

Mathematik 3: Übungsblatt - Statistik 5 (Hypothesentests 2)

Zum Selbststudium wird empfohlen:

Kapitel "4.1 Ein Einführendes Beispiel" aus Lothar Papula, Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Band 3, 7. Auflage, Seiten 540 – 544.

Hilfreich sind auch die Übungsaufgaben 1) bis 5) auf S. 644/645.

1. Aufgabe:

Eine DHBW möchte wissen, wie gut ihre Studierenden über internationale aktuelle Nachrichten aus der Politik informiert sind. An 40 zufällige ausgewählte Studierende werden Fragen zu 100 Nachrichten der letzten zwei Monate gestellt. Im Durchschnitt können die Befragten 58 Fragen richtig beantworten, bei einer Stichproben-Standardabweichung von 3,2.

- a) Berechnen Sie ein 99%-Konfidenzintervall für die durchschnittlich von allen Studierenden der DHBW richtig beantwortete Anzahl μ der Fragen.

$$n = 40 \quad \bar{x} = 58 \quad s = 3,2 \quad 1 - \alpha = 0,99$$

gesucht: Konfidenzintervall für μ

$$\text{Formel: } \bar{x} - c \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + c \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Bestimmung von c : da $n > 30$, gilt $s^2 \approx \sigma^2$ und man verwendet die Standardnormalverteilung, anstatt der t -Verteilung.

$$\begin{aligned} P(-c \leq U \leq c) &= 0,99 \\ \Leftrightarrow \Phi(c) - \Phi(-c) &= 0,99 \\ \Leftrightarrow \Phi(c) - (1 - \Phi(c)) &= 0,99 \\ \Leftrightarrow 2\Phi(c) - 1 &= 0,99 \\ \Leftrightarrow \Phi(c) &= 0,995 \Rightarrow c = 2,58 \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für das Konfidenzintervall:

$$\begin{aligned} 58 - 2,58 \cdot \frac{3,2}{\sqrt{40}} &\leq \mu \leq 58 + 2,58 \cdot \frac{3,2}{\sqrt{40}} \\ \mathbf{56,695} &\leq \mu \leq \mathbf{59,305} \end{aligned}$$

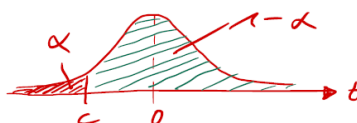
- b) Im Landesdurchschnitt Baden-Württemberg aller Studenten aller DHBWs ergeben sich 65 richtige Antworten. Testen Sie zum Signifikanzniveau von 5%, ob der Durchschnitt der richtigen Antworten an der DHBW niedriger ist als im Landesdurchschnitt.

$$\mu_0 = 65 \quad \alpha = 0,05$$

$$H_0 : \mu \geq \mu_0 = 65$$

$$H_1 : \mu < \mu_0 = 65$$

Es handelt sich um einen einseitigen Hypothesentest mit Abgrenzung nach unten (linksseitiger Hypothesentest).



Es gilt $P(U < c) = \alpha$ Testvariable $U = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$ Testwert $\hat{u} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{58 - 65}{\frac{3,2}{\sqrt{40}}} \approx -13,835$ Bestimmung kritischer Wert c :

$P(U < c) = 0,05 \Rightarrow \Phi(c) = 0,05 \Rightarrow$ nicht in der Tabelle der Standardnormalverteilung ablesbar.

Es gilt (aufgrund Symmetrie): $\Phi(-c) = 0,95 \Rightarrow c = -1,65$ Damit ergibt sich für den Ablehnungsbereich $\bar{A} = [-\infty; -1,65]$ $\hat{u}$ liegt im Ablehnungsbereich, also H_0 verwerfen! D. h. auf Basis der Stichprobe ist die durchschnittliche Anzahl der richtigen Antworten der DHBW unter dem Landesdurchschnitt.

- c) Wie würde der Test ausfallen, wenn die Stichprobengröße $n = 50$ zufällig ausgewählte Studierende wäre und in dieser Stichprobe bei gleicher Stichproben-Standardabweichung 62 Antworten richtig beantwortet würden?

