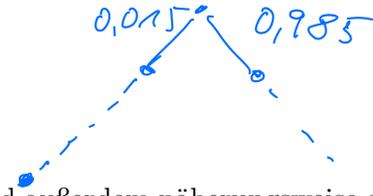


Mathematik 3: Übungsblatt - Wahrscheinlichkeitsverteilungen 2

1. Aufgabe:

Die Produktion bestimmter Bauelemente erfolgt mit einer Ausschuss-Quote von 1.5%. Zu bestimmen ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich in einer Lieferung von 20 Bauelementen

- höchstens ein unbrauchbares befindet
- genau zwei unbrauchbare befinden
- mehr als zwei unbrauchbare befinden.



Lösen Sie diese Aufgaben mit Hilfe der **Binomialverteilung** und außerdem näherungsweise auf Basis des Grenzwertsatzes von Poisson mit der **Poissonverteilung** mit dem Taschenrechner und mit R.

1. Lösung (ohne R):

Lösung mit Binomialverteilung:

\bar{A} ist das Ereignis "Bauelement ist qualitätsgerecht". Ferner ist $P(A) = 0.015$, $P(\bar{A}) = 1 - 0.015 = 0.985$. Die Zufallsgröße X bezeichne die Anzahl der unbrauchbaren Bauelemente. Es ist $n = 20$.

Man erhält:

- Höchstens ein unbrauchbares Bauelement bedeutet, kein oder ein Bauelement ist unbrauchbar. Gesucht ist also

$$P(X = 0 \cup X = 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = \binom{20}{0} \cdot 0.015^0 \cdot 0.985^{20} + \binom{20}{1} \cdot 0.015^1 \cdot 0.985^{19} = 0.9643$$

$$P(X = 2) = \binom{20}{2} \cdot 0.015^2 \cdot 0.985^{18} = 0.0326 \quad \text{3,26\%}$$

Pfadtregel für zwei 2 Ausschuss

- Bezeichnet man mit B das Ereignis, dass mehr als zwei Bauelemente unbrauchbar sind, so ist \bar{B} das Ereignis, dass höchstens zwei Bauelemente unbrauchbar sind. Es folgt

$$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)] = 1 - 0.9643 - 0.0326 = 0.0031$$

Lösung mit Poissonverteilung:

Gemäß Grenzwertsatz von Poisson ergibt sich näherungsweise der Parameter λ der Poissonverteilung zu $\lambda = n \cdot p = 20 \cdot 0.015 = 0.3$.

- Damit folgt

$$P(X = 0 \cup X = 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{0.3^0}{0!} \cdot e^{-0.3} + \frac{0.3^1}{1!} \cdot e^{-0.3} = 0.9631$$

-

$$P(X = 2) = \frac{0.3^2}{2} \cdot e^{-0.3} = 0.0333$$

-

$$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - 0.9631 - 0.0333 = 0.0036$$

2. Lösung (mit R):

Für die Binomialverteilung wird das Bernoulli-Schema angewendet. Man erhält:

a) Höchstens einer: $P(X = 0) + P(X = 1)$ und es gilt: $P(X = x) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot q^{n-x}$

$$P(X = 0) = \binom{20}{0} \cdot 0.015^0 \cdot 0.985^{20} = 0.7391 \quad \text{in R: } > \text{dbinom}(0,20,0.015)$$

$$P(X = 1) = \binom{20}{1} \cdot 0.015^1 \cdot 0.985^{19} = 0.2251 \quad \text{in R: } > \text{dbinom}(1,20,0.015)$$

$$\Rightarrow P(X = 0) + P(X = 1) \approx \mathbf{0.9642}$$

Einfacher in R: `> pbinom(1,20,0.015,lower.tail=TRUE)`

Für die Poissonverteilung gilt als **Faustregel**: $np < 10$, also $20 \cdot 0.015 = 0.3 < 10$ (passt) und $n > 1500 \cdot p \Rightarrow 1500 \cdot 0.015 = 22.5 \Rightarrow 20 > 22.5$ (passt nicht ganz \rightarrow Faustregel).
Man erhält:

