

Mathematik 3: Übungsblatt - Statistik 4 (Hypothesentests 1)

Allgemeine Vorgehensweise eines Hypothesentests:

1. Formulierung von Nullhypothese H_0 und Gegenhypothese (Alternativhypothese) H_1
2. Festlegung des Signifikanzniveaus α
3. Auswahl eines geeigneten statistischen Testverfahrens
4. Ermittlung des Ablehnungsbereichs
5. Berechnung des Wertes der Prüfgröße
6. Anwendung der Entscheidungsregel und Interpretation der Ergebnisse

Zusammenhang zwischen Test und den entsprechenden Hypothesen:

$H_0 : p \geq p_0 \quad H_1 : p < p_0$	Linksseitiger Test
$H_0 : p \leq p_0 \quad H_1 : p > p_0$	Rechtsseitiger Test
$H_0 : p = p_0 \quad H_1 : p \neq p_0$	Beidseitiger (zweiseitiger) Test

Fehler beim Testen von Hypothesen:

Nachdem man eine Stichprobe gezogen hat, ist man aufgrund der vorher festgelegten Entscheidungsregel zu einem Ergebnis gekommen.

Trotzdem kann das Ergebnis falsch sein – entweder, weil die angenommene Hypothese von Anfang an falsch war, man aber (aufgrund einer zufällig "günstigen" Stichprobe) zum Ergebnis kam, dass sie stimmt, oder weil die Hypothese richtig war, dies aber (aufgrund einer zufällig "ungünstigen" Stichprobe) nicht erkannt wurde.

	H_0 ist wahr	H_0 ist falsch
Ergebnis im Annahmebereich	Entscheidung richtig	Fehler 2. Art (β -Fehler)
Ergebnis im Ablehnungsbereich	Fehler 1. Art (α -Fehler)	Entscheidung richtig

Der **Fehler 1. Art** (auch α -Fehler) tritt auf, wenn H_0 wahr ist, aber fälschlicherweise verworfen wird. Die Wahrscheinlichkeit für diesen Fehler entspricht dem Signifikanzniveau α .

Der **Fehler 2. Art** (auch β -Fehler) tritt auf, wenn H_0 falsch ist, aber (weil das Stichprobenergebnis im Annahmebereich liegt) irrtümlich nicht verworfen wird. Die Wahrscheinlichkeit für einen β -Fehler lässt sich nur berechnen, wenn die tatsächliche Erfolgswahrscheinlichkeit p_1 bekannt ist.

1. Aufgabe:

- a) Die Nullhypothese $H_0 : p = 0,6$ soll gegen die Alternativhypothese $H_1 : p > 0,6$ bei einem Stichprobenumfang $n = 100$ und einer Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 2\%$ getestet werden. Bestimmen Sie den Ablehnungsbereich.

$$n = 100 \quad p_0 = 0,6 \quad \alpha = 0,02$$

$$H_0 : p = p_0 = 0,6$$

$$H_1 : p > 0,6$$

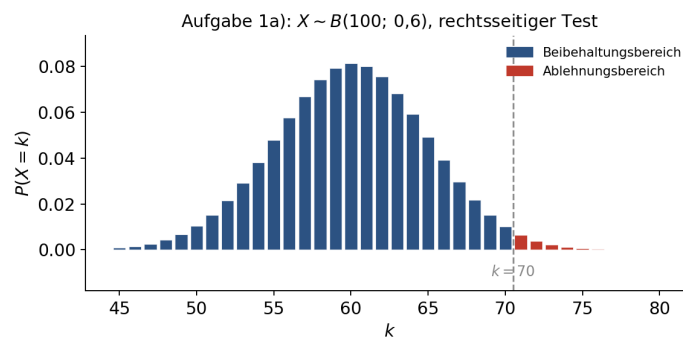
Es handelt sich um einen rechtsseitigen Test. Die Zufallsvariable X (Anzahl der Treffer) ist binomialverteilt mit $X \sim B(n = 100; p)$.

