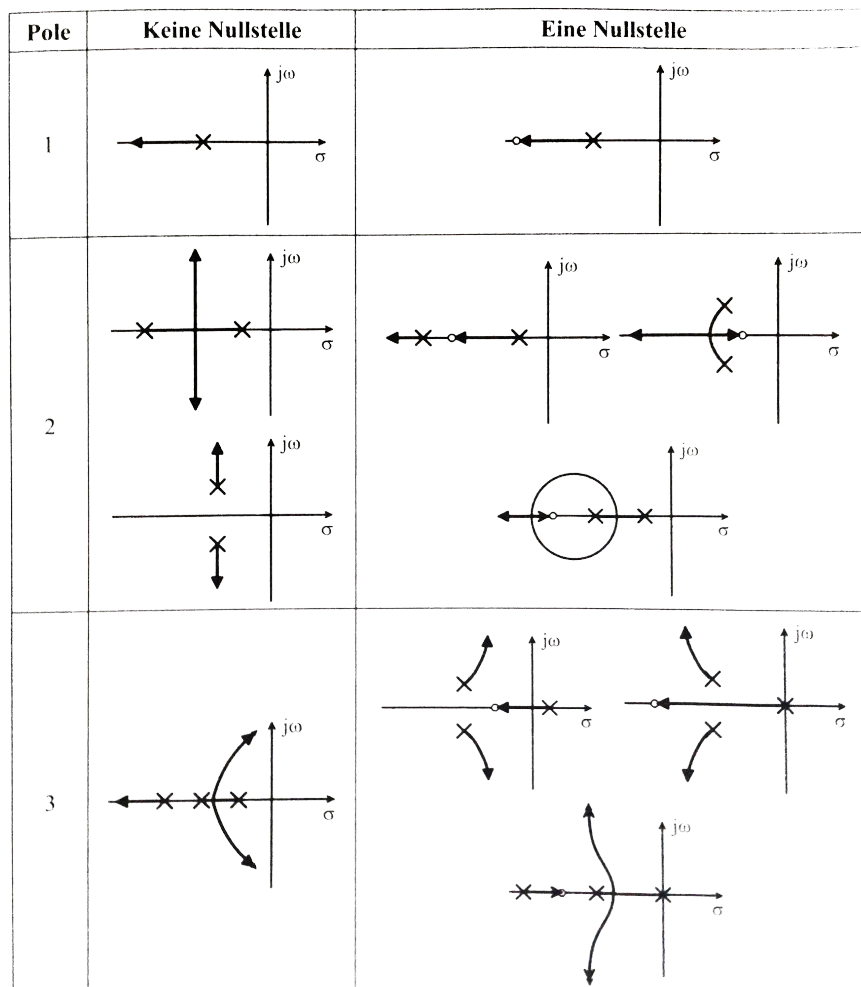


Bild 6.25: Typische Wurzelortskurven

6.11 Frequenzkennlinienverfahren

Für Systeme mit einem dominanten Polpaar gibt es ein Syntheseverfahren im Frequenzbereich.

Ausgangspunkt dieses Verfahrens ist die Darstellung des Frequenzganges $G_0(j\omega)$ des *offenen* Regelkreises im Bode-Diagramm.

Die zu erfüllenden Spezifikationen des *geschlossenen* Regelkreises werden durch die Kenndaten des offenen Regelkreises formuliert.

Die eigentliche Synthesaufgabe besteht dann darin, durch Wahl einer geeigneten Reglerübertragungsfunktion $G_R(s)$ den Frequenzgang des *offenen* Regelkreises so zu verändern, dass er die geforderten Kenndaten erfüllt.

Beim Frequenzkennlinienverfahren werden Amplituden- und Phasengang unter Hinzufügen von Korrekturgliedern für jeden Schritt gezeichnet, die entsprechenden Entwurfsparameter bestimmt und mit den gegebenen Spezifikationen verglichen.

Diese Spezifikationen werden im Allgemeinen in Form von Phasenrand und Durchtrittsfrequenz zur Charakterisierung des Übertragungsverhaltens und in der Form der Verstärkung zur Charakterisierung des bleibenden Regelfehlers beschrieben.