Mit $n = 50$ und $\bar{x} = 62$, mit gleicher Standardabweichung ergibt sich

$$\hat{u} = \frac{62 - 65}{\frac{3,2}{\sqrt{50}}} \approx -6,630$$

Der Testwert liegt weiterhin im Ablehnungsbereich $\bar{A} = [-\infty; -1,65]$, also wird H_0 erneut verworfen. D. h. auch bei der größeren Stichprobe von $n = 50$ Studierenden ist die durchschnittliche Anzahl der richtigen Antworten der DHBW signifikant niedriger als im Landesdurchschnitt.

2. Aufgabe:

Die Personalabteilung eines Großunternehmens hat den Verdacht, dass die Mitarbeiter/innen die Mittagspause von max. 60 Minuten im Durchschnitt überziehen. Mit einer einfachen Stichprobe der Pausenlänge von 20 Mitarbeiter/innen soll getestet werden, ob die Zeiten eingehalten werden oder ob im Mittel überzogen wird. Die Auswertung der Stichprobe ergibt eine durchschnittliche Pausendauer von 70 Minuten und eine Stichproben-Standardabweichung von 15 Minuten. Die Pausendauer eines/r Mitarbeiters/in kann als normalverteilte Zufallsvariable angenommen werden.

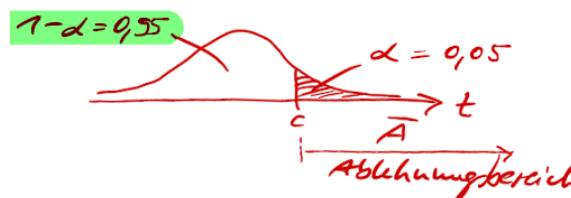
Formulieren Sie die Nullhypothese und die Gegenhypothese und testen Sie zum Signifikanzniveau 5%.

$$n = 20 \quad \mu_0 = 60 \quad \bar{x} = 70 \quad s = 15 \quad \alpha = 0,05$$

$$H_0 : \mu \leq \mu_0 = 60$$

$$H_1 : \mu > \mu_0 = 60$$

Es handelt sich um einen einseitigen Hypothesentest mit Abgrenzung nach oben (rechtsseitiger Hypothesentest). Da σ^2 unbekannt und $n \leq 30$, muss die t -Verteilung mit $n - 1 = 19$ Freiheitsgraden verwendet werden.



$$P(T \leq c) = 1 - \alpha = 0,95 \quad \text{Testwert } \hat{t} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{70 - 60}{\frac{15}{\sqrt{20}}} \approx 2,98$$

Bestimmung von c mit t -Verteilungstabelle: ablesen bei 19 Freiheitsgraden und $p = 0,95$ ($\alpha = 0,05$) ergibt

$$c = 1,729 \text{ damit Ablehnungsbereich } \bar{A} = [1,729; +\infty]$$

$\hat{t}$ liegt im Ablehnungsbereich, also H_0 verwerfen! D. h. im Durchschnitt, auf Basis der gezogenen Stichprobe, überziehen die Mitarbeiter die Mittagspause.

3. Aufgabe:

Ein Arbeiter braucht für die Bearbeitung eines Werkstücks im Durchschnitt 7 Minuten (420 sec). Ein Fachmann schlägt eine andere Bearbeitungsart vor, um eine Zeitersparnis zu erreichen. Die Effektivität seines Vorschlags will er mithilfe einer Stichprobe vom Umfang $n = 16$ testen. Führen Sie diesen Test zum Signifikanzniveau 5% und 1% durch. Gehen Sie davon aus, dass die Grundgesamtheit normalverteilt ist. Die Stichprobe ergab als Mittelwert 408 sec und eine Standardabweichung von 25,7 sec.

$$n = 16 \quad \mu_0 = 420 \quad \bar{x} = 408 \quad s = 25,7 \quad \alpha_1 = 0,05 \quad \alpha_2 = 0,01$$

$$H_0 : \mu \geq \mu_0 = 420$$

$$H_1 : \mu < \mu_0 = 420$$

Es handelt sich um einen einseitigen Hypothesentest mit Abgrenzung nach unten (linksseitiger Hypothesentest). Da σ^2 unbekannt und $n \leq 30$, muss die t -Verteilung mit $n - 1 = 15$ Freiheitsgraden verwendet werden.

$$P(T < c) = \alpha_1 \text{ bzw. } \alpha_2$$

$$\text{Testwert } \hat{t} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{408 - 420}{\frac{25,7}{\sqrt{16}}} \approx -1,8677$$

Bestimmung von c mit t -Verteilungstabelle: ablesen bei 15 Freiheitsgraden und $p = 0,95$ ($\alpha_1 = 0,05$) sowie $p = 0,99$ ($\alpha_2 = 0,01$) ergibt

$$c_1 = -1,753 \text{ und } c_2 = -2,602$$

$$\text{damit Ablehnungsbereich } \bar{A}_1 = [-\infty; -1,753] \text{ und } \bar{A}_2 = [-\infty; -2,602]$$

Bei $\alpha_1 = 0,05$ ist H_0 zu verwerfen! Bei $\alpha_2 = 0,01$ hingegen wird H_0 beibehalten. D.h. der Arbeiter hat keine Zeitersparnis durch die andere Bearbeitungsart.

