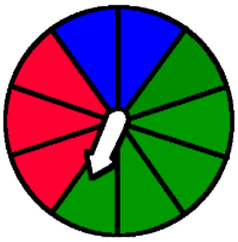
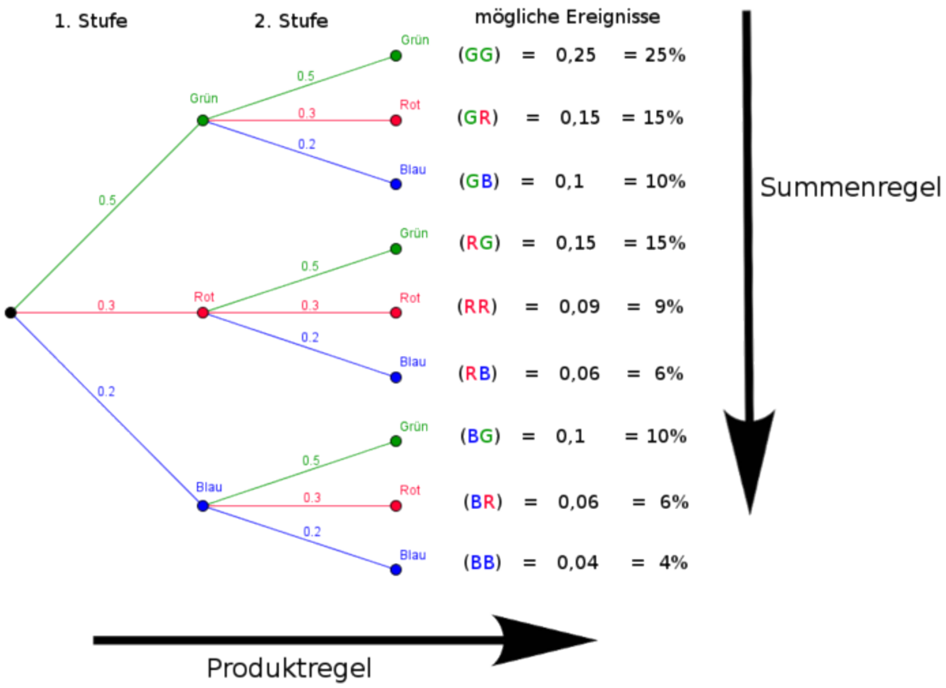
Mathematik 3: Zusatzübungen 2

1. Aufgabe:

Folgendes Glücksrad wird zweimal hintereinander gedreht. Erstellen Sie ein entsprechendes Baumdiagramm, um die Einzelwahrscheinlichkeiten berechnen zu können.



Lösung:



2. Aufgabe:

Aus einem Skatspiel mit 32 Karten wird eine Karte zufällig entnommen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit,

a) eine rote Karte,

b) ein Ass,

c) eine Dame oder einen König,

d) einen schwarzen Buben

zu ziehen?

Lösung:

a) 16 rote Karten $\Rightarrow 16/32 = 1/2$

b) 4 Asse $\Rightarrow 4/32 = 1/8$

c) Je 4 Damen und Könige $\Rightarrow 8/32 = 1/4$

d) 2 schwarze Buben $\Rightarrow 2/32 = 1/16$

3. Aufgabe:

Zwei Sportschützen A und B treffen eine Zielscheibe mit den Wahrscheinlichkeiten $P(A) = 1/3$ und $P(B) = 1/2$. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird die Scheibe getroffen, wenn beide Schützen gleichzeitig schießen?

Lösung:

$A \cap B$: A und B treffen gleichzeitig $\Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$.

$A \cup B$: Schütze A oder Schütze B trifft oder beide Schützen treffen (Additionssatz):
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$
Alternativ kann man auch die Gegenwahrscheinlichkeit (Wahrscheinlichkeit dass beide gleichzeitig nicht treffen) verwenden.

4. Aufgabe:

Ein Bogenschütze trifft die Zielscheibe mit der Wahrscheinlichkeit $p = 0.6$. Er schießt insgesamt dreimal.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass er dabei genau zweimal die Scheibe trifft.

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird die Scheibe mindestens einmal getroffen?

Hinweis: Die Stichprobe erfolgt (wie in der Praxis allgemein üblich) durch Ziehung ohne Zurücklegen.

Lösung:

T: Treffer; $\overline{T}$: Fehlschuss (kein Treffer); $p(T) = p = 0{,}6$; $p(\overline{T}) = 0{,}4$

a) Ereignis A: genau *zwei* Treffer bei 3 Schüssen $\Rightarrow$ $A = \{T\,T\,\overline{T},\ T\,\overline{T}\,T,\ \overline{T}\,T\,T\}$ $\Rightarrow$
$P(A) = 3 \cdot (0{,}6 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4) = 0{,}432$

b) Ereignis B: *kein* Treffer bei 3 Schüssen $\Rightarrow$ $B = \{\overline{T}\,\overline{T}\,\overline{T}\}$ $\Rightarrow$
$P(B) = 0{,}4 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}4 = 0{,}064$
Ereignis $\overline{B}$: *mindestens ein* Treffer $\Rightarrow$ $P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0{,}064 = 0{,}936$

5. Aufgabe:

Die Lebensdauer T eines bestimmten elektronischen Bauelements sei eine stetige Zufallsvariable mit der Verteilungsfunktion

$F(t) = 1 - (1 + 0.2t) \cdot e^{-0.2t}$ $\quad (t \geq 0$ sonst: $F(t) = 0)$

a) Bestimmen Sie die zugehörige Dichtefunktion $f(t)$.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(1 \leq T \leq 5)$.

