

Mathematik 3: Zusatzübung - Wahrscheinlichkeit bei KI (LLM)

1. Aufgabe:

Ein Large Language Model (LLM) sagt für den Satzanfang "Die Klausur ist..." folgende Wahrscheinlichkeiten für das nächste Token voraus:

Token	Wahrscheinlichkeit
"schwer"	0,35
"einfach"	0,15
"morgen"	0,20
"vorbei"	0,10
"lang"	0,08
"interessant"	0,07
sonstige Tokens	0,05

- Prüfen Sie rechnerisch, ob es sich um eine gültige Wahrscheinlichkeitsverteilung handelt.
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit wählt das Modell **nicht** das Token "schwer"?
- Das Modell generiert (unabhängig voneinander) drei Sätze mit obiger Verteilung. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass **alle drei** Male das Token "schwer" gewählt wird? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass **mindestens einmal** das Token "schwer" gewählt wird?
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das gewählte Token "schwer" **oder** "einfach" ist?

2. Aufgabe:

Ein LLM wird auf Faktentreue geprüft. Aus Erfahrung ist bekannt:

- Bei 10 % aller Antworten "halluziniert" das Modell (erfindet falsche Fakten): $P(H) = 0,10$.
- Ein nachgeschalteter Faktencheck-Algorithmus erkennt eine Halluzination mit Wahrscheinlichkeit 0,90 korrekt als "auffällig" ($P(A | H) = 0,90$).
- Bei einer korrekten (nicht-halluzinierten) Antwort schlägt der Faktencheck trotzdem fälschlich mit Wahrscheinlichkeit 0,08 Alarm ($P(A | \bar{H}) = 0,08$).

Der Faktencheck schlägt bei einer Antwort Alarm (Ereignis A). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Antwort tatsächlich eine Halluzination ist ($P(H | A)$)?