Poisson: **0.9631** $\Rightarrow P(X = x) = \frac{\mu^x}{x!} \cdot e^{-\mu} > \text{ppois}(1,20 \cdot 0.015, \text{lower.tail}=\text{TRUE})$

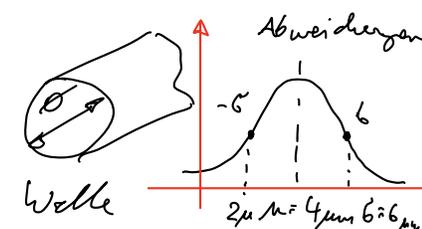
b) Binom: **0.0326** `> dbinom(2,20,0.015)`

Poisson: **0.0333** `> dpois(2,20*0.015)`

c) Binom: **0.0031** `> pbinom(2,20,0.015,lower.tail=FALSE)`

Poisson: **0.0036** `> ppois(2,20*0.015,lower.tail=FALSE)`

$\mu = 0,3$



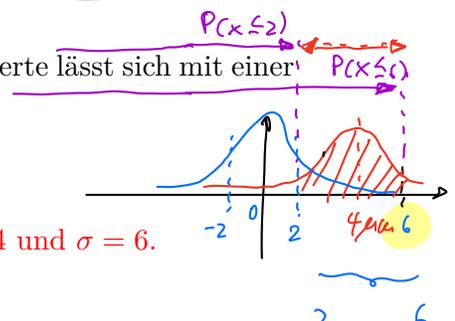
2. Aufgabe:

der Abweichung

Die Messung des Durchmessers von mechanischen Wellen sei **normalverteilt** mit dem Mittelwert $4 \mu\text{m}$ und der Standardabweichung $6 \mu\text{m}$.

Verwenden Sie die Tabelle der Gaußschen Normalverteilung aus dem Skript.

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein einzelner gemessener Wert nicht mehr als $2 \mu\text{m}$ vom wahren Wert abweicht?
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein einzelner gemessener Wert mehr als $8 \mu\text{m}$ vom wahren Wert abweicht?
- Welche Abweichung α des wahren Wertes vom Mittelwert der Messwerte lässt sich mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% garantieren?



Lösung:

Sei X der wahre Wert des Durchmessers. Er ist normalverteilt mit $\mu = 4$ und $\sigma = 6$.

a) Gesucht ist

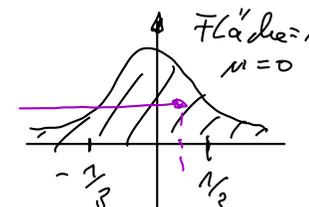
$$P(|X - 4| < 2) \quad \text{bzw.} \quad P(2 \leq X \leq 6) \quad \text{bzw.} \quad P(X \leq 6) - P(X \leq 2)$$

Mit den transformierten Variablen

Verschieben "nach links"

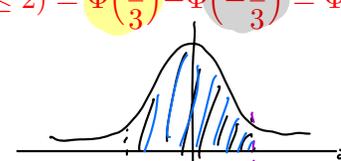
$$u(x) = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

$$u_{(6)} = \frac{6 - 4}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \quad \text{bzw.} \quad u_{(2)} = \frac{2 - 4}{6} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$$

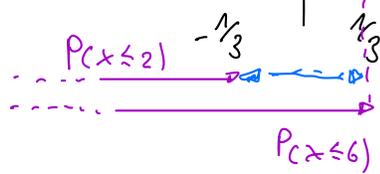


berechnet man nun anhand der Tabelle der Standard-Normalverteilung

$$P(X \leq 6) - P(X \leq 2) = \Phi\left(\frac{1}{3}\right) - \Phi\left(-\frac{1}{3}\right) = \Phi\left(\frac{1}{3}\right) - \left(1 - \Phi\left(\frac{1}{3}\right)\right) = 2 \cdot \Phi(0.33) - 1 = 2 \cdot 0.6293 - 1 = \mathbf{0.2586}$$



bei 5-wertigen Bereichen



Tabelle!!!