4. Aufgabe:

Das Gewicht von Eiern der Güteklasse 2 ist normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 78$ g. Ein Kunde kauft 30 Eier und ermittelt für diese Eier den Mittelwert $\bar{x} = 75,83$ g und die Standardabweichung $s = 5,9$ g.

- a) Prüfen Sie zum Signifikanzniveau 5%, ob die Eier den Ansprüchen der Güteklasse 2 genügen oder nicht.

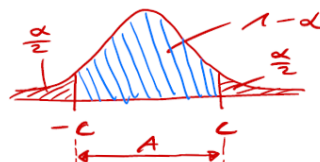
$$n = 30 \quad \mu_0 = 78 \text{ g} \quad \bar{x} = 75,83 \text{ g} \quad s = 5,9 \text{ g} \quad \alpha = 0,05$$

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

$$H_1 : \mu \neq \mu_0$$

Es handelt sich um einen zweiseitigen Hypothesentest. Da σ^2 unbekannt und $n \leq 30$, muss die t -Verteilung mit $n - 1 = 29$ Freiheitsgraden verwendet werden.

$$\text{Es gilt: } P(-c \leq T \leq c) = 1 - \alpha = 0,95$$



$$\text{Also } F(c) - F(-c) = F(c) - (1 - F(c)) = 2F(c) - 1$$

$$2F(c) - 1 = 0,95 \Rightarrow F(c) = 0,975$$

Ablesen in t -Verteilungstabelle bei 29 Freiheitsgraden und $p = 0,975$ (oder $\alpha = 0,025$) ergibt $c = 2,045$ und damit $A = [-2,045; 2,045]$

$$\text{Testwert } \hat{t} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{75,83 - 78}{\frac{5,9}{\sqrt{30}}} \approx -2,0145$$

$\Rightarrow H_0$ beibehalten, da $\hat{t}$ in A liegt. D.h. es gibt statistisch gesehen, auf Basis der gezogenen Stichprobe, keinen Hinweis darauf, dass die Eier nicht den Ansprüchen der Güteklasse 2 genügen.

- b) Gehen Sie bei den Eiern der Grundgesamtheit von einem Erwartungswert $\mu = 78$ g und einer Varianz von 16 g^2 aus. Führen Sie den Test mit einer Stichprobe von 40 Eiern durch, deren Mittelwert bei $75,88$ g liegt.

$n = 40$ $\mu_0 = 78$ g $\bar{x} = 75,88$ $\sigma^2 = 16$ $\alpha = 0,05$ Da die Varianz bekannt ist, wird zur Bestimmung der kritischen Grenze die Tabelle der Standardnormalverteilung verwendet.

$$\text{Testwert } \hat{u} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{75,88 - 78}{\frac{4}{\sqrt{40}}} \approx -3,352$$

Es gilt: $2\Phi(c) - 1 = 0,95$ also $\Phi(c) = 0,975$ damit $c = 1,96$ damit $A = [-1,96; 1,96]$ Der Testwert $\hat{u}$ liegt nun außerhalb von A , also H_0 verwerfen. D.h. auf Basis dieser Stichprobe sieht es so aus, dass die Eier nicht den Ansprüchen der Güteklasse 2 genügen.

- c) Was bedeutet bei dem Test b) der Fehler 2. Art? Was müsste man in diesem Fall tun, um die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art zu verringern?

Der Fehler 2. Art bedeutet hier, dass H_0 nicht verworfen würde (aufgrund einer zufällig "günstigen" Stichprobe), obwohl die Grundgesamtheit der Eier nicht den Ansprüchen der Güteklasse 2 genügt. Um in diesem Fall die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art zu verringern, müsste man eine größere Stichprobe ziehen.