Man kann 3 Möglichkeiten zur Anpassung und deren Darstellung im Bode-Diagramm verwenden (PID):

- Verstärkungsglied
- Phasenanhebendes Glied (Lead)
- Phasenabsenkendes Glied (Lag)

Vorgehen:

Zur Dimensionierung geht man in 3 Schritten vor:

1. Ermittlung von Durchtrittsfrequenz, Phasenreserve und Kreisverstärkung aus den Kenndaten für das Zeitverhalten des geschlossenen Regelkreises
2. Entwurf des Reglers mit den Anpassungsgliedern
3. Überprüfung des ermittelten Ergebnisses

KAPITEL 7

Anhang

7.1 Quadratische Gleichungen

$$x^2 + p \cdot x + q = 0 \quad \text{mit Koeffizienten } p, q \in \mathbb{R}$$

Es gibt drei Fälle:

$$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q > 0 \quad \text{zwei verschiedene reelle Lösungen}$$

$$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 0 \quad \text{eine „doppelte“ reelle Lösung}$$

$$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0 \quad \text{ein Paar konjugiert komplexer Lösungen}$$

Entscheidend ist also, ob $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \geq 0$ bzw. ob $p^2 - 4q \geq 0$ ist.

$\Delta = p^2 - 4q$ heißt deshalb auch *Diskriminante der Gleichung* $x^2 + p \cdot x + q = 0$.

Gleichung vom Grad n

$$x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot x + a_0 = 0 \quad \text{mit Koeffizienten } a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$$

besitzt maximal n Lösungen. Als Lösungen infrage kommen reelle Zahlen oder Paare konjugiert komplexer Zahlen.

7.2 Komplexe Zahlen

Es handelt sich um Zahlen der Form $z = a + b \cdot j \in \mathbb{C}$ mit $j^2 = -1$.
Zur Einführung erinnern wir uns an quadratische Gleichungen

$$x^2 + p \cdot x + q = 0 \quad \text{mit Lösungen} \quad x = \frac{-p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-p}{2}\right)^2 - q}$$

Beispiel $x^2 - x - 1 = 0$

Wir haben $x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5}$, also zwei Lösungen

$$x_1 \doteq 1,618 \quad \text{und} \quad x_2 \doteq -0,618$$

Beispiel $x^2 + 2x + 3 = 0$

Hier ergibt sich $x = -1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 3} = -1 \pm \sqrt{-2}$.

Es gibt folglich *keine* reelle Lösung, denn es gibt keine reelle Zahl $w \in \mathbb{R}$ mit $w^2 = -2$.

ABER: Wie steht es mit $w = \sqrt{2} \cdot j$?

$$w^2 = (\sqrt{2} \cdot j)^2 = 2 \cdot j^2 = -2 \quad (!)$$

Die Gleichung $x^2 + 2x + 3 = 0$ hat also *zwei komplexe* Lösungen $x = -1 \pm w$

$$x_1 = -1 + \sqrt{2} \cdot j \quad \text{und} \quad x_2 = -1 - \sqrt{2} \cdot j$$

Komplexe Zahlen

$$z = a + b \cdot j \in \mathbb{C}$$

mit den Bestandteilen:

$$\begin{array}{ll} \text{imaginäre Einheit} & j \quad \text{mit } j^2 = -1 \\ \text{Realteil} & \operatorname{Re}(z) = a \in \mathbb{R} \\ \text{Imaginärteil} & \operatorname{Im}(z) = b \in \mathbb{R} \end{array}$$

Die (komplex) Konjugierte

$$\begin{array}{ll} \text{von} & z = a + b \cdot j \in \mathbb{C} \\ \text{ist} & \bar{z} = a - b \cdot j \in \mathbb{C} \end{array}$$

Beispiele

$$\begin{array}{llll} z_1 = -1 + \sqrt{2} \cdot j & z_2 = -2 + 3 \cdot j & z_3 = 10 & z_4 = j \\ \bar{z}_1 = -1 - \sqrt{2} \cdot j & \bar{z}_2 = -2 - 3 \cdot j & \bar{z}_3 = 10 & \bar{z}_4 = -j \end{array}$$

Eine Zahl $z = a + b \cdot j$ heißt *rein reell*, wenn $\operatorname{Im}(z) = b = 0$, d.h. wenn $z = a$ ist.