Lösung:

a) $f(t) = F'(t) = -2[0.2 \cdot e^{-0.2t} + e^{-0.2t} \cdot (-0.2)(1 + 0.2t)] = 0.04t \cdot e^{-0.2t}$

b) $P(1 \leq T \leq 5) = F(5) - F(1) = 0.2642 - 0.0175 = 0.2467$

6. Aufgabe:

U sei eine standardnormalverteilte Zufallsvariable. Berechnen Sie mit Hilfe der Verteilungsfunktion $\Phi(u)$ (Tabelle oder Taschenrechner) die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

a) $P(U \leq 1.52)$

b) $P(0.2 \leq U \leq 2.13)$

c) $P(|U| \leq 1.69$

d) $P(\geq -2.13)$

erfolgt?

Lösung:

a) $P(U \leq 1.52) = \Phi(1.52) = 0.9357$

b) $P(0.2 \leq U \leq 2.13) = \Phi(2.13) - \Phi(0.2) = 0.9834 - 0.5792 = 0.4041$

c) $P(|U| \leq \Phi(1.69) - 1 = 2 \cdot 0.9545 - 1 = 0.9090$

d) $P(U \geq -2.13) = 1 - P(U \leq -2.13) = 1 - \Phi(-2.13) = 1 - 1 + \Phi(2.13) =$
$= \Phi(2.13) = 0.9834$

7. Aufgabe:

Die Kapazität eines in großer Stückzahl hergestellten Kondensators kann als eine normalverteilte Zufallsvariable X angesehen werden.

a) Mit welchem Ausschussanteil ist zu rechnen, wenn die Kapazität höchstens um 5% vom Sollwert (Mittelwert) $\mu = 100$ mF abweichen darf und die Standardabweichung $\sigma = 4$ mF beträgt?

b) Wie ändert sich dieser Ausschussanteil, wenn nur Kapazitätswerte zwischen 98 mF und 104 mF toleriert werden?

Lösung:

$$U = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{X - 100}{4}$$

a) Abweichung vom Sollwert: $\pm 5\ \mu\mathrm{F}$

$$P(95 \leq X \leq 105) = P(-1{,}25 \leq U \leq 1{,}25) = P(|U| \leq 1{,}25) =$$
$$= 2 \cdot \phi(1{,}25) - 1 = 2 \cdot 0{,}8944 - 1 = 0{,}7888$$

Ausschussanteil: $P = 1 - P(95 \leq X \leq 105) = 1 - 0{,}7888 = 0{,}2112 \approx 21{,}1\,\%$

b) $$P(98 \leq X \leq 104) = P(-0{,}5 \leq U \leq 1) = \phi(1) - \phi(-0{,}5) =$$
$$= \phi(1) - 1 + \phi(0{,}5) = 0{,}8413 - 1 + 0{,}6915 = 0{,}5328$$

Ausschussanteil: $P = 1 - P(98 \leq X \leq 104) = 1 - 0{,}5328 = 0{,}4672 \approx 46{,}7\,\%$

8. Aufgabe:

Die in einer Mathematik-Klausur erzielte Punktzahl lässt sich als eine normalverteilte Zufallsgröße X auffassen. In einem konkreten Fall ergab sich eine Normalverteilung mit dem Mittelwert $\mu = 20$ und der Standardabweichung $\sigma = 4$ (in Punkten). 60% der teilgenommenen Studenten schafften die Prüfung.

Welche Mindestpunktzahl war daher zu erreichen?

Lösung:

Mindestpunktzahl: $a \quad \Rightarrow \quad P(X \geq a) = 0{,}6; \qquad U = \dfrac{X - \mu}{\sigma} = \dfrac{X - 20}{4}$

$$P(X \geq a) = P\left(U \geq \frac{a - 20}{4}\right) = P(U \geq c) = 0{,}6 \qquad \left(\text{mit } c = \frac{a - 20}{4}\right)$$

$$P(U \geq c) = 1 - P(U \leq c) = 1 - \phi(c) = 0{,}6 \quad \Rightarrow \quad \phi(c) = 0{,}4 < 0{,}5 \quad \Rightarrow$$

$$c < 0 \quad (\text{Wir setzen } c = -k \text{ mit } k > 0) \quad \Rightarrow \quad \phi(c) = \phi(-k) = 1 - \phi(k) = 0{,}4 \quad \Rightarrow$$

$$\phi(k) = 0{,}6 \quad \Rightarrow \quad k = 0{,}253 \quad \Rightarrow \quad c = -k = -0{,}253 \quad \Rightarrow \quad c = \frac{a - 20}{4} = -0{,}253 \quad \Rightarrow$$

$$a = 4c + 20 = -1{,}012 + 20 = 18{,}988 \approx 19$$

Daher: Die geforderte *Mindestpunktzahl* betrug 19 Punkte.