Der Ablehnungsbereich hat die Gestalt $\bar{A} = \{k + 1, \dots, 100\}$. Der Wert von k ist so zu wählen, dass gilt:

$$P(X \geq k + 1) \leq \alpha \Leftrightarrow 1 - P(X \leq k) \leq 0,02$$

(Tabelle bzw. TR): $k = 70$ mit $1 - P(X \leq 70) \approx 0,0148$

$\Rightarrow$ **Ablehnungsbereich $\bar{A} = \{71, \dots, 100\}$**



- b) Die Nullhypothese $H_0 : p = 0,4$ soll gegen die Alternativhypothese $H_1 : p < 0,4$ bei einem Stichprobenumfang $n = 100$ und einer Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 10\%$ getestet werden. Bestimmen Sie den Ablehnungsbereich.

$$n = 100 \quad p_0 = 0,4 \quad \alpha = 0,1$$

$$H_0 : p = p_0 = 0,4$$

$$H_1 : p < 0,4$$

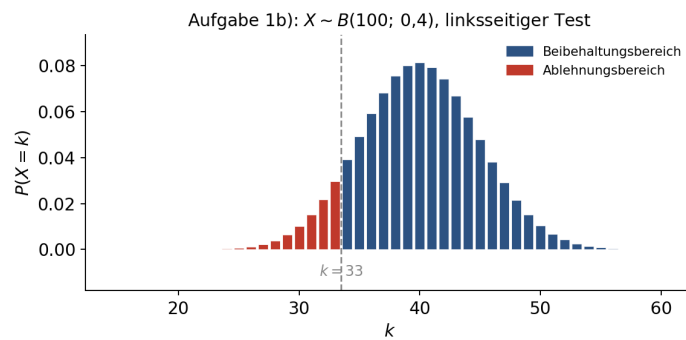
Es handelt sich um einen linksseitigen Test. Die Zufallsvariable X (Anzahl der Treffer) ist binomialverteilt mit $X \sim B(n = 100; p)$.

Der Ablehnungsbereich hat die Gestalt $\bar{A} = \{0, \dots, k\}$. Der Wert von k ist so zu wählen, dass gilt:

$$P(X \leq k) \leq \alpha \Leftrightarrow P(X \leq k) \leq 0,1$$

(Tabelle bzw. TR): $k = 33$ mit $P(X \leq 33) \approx 0,0913$

$\Rightarrow$ **Ablehnungsbereich $\bar{A} = \{0, \dots, 33\}$**



2. Aufgabe:

Ein Fußballspieler behauptet, beim Elfmeterschießen eine Trefferquote von 95 % zu erreichen. Um seine Behauptung zu untermauern, schießt er 50 Elfmeter.

- a) Wie viele Treffer muss er erzielen, damit seine Behauptung mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5 % glaubhaft ist?

$$n = 50 \quad p_0 = 0,95 \quad \alpha = 0,05 \quad X = \text{Anzahl der Treffer}, X \sim B(n = 50; p)$$

$$H_0 : p = p_0 = 0,95$$

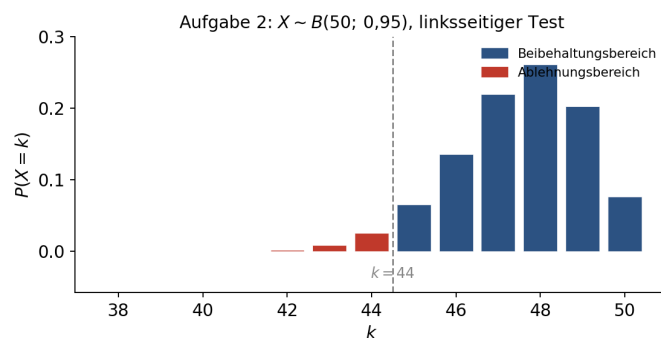
$$H_1 : p < 0,95$$

Es handelt sich um einen linksseitigen Test. Der Ablehnungsbereich hat die Gestalt $\bar{A} = \{0, \dots, k\}$. Der Wert von k ist so zu wählen, dass gilt:

$$P(X \leq k) \leq \alpha \Leftrightarrow P(X \leq k) \leq 0,05$$

(Tabelle bzw. TR): $k = 44$ mit $P(X \leq 44) \approx 0,0378$

$\Rightarrow$ **Ablehnungsbereich** $\bar{A} = \{0, \dots, 44\}$, d. h. H_0 wird beibehalten (die Behauptung gilt als glaubhaft), sobald der Spieler **mindestens 45** der 50 Elfmeter verwandelt.



- b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit irrt man, wenn seine Behauptung bereits bei 45 Treffern verworfen wird?

Wird die Behauptung schon bei 45 Treffern verworfen, so ist der (nun größere) Ablehnungsbereich $\bar{A} = \{0, \dots, 45\}$.

