

Mathematik 3: Übungsblatt - Grundlagen (Zusatzaufgaben)

Hinweis:

Die folgenden Aufgaben setzen das Grundlagen-Übungsblatt (Fakultäten, Binomialkoeffizienten) fort und sind etwas anspruchsvoller.

1. Aufgabe:

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke soweit wie möglich (ohne Taschenrechner, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$):

a) $\frac{n! \cdot (n+2)!}{(n+1)! \cdot (n-1)!}$

b) $\frac{(n+1)! - n!}{n!}$ (Tipp: klammern Sie zuerst $n!$ im Zähler aus)

2. Aufgabe:

Beweisen Sie die folgenden Aussagen algebraisch (für $n, k \in \mathbb{N}_0$ mit $1 \leq k \leq n$):

a) **Additionstheorem / Pascalsche Regel:**

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$$

b) **Gewichtete Summe:**

$$\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}$$

Tipp: Zeigen Sie zunächst, dass $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$ gilt, und verwenden Sie anschließend die bereits bekannte Identität $\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} = 2^{n-1}$.