9. Aufgabe:

Ein homogener Würfel wird 360-mal geworfen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit nimmt dabei die binomialverteilte Zufallsvariable

X = Anzahl der Würfe mit der Augenzahl 1 oder 6 bei insgesamt 360 Würfen

Werte zwischen 100 und 140 an, wenn man die Approximation durch eine Normalverteilung zugrunde legt?

Lösung:

$$n = 360, \quad p = 1/3, \quad q = 1 - p = 2/3; \quad \mu = np = 120; \quad \sigma^2 = npq = 80;$$

$$\sigma = \sqrt{80}; \qquad U = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{X - 120}{\sqrt{80}}; \qquad P^*(100 \leq X \leq 140)$$

Stetigkeitskorrektur (Intervallgrenzen um 0,5 nach außen verschieben):

$$P^*(100 \leq X \leq 140) \approx P(99{,}5 \leq X \leq 140{,}5) = P(-2{,}292 \leq U \leq 2{,}292) =$$
$$= P(|U| \leq 2{,}292) = 2 \cdot \phi(2{,}292) - 1 = 2 \cdot 0{,}9891 - 1 = 0{,}9782$$

Stetigkeitskorrektur wurde in der Vorlesung nicht behandelt! $\Rightarrow$ nicht prüfungsrelevant.

10. Aufgabe:

In einer Urne befinden sich 4 weiße (W) und 6 schwarze (S) Kugeln. Eine Kugel wird zufällig entnommen und dafür eine der anderen Farbe wieder hineingelegt.
Dann wird der Urne eine weitere Kugel entnommen. Bestimmen Sie mit Hilfe des Ereignisbaumes die Wahrscheinlichkeit, dass

a) die zuletzt gezogene Kugel weiß ist,

b) man bei beiden Ziehungen jeweils Kugeln gleicher Farbe erhällt,

c) beide Kugeln weiß sind, wenn bekannt ist, dass die gezogenen Kugeln die gleiche Farbe haben.

Lösung:

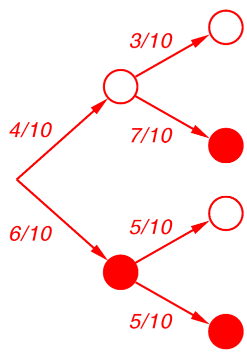
Die Urne enthält stets 10 Kugeln, nach der 1. Ziehung somit entweder 3 weiße und 7 schwarze Kugeln (wenn zunächst eine weiße Kugel gezogen wurde) oder je 5 weiße und schwarze Kugeln (wenn zunächst eine schwarze Kugel gezogen wurde). Aus dem Ereignisbaum folgt:

a) $P(W) = P(WW) + P(SW) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{10} + \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{10} = \frac{42}{100} = 0.42$

b) $P(WW \cup SS) = P(WW) + P(SS) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{10} + \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{10} = \frac{42}{100} = 0.42$

b) $P(WW) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{12}{100}$

$$P = \frac{P(WW)}{P(WW \cup SS)} = \frac{12/100}{42/100} = \frac{2}{7}$$



11. Aufgabe:

Berechnen Sie die Kovarianz s_{xy} und den Korrelationskoeffizienten r der folgenden Stichprobe und skizzieren Sie die Punktwolke:

i	1	2	3	4	5	6
x_i	2	2	4	1	5	4
y_i	3	2	4	2	4	2

Lösung:

i	x_i	y_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$y_i - \bar{y}$	$(y_i - \bar{y})^2$	$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$
1	2	3	– 1	1	1/6	1/36	– 1/6
2	2	2	– 1	1	– 5/6	25/36	5/6
3	4	4	1	1	7/6	49/36	7/6
4	1	2	– 2	4	– 5/6	25/36	10/6
5	5	4	2	4	7/6	49/36	14/6
6	4	2	1	1	– 5/6	25/36	– 5/6
$\sum$	18	17	0	12	0	174/36	5

$$\bar{x} = \frac{1}{6} \cdot \sum_{1}^{5} x_i = \frac{1}{6} \cdot 18 = 3\,; \qquad \bar{y} = \frac{1}{6} \cdot \sum_{1}^{5} y_i = \frac{1}{6} \cdot 17 = \frac{17}{6}$$

$$s_x^2 = \frac{1}{6-1} \cdot \sum_{1}^{5} (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{5} \cdot 12 = 2{,}4 \quad \Rightarrow \quad s_x = 1{,}5492$$

$$s_y^2 = \frac{1}{6-1} \cdot \sum_{1}^{5} (y_i - \bar{y})^2 = \frac{1}{5} \cdot \frac{174}{36} = 0{,}9667 \quad \Rightarrow \quad s_y = 0{,}9832$$

$$s_{xy} = \frac{1}{6-1} \cdot \sum_{1}^{5} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \frac{1}{5} \cdot 5 = 1$$