Eine Zahl $z = a + b \cdot j$ heißt *rein imaginär*, wenn $\operatorname{Re}(z) = a = 0$, d.h. wenn $z = b \cdot j$ ist.

Generell gilt: $\boxed{\overline{\bar{z}} = z}$ sowie $\boxed{\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}}$ und $\boxed{\operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2j}}$

7.3 Tabelle von Laplacetransformationen

Nr.	Originalfunktion $f(t)$	Bildfunktion $L[f(t)] = L(p)$
1	$1, h(t)$	$\frac{1}{p}$
2	t	$\frac{1}{p^2}$
3	$t^n, \quad n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
4	$e^{\pm at}$	$\frac{1}{p \mp a}$
5	te^{at}	$\frac{1}{(p-a)^2}$
6	$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$
7	$\sin at$	$\frac{a}{p^2 + a^2}$
8	$\cos at$	$\frac{p}{p^2 + a^2}$
9	$t \sin at$	$\frac{2ap}{(p^2 + a^2)^2}$
10	$t \cos at$	$\frac{p^2 - a^2}{(p^2 + a^2)^2}$
11	$t^n \sin at, \quad n \in \mathbb{N}$	$\frac{in!}{2} \left(\frac{1}{(p+ia)^{n+1}} - \frac{1}{(p-ia)^{n+1}} \right)$
12	$t^n \cos at, \quad n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{2} \left(\frac{1}{(p+ia)^{n+1}} + \frac{1}{(p-ia)^{n+1}} \right)$
13	$\sinh at$	$\frac{a}{p^2 - a^2}$
14	$\cosh at$	$\frac{p}{p^2 - a^2}$
15	$t \sinh at$	$\frac{2ap}{(p^2 - a^2)^2}$
16	$t \cosh at$	$\frac{p^2 + a^2}{(p^2 - a^2)^2}$
17	$t^n \sinh at, \quad n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{2} \left(\frac{1}{(p-a)^{n+1}} - \frac{1}{(p+a)^{n+1}} \right)$

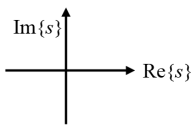
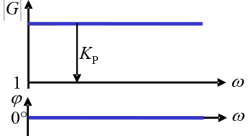
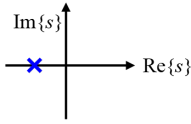
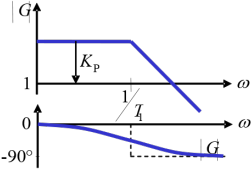
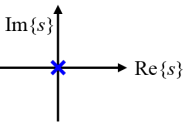
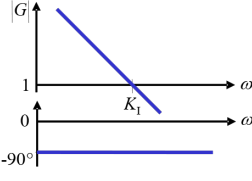
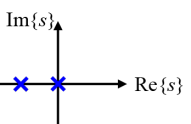
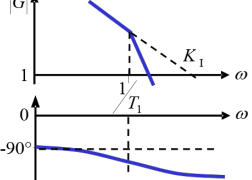
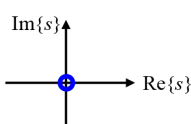
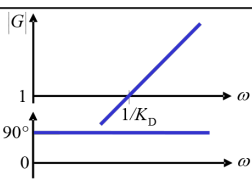
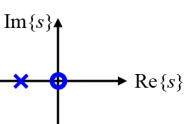
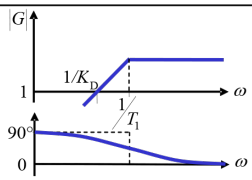
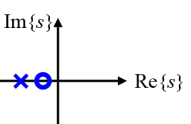
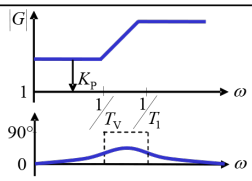
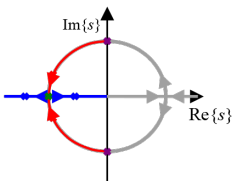
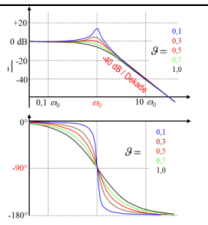
7.4 Blocksysteme