b) Gesucht ist

$$P(|X - 4| > 8) \quad \text{bzw.} \quad P(-8 \geq X - 4 \geq 8)$$

Etwas einfacher als unter a) gelan

$$u(x) = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

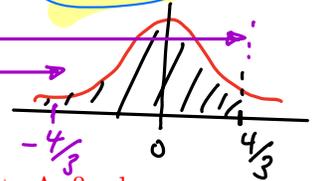
$$u_{(8)} = \frac{8 - (4 - 4)}{6} = \frac{8 - 0}{6} = \frac{4}{3} \quad \text{bzw. sofort, da symmetrisch:} \quad u_{(-8)} = -\frac{4}{3}$$

$$P(|X - 4| > 8) = 1 - \left(2 \cdot \Phi\left(\frac{4}{3}\right) - 1\right) = 1 - 2 \cdot \Phi(1.33) + 1 = 2 - 2 \cdot 0.908241 = \mathbf{0.1835}$$

c) Gegeben ist die Wahrscheinlichkeit

$$P(|X - \mu| < \alpha) = 0.9 \quad \text{bzw.} \quad P(-\alpha \leq X - \mu \leq \alpha) = 0.9$$

Verschiebung

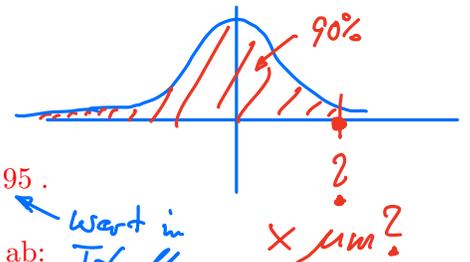


Gesucht ist der Wert α . Dieser ist hier also kein Vielfaches von σ wie im Skript. Außerdem kann man k nicht direkt berechnen. Daher setzt man an

$$\alpha = k \cdot \sigma \Rightarrow k = \frac{\alpha}{\sigma}$$

und mit der Formel aus dem Skript erhält man dann

$$2\Phi\left(\frac{\alpha}{6}\right) - 1 = 0.9 \Rightarrow \Phi\left(\frac{\alpha}{6}\right) = 0.95$$



Aus der Tabelle der Standardnormalverteilung liest man nun ab:

$$\frac{\alpha}{6} = 1.65 \Rightarrow \alpha = 9.90$$

Wert in Tabelle suchen

Das Ergebnis lautet also: Im Bereich $4 \pm 9.9 \mu\text{m}$ liegen 90% der beobachteten Fehler.

$$P(|X - 4 \mu\text{m}| < 9.90 \mu\text{m}) = 0.9$$

3. Aufgabe:

Ein Hersteller von neuen LED-Lampen behauptet, dass die zu erwartende Lebensdauer 40'000 h beträgt. Verwenden Sie als Modell für die Verteilung der Lebensdauer L (in Stunden h) eine **Exponentialverteilung**.

- Bestimmen Sie die Dichtefunktion und die Verteilungsfunktion von L .
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine LED-Lampe höchstens 20'000 h funktioniert?
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die LED-Lampe mehr als 80'000 h funktioniert?
- Geben Sie die R-Befehle an und visualisieren Sie die Wahrscheinlichkeiten in der Dichtefunktion.
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die LED-Lampe mehr als 40'000 h, aber höchstens 100'000 h funktioniert?
- Bestimmen Sie das 25%- und das 75%-Quantil der Verteilung.