5. Aufgabe:

Studierende beschwerten sich, dass die Klausuren in Statistik zu schwer seien. Der Dozent möchte dies natürlich im Sinne der Studierenden verbessern und lässt durch das Prüfungsamt die Metallklammern der Klausuren durch eine leichtere Variante aus Kunststoff ersetzen. Die Studierenden glauben aber nicht, dass dadurch die Klausuren leichter werden. Der Dozent möchte das beweisen und zieht eine einfache Stichprobe von 10 Klausuren, bei der er folgende Gewichte in Gramm misst:

65,28 65,84 64,47 63,82 66,64 62,55 65,74 64,90 65,87 65,29

Gehen Sie im Folgenden davon aus, dass es sich beim Gewicht der Klausur um eine normalverteilte Zufallsvariable handelt.

- a) Bestimmen Sie zum Konfidenzniveau 0,95 ein symmetrisches Schätzintervall für den Erwartungswert μ des Gewichts der Klausur.

$n = 10$ $\bar{x} = 65,04$ $s \approx 1,18$ (selbst ausrechnen, Formel siehe Skript) $1 - \alpha = 0,95$
 gesucht: Konfidenzintervall für μ

$$\text{Formel: } \bar{x} - c \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + c \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Bestimmung von c : da σ^2 unbekannt und $n \leq 30$, wird die Tabelle der t -Verteilung verwendet und $\sigma = s$ gesetzt.

Es gilt: $P(-c \leq X \leq c) = 0,95$



$$\begin{aligned} \Leftrightarrow F(c) - F(-c) &= 0,95 \\ \Leftrightarrow F(c) - (1 - F(c)) &= 0,95 \\ \Leftrightarrow 2F(c) - 1 &= 0,95 \\ \Leftrightarrow F(c) &= 0,975 \Rightarrow c = 2,262 \end{aligned}$$

(ablesen bei 9 Freiheitsgraden und $p = 0,975$ ($\alpha = 0,025$))

Damit ergibt sich das Konfidenzintervall:

$$\begin{aligned} 65,04 - 2,262 \cdot \frac{1,18}{\sqrt{10}} &\leq \mu \leq 65,04 + 2,262 \cdot \frac{1,18}{\sqrt{10}} \\ \mathbf{64,196} &\leq \mu \leq \mathbf{65,884} \end{aligned}$$

- b) Mit Metallklammer hatten die Klausuren früher ein durchschnittliches Gewicht von 65,86 g. Testen Sie jeweils zum Signifikanzniveau von 5% und 1% auf Basis der Stichprobe, ob die Klausuren jetzt leichter sind.

$$n = 10 \quad \mu_0 = 65,86 \text{ g} \quad \bar{x} = 65,04 \text{ g} \quad s = 1,18 \text{ g} \quad \alpha_1 = 0,05 \quad \alpha_2 = 0,01$$

$$H_0 : \mu \geq \mu_0 = 65,86$$

$$H_1 : \mu < \mu_0$$

Es handelt sich um einen einseitigen Hypothesentest mit Abgrenzung nach unten (linksseitiger Hypothesentest). Da σ^2 unbekannt und $n \leq 30$, muss die t -Verteilung mit $n - 1 = 9$ Freiheitsgraden verwendet werden.

$$P(T < c) = \alpha_1 \text{ bzw. } \alpha_2$$



$$\text{Testwert } \hat{t} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{65,04 - 65,86}{\frac{1,18}{\sqrt{10}}} \approx -2,1975$$

Bestimmung von c mit t -Verteilungstabelle: ablesen bei 9 Freiheitsgraden und $p = 0,95$ ($\alpha_1 = 0,05$) sowie $p = 0,99$ ($\alpha_2 = 0,01$) ergibt $c_1 = 1,833$ und $c_2 = 2,821$ damit Ablehnungsbereich $\bar{A}_1 = [-\infty; -1,833]$ und $\bar{A}_2 = [-\infty; -2,821]$

Bei $\alpha_1 = 0,05$ ist H_0 zu verwerfen! D. h. die Klausuren sind signifikant leichter geworden

(auf Basis der Stichprobe und der gewählten Irrtumswahrscheinlichkeit). Bei $\alpha_2 = 0,01$ hingegen muss H_0 beibehalten werden und die Klausuren sind genauso schwer wie vorher.

- c) Was bedeutet bei dem Test b) mit Signifikanzniveau 5% der Fehler 1. Art?