Vorgang	Originalschaltung	entsprechende Schaltung
Vertauschen von Elementen		
Vertauschen von Summationsstellen		
Vertauschen von Verzweigungsstellen		
Verlegen einer Summationsstelle entgegen der Wirkungsrichtung		
Verlegen einer Summationsstelle in Wirkungsrichtung		
Verlegen einer Verzweigungsstelle entgegen der Wirkungsrichtung		
Verlegen einer Verzweigungsstelle in Wirkungsrichtung		
Verlegen einer Verzweigungsstelle vor eine Summationsstelle		
Verlegen einer Verzweigungsstelle hinter eine Summationsstelle		
Zusammenfassung einer Reihenschaltung		
Zusammenfassung einer Parallelschaltung		
Zusammenfassung einer Kreisschaltung		

7.5 Übertragungsglieder

Bezeichnung	Gleichung	Übertragungsblock
P-Glied	$X(s) = K_P \cdot Y(s)$	$\frac{Y(s)}{\longrightarrow} \boxed{K_P} \longrightarrow X(s)$
PT ₁ -Glied	$X(s) = \frac{K_P}{1 + T_1 s} Y(s)$	$\frac{Y(s)}{\longrightarrow} \boxed{\frac{K_P}{1 + T_1 \cdot s}} \longrightarrow X(s)$
I-Glied	$X(s) = \frac{K_I}{s} Y(s)$	$\frac{Y(s)}{\longrightarrow} \boxed{\frac{K_I}{s}} \longrightarrow X(s)$
IT ₁ -Glied	$X(s) = \frac{K_I}{s(1 + T_1 \cdot s)} Y(s)$	$\frac{Y(s)}{\longrightarrow} \boxed{\frac{K_I}{s(1 + T_1 \cdot s)}} \longrightarrow X(s)$
D-Glied	$X(s) = K_D \cdot s \cdot Y(s)$	$\frac{Y(s)}{\longrightarrow} \boxed{K_D \cdot s} \longrightarrow X(s)$
DT ₁ -Glied	$X(s) = \frac{K_D \cdot s}{1 + T_1 s} Y(s)$	$\frac{Y(s)}{\longrightarrow} \boxed{\frac{K_D \cdot s}{1 + T_1 \cdot s}} \longrightarrow X(s)$
PDT ₁ -Glied Lag/Lead-Glied	$X(s) = K_P \frac{1 + T_v s}{1 + T_1 s} Y(s)$	$\frac{Y(s)}{\longrightarrow} \boxed{K_P \frac{T_v s + 1}{T_1 s + 1}} \longrightarrow X(s)$
PT ₂ -Glied	$X(s) = \frac{K_P}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_0} s + \frac{s^2}{\omega_0^2}} Y(s)$	$\frac{Y(s)}{\longrightarrow} \boxed{\frac{K_P}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_0} s + \frac{1}{\omega_0^2} s^2}} \longrightarrow X(s)$
Totzeit-Glied	$X(s) = e^{-T_t s} \cdot Y(s)$	$\frac{Y(s)}{\longrightarrow} \boxed{e^{-T_t \cdot s}} \longrightarrow X(s)$