Lösung:

L - zufällige Lebensdauer einer LED-Lampe
 L ist exponentialverteilt $L \sim \text{Exp}(\lambda)$

Der freie Parameter der Exponentialverteilung ergibt sich mit

$$\mu = 40'000 \text{ h} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{40'000 \text{ h}}$$

a) Damit folgt für die Dichtefunktion:

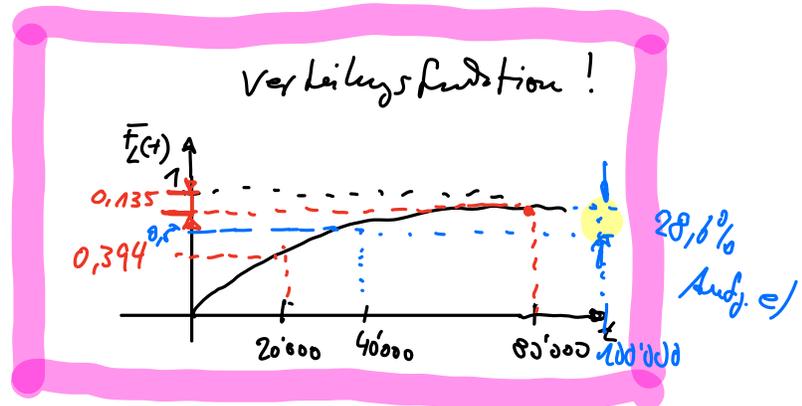
$$f_L(t) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad \int_0^{\infty} f_L(t) = 1$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{40'000 \text{ h}} \cdot e^{-\frac{t}{40'000 \text{ h}}} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

und für die Verteilungsfunktion:

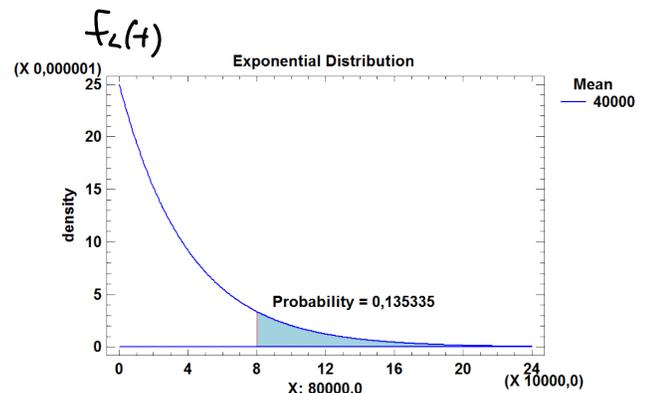
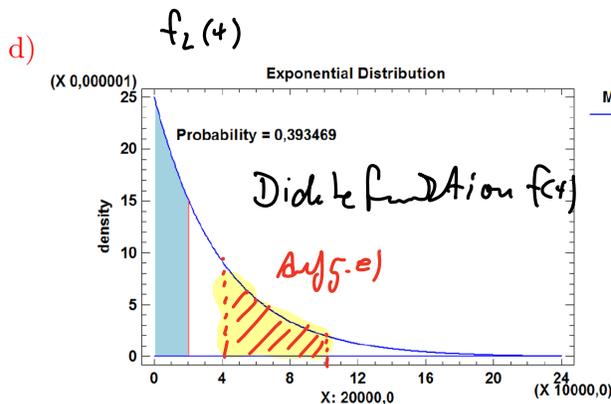
$$F_L(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda \cdot t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 - e^{-\frac{t}{40'000 \text{ h}}} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$



b) $P(L \leq 20'000) = F_L(20'000) = 1 - e^{-\frac{20'000 \text{ h}}{40'000 \text{ h}}} = 1 - e^{-\frac{1}{2}} \approx 0.3935 = 39.4\%$
`> pexp(20'000, lambda, lower.tail=TRUE)`

c) $P(L > 80'000) = 1 - F_L(80'000) = 1 - \left(1 - e^{-\frac{80'000 \text{ h}}{40'000 \text{ h}}}\right) = e^{-2} \approx 0.1353 = 13.5\%$
`> pexp(80'000, lambda, lower.tail=FALSE)`



e) $P(40'000 < L \leq 100'000) = F_L(100'000) - F_L(40'000) = 1 - e^{-\frac{100'000 \text{ h}}{40'000 \text{ h}}} - \left(1 - e^{-\frac{40'000 \text{ h}}{40'000 \text{ h}}}\right) = e^{-1} - e^{-2.5} \approx 0.2858 = 28.6\%$