Der Fehler 1. Art bedeutet hier, dass H_0 verworfen wird, obwohl die Klausuren (Grundgesamtheit) noch genauso schwer sind wie vorher.

6. Aufgabe:

Eine Maschine stellt Linsen für den Bau eines Lasergerätes her. Die Dicke der Linsen darf dabei um maximal einen Mikrometer von dem Idealmaß (Norm) abweichen. Um den Ausschussanteil der Linsen möglichst gering zu halten, wird die Maschine regelmäßig alle drei Tage neu justiert. Der Firma gelingt es hiermit den Anteil der Linsen, die der Norm nicht entsprechen, bei maximal 4% zu halten.

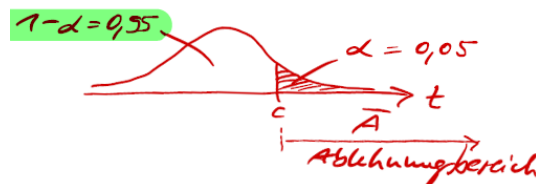
- a) Aus Kostengründen sollen die Intervalle für die Neujustierung erhöht werden. Ein Mitarbeiter vermutet, dass der Ausschussanteil dadurch deutlich erhöht wird. Er möchte dies überprüfen und entnimmt der Tagesproduktion eine Stichprobe von 250 Linsen und misst deren Dicke. Gesucht ist eine Entscheidungsregel für diesen Test. Das Signifikanzniveau soll hierbei 5% betragen.

$$p_0 = 0,04 \quad n = 250 \quad \alpha = 0,05 \quad k = \text{Anzahl fehlerhafte Teile in der Stichprobe}$$

$$H_0 : p \leq p_0$$

$$H_1 : p > p_0$$

p ist binomialverteilt. Es handelt sich um einen einseitigen Hypothesentest mit Abgrenzung nach oben (rechtsseitiger Hypothesentest).



$$\text{Es gilt } n \cdot p_0(1 - p_0) = 250 \cdot 0,04(1 - 0,04) = 9,6 > 9$$

D.h. die Bedingung für eine umfangreiche Stichprobe ist erfüllt, und die binomialverteilte Schätzfunktion $\hat{P} = \frac{X}{n}$ verhält sich annähernd normalverteilt.

$$\text{Die Testvariable lautet } \hat{u} = \sqrt{\frac{n}{p_0(1 - p_0)}} \cdot (\hat{p} - p_0) \text{ mit } \hat{p} = \frac{k}{n} = \frac{k}{250}$$

$$\text{damit } \hat{u} = \sqrt{\frac{250}{0,04 \cdot 0,96}} \cdot \left(\frac{k}{250} - 0,04\right) = 80,69 \cdot \left(\frac{k}{250} - 0,04\right) = 0,32k - 3,23$$

$$\text{Bestimmung von } c: P(U \leq c) = 1 - \alpha = 0,95 \text{ also } \Phi(c) = 0,95 \Rightarrow c = 1,65$$

$\Rightarrow$ **gesuchte Entscheidungsregel:**

$$H_0 \text{ beibehalten, wenn } \hat{u} \leq c \text{ also } 0,32k - 3,23 \leq 1,65 \Rightarrow k \leq 15,25$$

D.h. wenn in der Stichprobe höchstens 15 schlechte Linsen sind, wird H_0 beibehalten.

- b) Wie lautet der Fehler 1. Art beim obigen Test?

Der Fehler 1. Art wäre hier, dass H_0 aufgrund einer "ungünstigen" Stichprobe abgelehnt würde, obwohl der Ausschussanteil durch die Erhöhung der Intervalle für die Neujustierung der Maschine in Wirklichkeit nicht gestiegen ist.

7. Aufgabe:

Ein Unternehmen bezieht Metallteile von einem Zulieferer. Laut Liefervertrag kann das Unternehmen die Lieferung ablehnen, wenn mehr als 3% der Teile defekt sind. Das Unternehmen glaubt bei einer Lieferung, dass es mehr sind. Es führt einen Hypothesentest mit einem Stichprobenumfang von 400 und einer Irrtumswahrscheinlichkeit (Signifikanzniveau) von 5% durch.