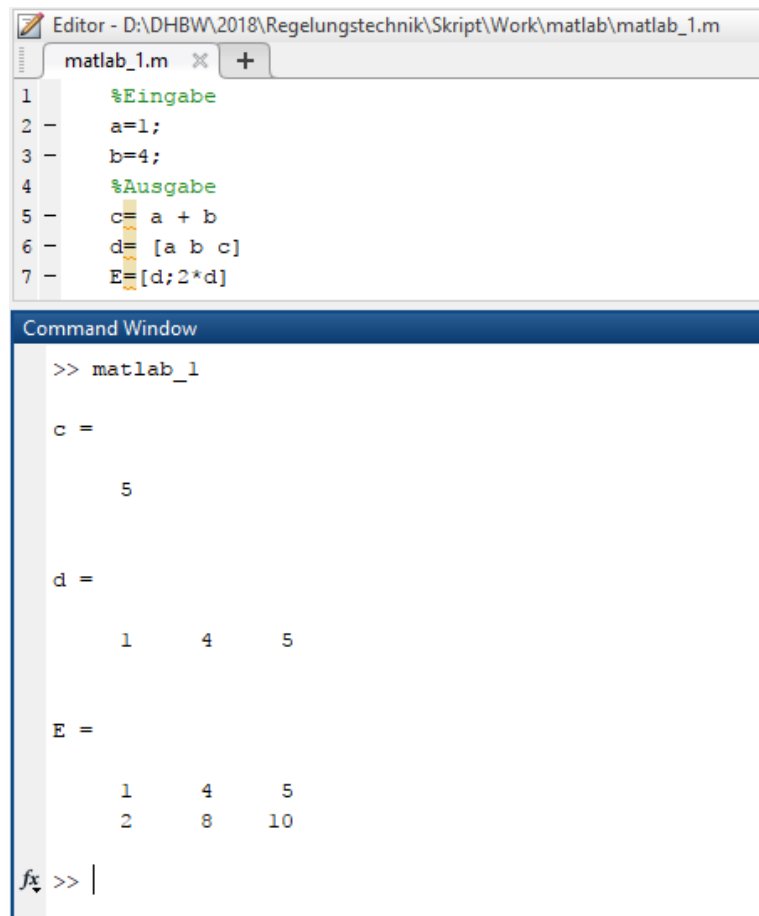
7.6 Pole, Nullstellen und Bodediagramme

Bezeichnung	Pole / Nullstellen	Bode Diagramm
P-Glied		
PT1-Glied		
I-Glied		
IT1-Glied		
D-Glied		
DT1-Glied		
PDT1-Glied Lag-Lead Glied		
PT2-Glied		

7.7 Matlab

Erste Schritte

Struktur der Matlab Befehle: Ergebnis = Funktion (Variable)



The screenshot shows the MATLAB Editor with a script named `matlab_1.m`. The script contains the following code:

```
1 %Eingabe
2 a=1;
3 b=4;
4 %Ausgabe
5 c = a + b
6 d = [a b c]
7 E = [d; 2*d]
```

The Command Window shows the execution results:

```
>> matlab_1

c =

     5

d =

     1     4     5

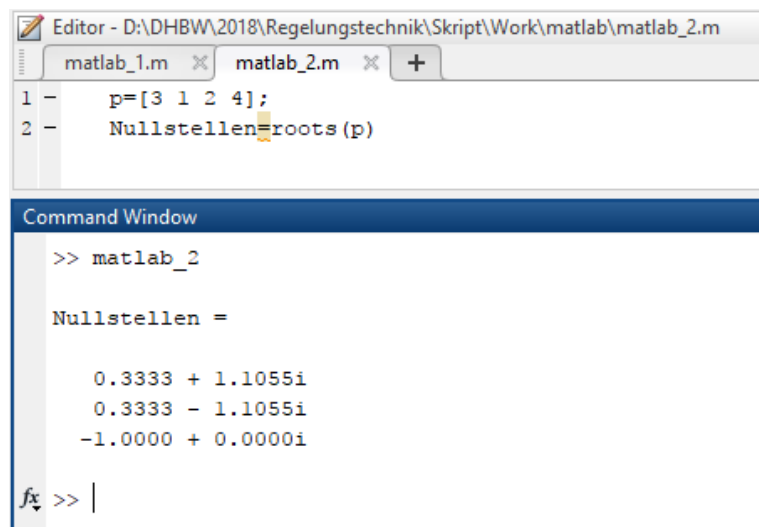
E =

     1     4     5
     2     8    10
```

The Command Window prompt is `fx >> |`.

Polynome

(z.B. $3x^3 + x^2 + 2x + 4$)



The screenshot shows the MATLAB Editor with a script named `matlab_2.m`. The script contains the following code:

```
1 p=[3 1 2 4];
2 Nullstellen=roots(p)
```

The Command Window shows the execution results:

```
>> matlab_2

Nullstellen =

    0.3333 + 1.1055i
    0.3333 - 1.1055i
   -1.0000 + 0.0000i
```

The Command Window prompt is `fx >> |`.