f) Allgemein gilt für das p -Quantil x_p ($p \in (0, 1)$):

$$F_L(x_p) = p$$

$$x_p = F_L^{-1}(p)$$

Handwritten: 25% / 75%

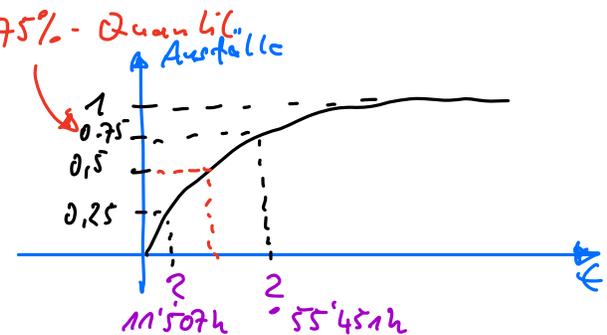
Einsetzen und umstellen nach x_p ergibt:

$$F_L(x_p) = 1 - e^{-\lambda \cdot x_p} = p$$

$$e^{-\lambda \cdot x_p} = 1 - p$$

$$-\lambda \cdot x_p = \ln(1 - p)$$

$$x_p = -\frac{\ln(1 - p)}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \cdot \ln\left(\frac{1}{1 - p}\right)$$



Damit ist das 25%-Quantil (der untere Viertelwert) ($p=0.25$):

$$x_{0.25} = \frac{1}{\lambda} \cdot \ln\left(\frac{1}{1 - 0.25}\right) = 40'000 \text{ h} \cdot \ln\left(\frac{4}{3}\right) = 11'507.28 \text{ h}$$

Und das 75%-Quantil (der obere Viertelwert) ($p=0.75$):

$$x_{0.75} = \frac{1}{\lambda} \cdot \ln\left(\frac{1}{1-0.75}\right) = 40'000 \text{ h} \cdot \ln(4) = \mathbf{55'451.77 \text{ h}}$$

4. Aufgabe:

Die zufällige Lebensdauer L (L in Jahren) eines Elektromotors entspricht in ihrer Verteilung einer **Weibullverteilung** mit Formparameter $b = 2$ und Lageparameter $T = 10$.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

- der Motor bereits im ersten Jahr ausfällt,
- mindestens 10 Jahre arbeitet,
- mehr als 5 aber höchstens 10 Jahre arbeitet.
- Wie groß ist der Erwartungswert dieser Verteilung?

Lösung:

L = zufällige Lebensdauer eines Elektromotors (in Jahren)

$$F_L(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t}{T}\right)^b} = 1 - e^{-\left(\frac{t}{10}\right)^2}$$

a) $P(L \leq 1) = F_L(1) = 1 - e^{-\left(\frac{1}{10}\right)^2} = \mathbf{0.00995 \approx 1\%}$

b) $P(L \geq 10) = 1 - F_L(10) = 1 - \left(1 - e^{-\left(\frac{10}{10}\right)^2}\right) = e^{-1} \approx \mathbf{0.3679 = 36.79\%}$

c) $P(5 \leq L \leq 10) = F_L(10) - F_L(5)$
$$= 1 - e^{-\left(\frac{10}{10}\right)^2} - \left(1 - e^{-\left(\frac{5}{10}\right)^2}\right) = e^{-1} - e^{-0.25} \approx \mathbf{0.4109 = 41.09\%}$$

d) $E(L) = T \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{b}\right) = 10 \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{2}\right) = 10 \cdot \Gamma(1.5)$ (mit: `> gamma(1.5) = 0.8862269`)

$$E(L) = \mathbf{8.862269}$$

Hinweis: Der Wert $\Gamma(1.5)$ wurde mit dem freien Statistik Programm R errechnet. Da die Gammafunktion nicht auf den Taschenrechner vorhanden ist, kann solch ein Wert nicht in der Klausur erfragt werden.