(Tabelle bzw. TR): $P(X \leq 45) \approx 0,1036$

$\Rightarrow$ Man irrt sich (Fehler 1. Art) in diesem Fall mit einer Wahrscheinlichkeit von rund **10,4 %**.

3. Aufgabe:

Eine Person behauptet, hellseherische Fähigkeiten zu haben. Um die Aussage zu überprüfen, wird 1000-mal gewürfelt und die Person muss jeweils die richtige Augenzahl vorhersagen. Wie viele richtige Vorhersagen muss die Person machen, damit ihr die Fähigkeiten mit einer Wahrscheinlichkeit von 99,5 % tatsächlich zugestanden werden?

Man geht zunächst von der Nullhypothese aus, dass die Person keine hellseherischen Fähigkeiten besitzt. In diesem Fall ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie die richtige Augenzahl rein zufällig rät, $p_0 = \frac{1}{6}$. Getestet werden soll, ob die Person hellseherische Fähigkeiten besitzt, also ob die tatsächliche Trefferwahrscheinlichkeit größer ist.

$n = 1000$ $p_0 = \frac{1}{6}$ $X = \text{Anzahl der richtig vorhergesagten Zahlen, } X \sim B(n = 1000; p)$

$$H_0 : p = p_0 = \frac{1}{6}$$

$$H_1 : p > \frac{1}{6}$$

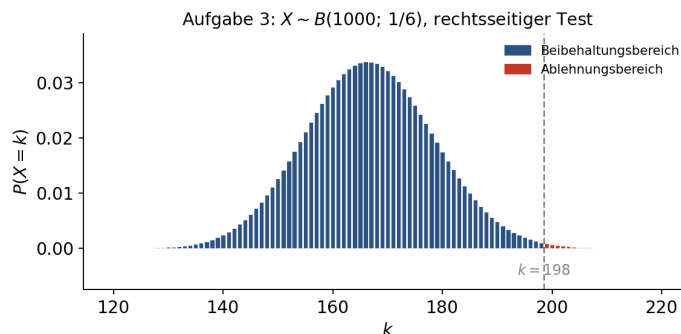
Es handelt sich um einen rechtsseitigen Test. Aufgrund der geforderten Sicherheitswahrscheinlichkeit von 99,5 % ergibt sich eine Irrtumswahrscheinlichkeit von $\alpha = 0,005$.

Der Ablehnungsbereich hat die Gestalt $\bar{A} = \{k + 1, \dots, 1000\}$. Der Wert von k ist so zu wählen, dass gilt:

$$P(X \geq k + 1) \leq \alpha \Leftrightarrow 1 - P(X \leq k) \leq 0,005$$

(Tabelle bzw. TR): $k = 198$ mit $1 - P(X \leq 198) \approx 0,0041$

$\Rightarrow$ **Ablehnungsbereich** $\bar{A} = \{199, \dots, 1000\}$, d.h. die Person muss **mindestens 199** richtige Vorhersagen treffen, damit H_0 verworfen und ihr die hellseherischen Fähigkeiten zugestanden werden.



4. Aufgabe:

Ein Elektronikversandhändler behauptet, dass höchstens 5 % aller Bestellungen später als vier Tage beim Kunden eintreffen. Ein Konkurrent bezweifelt diese Angabe und möchte sie überprüfen. Er gibt dazu 7 Bestellungen mit unterschiedlichen Lieferadressen auf und zählt, wie viele davon später als vier Tage eintreffen. Wie lautet der Beibehaltungsbereich für die Nullhypothese, wenn die Fehlerwahrscheinlichkeit 1. Art höchstens 5 % betragen soll?

$n = 7$ $p_0 = 0,05$ $\alpha = 0,05$ $X = \text{Anzahl der Bestellungen (von 7), die später als vier Tage eintreffen}$

$$H_0 : p \leq p_0 = 0,05$$

$$H_1 : p > p_0$$

X ist binomialverteilt mit $X \sim B(n = 7; p)$. Es handelt sich um einen rechtsseitigen Test.

Es gilt $n \cdot p_0(1 - p_0) = 7 \cdot 0,05(1 - 0,05) = 0,3325 < 9$. Die Bedingung für eine umfangreiche Stichprobe ist also **nicht** erfüllt – die Normalverteilungsapproximation darf hier nicht verwendet werden (**Gegensatz zu Aufgabe 3**, wo $n = 1000$ groß genug für eine unproblematische Anwendung der Tabellen war). Stattdessen muss mit der exakten Binomialverteilung (im Grenzfall $p = p_0 = 0,05$) gerechnet werden.