Übertragungsfunktionen

```

Editor - D:\DHBW\2018\Regelungstechnik\Skript\Work\matlab\matlab_3.m
matlab_1.m  matlab_2.m  matlab_3.m  +
1 -  Z1=[1 5]; Z2=[3 1];      %Definition der Zähler
2 -  N1=[4 3 1]; N2=[1 4 2]; %Definition der Nenner
3 -  G1=tf(Z1,N1)            %Bildung der Übertragungsfunktion G1
4 -  G2=tf(Z2,N2)            %Bildung der Übertragungsfunktion G2
5 -  Nullstellen = zero(G1)   %Nullstellen von G1
6 -  Pole=pole(G1)           %Pole
7
8 -  G3=series(G1,G2);        %Bildung der Reihenschaltung von G1 und G2 (G1*G2)
9 -  G4=parallel(G1,G2);      %Bildung der Reihenschaltung von G1 und G2 (G1+G2)
10
11 - G5=feedback(G1,G2)       %Rückkopplung über G2
12
13
14

Command Window
>> matlab_3

G1 =

      s + 5
-----
4 s^2 + 3 s + 1

Continuous-time transfer function.

G2 =

      3 s + 1
-----
s^2 + 4 s + 2

Continuous-time transfer function.

Nullstellen =

    -5

Pole =

    -0.3750 + 0.3307i
    -0.3750 - 0.3307i

G5 =

      s^3 + 9 s^2 + 22 s + 10
-----
4 s^4 + 19 s^3 + 24 s^2 + 26 s + 7

Continuous-time transfer function.

fx >> |

```

Regelungstechnik Tool Box

z.B. $G(s) = \frac{2x + 6}{x^2 + 4x + 5}$

```

Editor - D:\DHBW\2018\Regelungstechnik\Matlab\Transfer_3D.m
matlab_1.m x matlab_2.m x matlab_3.m x Untitled3 x Transfer_3D.m x +
1 - clear, clc, close all
2
3 % Berechnet und zeigt die Übertragungsfunktion:
4 - disp('Übertragungsfunktion:')
5 - Gs = tf([2 6],[1 4 5])
6 - zpkm(Gs) % Zeigt Übertragungsfunktion an
7
8 % Sprungantwort Übertragungsfunktion
9 - figure(1)
10 - step(Gs)
11 - title(['Sprungantwort:'])
12 - grid on
13
14 % Impulsantwort
15 - figure(2)
16 - impulse(Gs)
17 - title(['Impulsantwort:'])
18 - grid on
19
20 % Bodediagramm
21 - figure(3)
22 - bode(Gs);
23 - title(['Bode Diagramm '])
24 - grid on
25
26 % Nyquist Diagramm
27 - figure(4)
28 - nyquist(Gs);
29 - title(['Nyquist Diagramm'])
30
31 % Pole und Nullstellen
32 - figure(5)
33 - pzplot(Gs);
34 - title(['Pole- und Nullstellen'])
35
36 % 3D Pole Nullstellen
37 - figure(6)
38 - pz=[pole(Gs); zero(Gs)];
39 - rmin = min(real(pz))-1;
40 - rmax = max(real(pz))+1;
41 - imin = min(imag(pz))-1;
42 - imax = max(imag(pz))+1;
43 - res = 80;
44 - a=1;
45 - ax=[rmin-(rmax-rmin)*a rmax+(rmax-rmin)*a imin-(imax-imin)*a imax+(imax-imin)*a];
46 - x=linspace(ax(1),ax(2),res);
47 - y=linspace(ax(3),ax(4),res);
48 - [xx,yy] = meshgrid(x,y);
49 - transf_func3D = polyval(Gs.num{1},xx+li*yy)./polyval(Gs.den{1},xx+li*yy);
50 - surf(x, y, 20*log10(abs(transf_func3D)))
51 %shading('interp')
52 %colorbar
53 - alpha(0.7)
54 - xlabel('Re(s)');
55 - ylabel('Im(s)');
56 - zlabel('Amplitude, dB');
57 - title(['Übertragungsfunktion'])
58
59
60
61
62
Command Window
fx >>

```

Ausgabe: Diagramme von $G(s) = \frac{2x + 6}{x^2 + 4x + 5}$