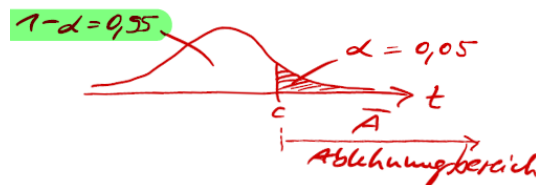
- a) Bestimmen Sie die Null- und Alternativhypothese und den Annahmebereich des Tests.

$$n = 400 \quad p_0 = 0,03 \quad \hat{p} = 16/400 = 0,04 \quad \alpha = 0,05$$

$$H_0 : p \leq p_0$$

$$H_1 : p > p_0$$

p ist binomialverteilt. Es handelt sich um einen einseitigen Hypothesentest mit Abgrenzung nach oben (rechtsseitiger Hypothesentest).



Es gilt $n \cdot p_0(1 - p_0) = 400 \cdot 0,03(1 - 0,03) = 11,64 > 9$ D.h. die Bedingung für eine umfangreiche Stichprobe ist erfüllt, und die binomialverteilte Schätzfunktion $\hat{P} = \frac{X}{n}$ verhält sich annähernd normalverteilt.

Die Testvariable lautet $\hat{u} = \sqrt{\frac{n}{p_0(1 - p_0)}} \cdot (\hat{p} - p_0)$ mit $\hat{p} = \frac{k}{n} = \frac{k}{400}$

$$\text{damit } \hat{u} = \sqrt{\frac{400}{0,03 \cdot 0,97}} \cdot \left(\frac{k}{400} - 0,03\right) = 117,24 \cdot \left(\frac{k}{400} - 0,03\right) = 0,29k - 3,52$$

Bestimmung von c : $P(U \leq c) = 1 - \alpha = 0,95$ also $\Phi(c) = 0,95 \Rightarrow c = 1,65$

$\Rightarrow$ **gesuchte Entscheidungsregel:** H_0 beibehalten, wenn $\hat{u} \leq c$
also $0,29k - 3,52 \leq 1,65 \Rightarrow k \leq 17,83$

D.h. wenn in der Stichprobe höchstens 17 defekte Teile sind, wird H_0 beibehalten.

- b) Welche Entscheidung trifft das Unternehmen, wenn bei der Stichprobe 16 Teile defekt sind?

Bei $k = 16$ defekten Teilen wird H_0 beibehalten und die Lieferung wird angenommen.

Oder $\hat{u}$ ausrechnen, mit $\hat{p} = \frac{k}{n} = \frac{k}{400} = \frac{16}{400} = 0,04$ ergibt $\hat{u} = 1,172 \leq c$, also H_0 beibehalten.

Anhang: Lösung der Aufgaben mit R

Aufgabe 1a) – Konfidenzintervall, $n = 40$, $\bar{x} = 58$, $s = 3,2$, $1 - \alpha = 0,99$ (Normalverteilung, da $n > 30$):

```
> c_wert <- qnorm(0.995)
> c_wert
[1] 2.575829
> 58 - c_wert * 3.2/sqrt(40)
[1] 56.69672
> 58 + c_wert * 3.2/sqrt(40)
[1] 59.30328
```

Aufgabe 1b) – linksseitiger Test, $\mu_0 = 65$:

```
> u_wert <- (58 - 65) / (3.2/sqrt(40))
> u_wert
[1] -13.83496
> qnorm(0.05) # kritischer Wert c
[1] -1.644854
```

$\Rightarrow \hat{u} \approx -13,835$ liegt im Ablehnungsbereich $\bar{A} = (-\infty, -1,645]$, H_0 wird verworfen.

Aufgabe 1c) – gleicher Test mit $n = 50$, $\bar{x} = 62$:

```
> u_wert <- (62 - 65) / (3.2/sqrt(50))
> u_wert
[1] -6.629126
```

$\Rightarrow$ weiterhin im Ablehnungsbereich, H_0 wird erneut verworfen.

Aufgabe 2 – rechtsseitiger Test, $n = 20$, $\mu_0 = 60$, $\bar{x} = 70$, $s = 15$, t -Verteilung mit 19 FG:

```
> t_wert <- (70 - 60) / (15/sqrt(20))
> t_wert
[1] 2.981424
> qt(0.95, df = 19) # kritischer Wert c
[1] 1.729133
```

$\Rightarrow \hat{t} \approx 2,981 > c = 1,729$, also H_0 verwerfen.