Gesucht ist der kleinste Wert k , für den gilt: $P(X \geq k \mid p = 0,05) \leq \alpha = 0,05$

Wahrscheinlichkeiten der Binomialverteilung $B(7; 0,05)$:

$$P(X = 0) = \binom{7}{0} \cdot 0,05^0 \cdot 0,95^7 \approx 0,6983$$

$$P(X = 1) = \binom{7}{1} \cdot 0,05^1 \cdot 0,95^6 \approx 0,2573$$

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) \approx 0,3017 > 0,05$$

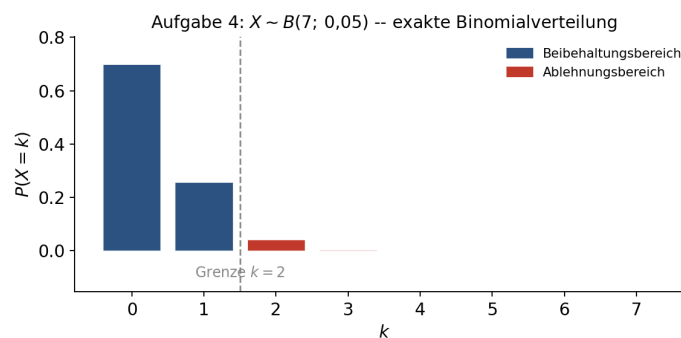
$$P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) \approx 0,0444 \leq 0,05$$

$\Rightarrow$ mit $k = 2$ ist die Bedingung $P(X \geq k) \leq 0,05$ zum ersten Mal erfüllt.

$\Rightarrow$ **Ablehnungsbereich:** $\bar{A} = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, d. h. H_0 wird verworfen, sobald 2 oder mehr der 7 Bestellungen später als vier Tage eintreffen.

$\Rightarrow$ **Beibehaltungsbereich:** $A = \{0, 1\}$, d. h. H_0 wird beibehalten, solange höchstens 1 von 7 Bestellungen später als vier Tage eintrifft.

Die tatsächliche Fehlerwahrscheinlichkeit 1. Art beträgt dabei $P(X \geq 2 \mid p = 0,05) \approx 4,44\%$ und liegt damit (bedingt durch die diskrete Verteilung bei kleinem Stichprobenumfang) etwas unter dem vorgegebenen Signifikanzniveau von 5 %.



5. Aufgabe:

Um die Einhaltung eines Sollmaßes von 15 mm für den Durchmesser automatisch hergestellter Werkstücke zu prüfen, werden der Serienfertigung willkürlich 30 Werkstücke entnommen und deren Durchmesser gemessen. Aus den Messwerten erhält man das Stichprobenmittel $\bar{x} = 14,84$ mm und die Stichprobenvarianz $s^2 = 0,09$ mm². Entscheiden Sie mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 0,02, ob das Sollmaß eingehalten wird.

$$n = 30 \quad \mu_0 = 15 \text{ mm} \quad \bar{x} = 14,84 \text{ mm} \quad s^2 = 0,09 \text{ mm}^2 (\Rightarrow s = 0,3 \text{ mm}) \quad \alpha = 0,02$$

$$H_0 : \mu = \mu_0 = 15 \text{ mm}$$

$$H_1 : \mu \neq \mu_0$$

Im Gegensatz zu den vorherigen Aufgaben wird hier nicht ein **Anteilswert** p , sondern ein **Mittelwert** μ einer normalverteilten Grundgesamtheit getestet, und zwar bei unbekannter

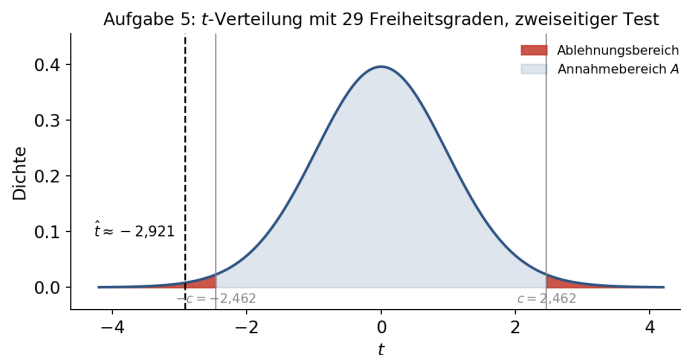
Varianz σ^2 . Es handelt sich um einen zweiseitigen Test mit der Testvariable $T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$, die einer t -Verteilung mit $n - 1 = 29$ Freiheitsgraden genügt (die Faustregel $n > 30$ für eine Normalverteilungsapproximation ist mit $n = 30$ hier knapp nicht erfüllt).