Aufgabe 3 – linksseitiger Test, $n = 16$, $\mu_0 = 420$, $\bar{x} = 408$, $s = 25,7$, t -Verteilung mit 15 FG:

```
> t_wert <- (408 - 420) / (25.7/sqrt(16))
> t_wert
[1] -1.867704
> qt(0.05, df = 15) # c1 zu  $\alpha_1 = 0,05$ 
[1] -1.75305
> qt(0.01, df = 15) # c2 zu  $\alpha_2 = 0,01$ 
[1] -2.60248
```

$\Rightarrow$ bei $\alpha_1 = 0,05$: $\hat{t} = -1,868 < c_1 = -1,753$, H_0 verwerfen. Bei $\alpha_2 = 0,01$: $\hat{t} = -1,868 > c_2 = -2,602$, H_0 beibehalten.

Aufgabe 4a) – zweiseitiger Test, $n = 30$, $\mu_0 = 78$, $\bar{x} = 75,83$, $s = 5,9$, t -Verteilung mit 29 FG:

```
> t_wert <- (75.83 - 78) / (5.9/sqrt(30))
> t_wert
[1] -2.014505
> qt(0.975, df = 29)
[1] 2.04523
```

$\Rightarrow |\hat{t}| = 2,015 < c = 2,045$, also H_0 beibehalten.

Aufgabe 4b) – gleicher Test, $n = 40$, $\bar{x} = 75,88$, $\sigma^2 = 16$ bekannt (Normalverteilung):

```
> u_wert <- (75.88 - 78) / (4/sqrt(40))
> u_wert
[1] -3.352014
> qnorm(0.975)
[1] 1.959964
 $\Rightarrow |\hat{u}| = 3,352 > c = 1,960$ , also  $H_0$  verwerfen.
```

Aufgabe 5a) – Konfidenzintervall, $n = 10$, $\bar{x} = 65,04$, $s = 1,18$, $1 - \alpha = 0,95$, t -Verteilung mit 9 FG:

```
> c_wert <- qt(0.975, df = 9)
> c_wert
[1] 2.262157
> 65.04 - c_wert * 1.18/sqrt(10)
[1] 64.19588
> 65.04 + c_wert * 1.18/sqrt(10)
[1] 65.88412
```

Aufgabe 5b) – linksseitiger Test, $\mu_0 = 65,86$:

```
> t_wert <- (65.04 - 65.86) / (1.18/sqrt(10))
> t_wert
[1] -2.197515
> qt(0.95, df = 9) #  $c_1$  zu  $\alpha_1 = 0,05$ 
[1] 1.833113
> qt(0.99, df = 9) #  $c_2$  zu  $\alpha_2 = 0,01$ 
[1] 2.821438
```

$\Rightarrow$ bei $\alpha_1 = 0,05$: $\hat{t} = -2,198 < -c_1 = -1,833$, H_0 verwerfen. Bei $\alpha_2 = 0,01$: $\hat{t} = -2,198 > -c_2 = -2,821$, H_0 beibehalten.

Aufgabe 6a) – rechtsseitiger Anteilswert-Test, $n = 250$, $p_0 = 0,04$, $\alpha = 0,05$ (Normalverteilungsapproximation):

```
> n <- 250; p0 <- 0.04; alpha <- 0.05
> c_wert <- qnorm(1 - alpha)
> c_wert
[1] 1.644854
> u_hat <- function(k) (k/n - p0) / sqrt(p0*(1-p0)/n)
> k <- 0:30
> max(k[u_hat(k) <= c_wert]) # größtes  $k$  im Beibehaltungsbereich
[1] 15
```

$\Rightarrow H_0$ wird beibehalten, solange höchstens 15 Linsen fehlerhaft sind.

Aufgabe 7a)+b) – rechtsseitiger Anteilswert-Test, $n = 400$, $p_0 = 0,03$, $\alpha = 0,05$:

```
> n <- 400; p0 <- 0.03; alpha <- 0.05
> c_wert <- qnorm(1 - alpha)
> u_hat <- function(k) (k/n - p0) / sqrt(p0*(1-p0)/n)
> k <- 0:40
> max(k[u_hat(k) <= c_wert])
[1] 17
> u_hat(16) # Testwert für die konkrete Stichprobe
[1] 1.172421
```

$\Rightarrow H_0$ wird beibehalten, solange höchstens 17 Teile defekt sind; bei $k = 16$ defekten Teilen ($\hat{u} \approx 1,172 < c = 1,645$) wird die Lieferung angenommen.