Bestimmung der kritischen Grenze c :

$$P(-c \leq T \leq c)_{H_0} = 1 - \alpha = 0,98 \Rightarrow 2F(c) - 1 = 0,98 \Rightarrow F(c) = 0,99$$

Aus der t -Verteilungstabelle mit 29 Freiheitsgraden: $c = t_{0,99;29} = 2,462$

Annahmebereich $A = [-2,462; 2,462]$



$$\text{Testwert } \hat{t} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{14,84 - 15}{0,3/\sqrt{30}} \approx -2,921$$

Da $|\hat{t}| = 2,921 > 2,462$, liegt der Testwert außerhalb von A , also im Ablehnungsbereich.

$\Rightarrow H_0$ wird verworfen. D.h. das Sollmaß von 15 mm wird auf Basis der Stichprobe **nicht** eingehalten – der Produktionsprozess sollte überprüft werden.

Anhang: Lösung der Aufgaben mit R

Aufgabe 1a) – rechtsseitiger Test, $X \sim B(100; 0,6)$:

```
> 1 - pbinom(70, 100, 0.6)
```

```
[1] 0.01477532
```

```
> 1 - pbinom(69, 100, 0.6)
```

```
[1] 0.02478282
```

$\Rightarrow k = 70$ ist der größte Wert mit $1 - P(X \leq k) \leq 0,02$.

Aufgabe 1b) – linksseitiger Test, $X \sim B(100; 0,4)$:

```
> pbinom(33, 100, 0.4)
```

```
[1] 0.0912536
```

```
> pbinom(34, 100, 0.4)
```

```
[1] 0.1303365
```

$\Rightarrow k = 33$ ist der größte Wert mit $P(X \leq k) \leq 0,1$.

Aufgabe 2) – linksseitiger Test, $X \sim B(50; 0,95)$:

```
> pbinom(44, 50, 0.95)
```

```
[1] 0.03777617
```

```
> pbinom(45, 50, 0.95)
```

```
[1] 0.1036168
```

$\Rightarrow$ a) $k = 44$ (Ablehnungsbereich $\{0, \dots, 44\}$); b) tatsächliche Irrtumswahrscheinlichkeit bei $\bar{A} = \{0, \dots, 45\}$ ist 10,36 %.

Aufgabe 3 – rechtsseitiger Test, $X \sim B(1000; 1/6)$:

```
> 1 - pbinom(198, 1000, 1/6)
```

```
[1] 0.004062640
```

```
> 1 - pbinom(197, 1000, 1/6)
```

```
[1] 0.005147667
```

$\Rightarrow k = 198$ ist der größte Wert mit $1 - P(X \leq k) \leq 0,005$.

Aufgabe 4 – rechtsseitiger Test, kleine Stichprobe, $X \sim B(7; 0,05)$:

```
> dbinom(0:1, 7, 0.05)
```

```
[1] 0.6983373 0.2572822
```

```
> pbinom(1, 7, 0.05)
```

```
[1] 0.9556195
```

```
> 1 - pbinom(1, 7, 0.05)
```

```
[1] 0.04438054
```

$\Rightarrow$ Beibehaltungsbereich $A = \{0, 1\}$, da $P(X \geq 2) \approx 4,44\% \leq 5\%$, aber $P(X \geq 1) \approx 30,17\% > 5\%$.

Aufgabe 5 – zweiseitiger t -Test, $\mu_0 = 15$, $n = 30$, $s = 0,3$:

```
> qt(0.99, df = 29)
```

```
[1] 2.462021
```

```
> t_wert <- (14.84 - 15) / (0.3 / sqrt(30))
```

```
> t_wert
```

```
[1] -2.921187
```

```
> 2 * pt(-abs(t_wert), df = 29) # p-Wert
```

```
[1] 0.006687630
```

$\Rightarrow |\hat{t}| = 2,921 > c = 2,462$ (bzw. p -Wert $\approx 0,67\% < \alpha = 2\%$), also H_0 verwerfen.