Mathematik 3: Übungsblatt - Wahrscheinlichkeitsverteilungen 2

1. Aufgabe:

Die Produktion bestimmter Bauelemente erfolgt mit einer Ausschuss-Quote von 1.5%.
Zu bestimmen ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich in einer Lieferung von 20 Bauelementen

a) höchstens ein unbrauchbares befindet

b) genau zwei unbrauchbare befinden

c) mehr als zwei unbrauchbare befinden.

Lösen Sie diese Aufgaben mit Hilfe der **Binomialverteilung** und außerdem näherungsweise auf Basis des Grenzwertsatzes von Poisson mit der **Poissonverteilung** mit dem Taschenrechner und mit R.

1. Lösung (ohne R):

Lösung mit Binomialverteilung:

$\bar{A}$ ist das Ereignis "Bauelement ist qualitätsgerecht". Ferner ist $P(A) = 0.015, P(\bar{A}) = 1 - 0.015 = 0.985$.
Die Zufallsgröße X bezeichne die Anzahl der unbrauchbaren Bauelemente. Es ist $n = 20$.

Man erhält:

a) Höchstens ein unbrauchbares Bauelement bedeutet, kein oder ein Bauelement ist unbrauchbar. Gesucht ist also

$$P(X=0 \cup X=1) = P(X=0)+P(X=1) = \binom{20}{0} \cdot 0.015^0 \cdot 0.985^{20} + \binom{20}{1} \cdot 0.015^1 \cdot 0.985^{19} = \mathbf{0.9643}$$

b) $P(X=2) = \binom{20}{2} \cdot 0.015^2 \cdot 0.985^{18} = \mathbf{0.0326}$

c) Bezeichnet man mit B das Ereignis, dass mehr als zwei Bauelemente unbrauchbar sind, so ist $\bar{B}$ das Ereignis, dass höchstens zwei Bauelemente unbrauchbar sind. Es folgt

$$P(B) = 1-P(\bar{B}) = 1-P(X \leq 2) = 1-[P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)] = 1-0.9643-0.0326 = \mathbf{0.0031}$$

Lösung mit Poissonverteilung:

Für die Poissonverteilung gilt als **Faustregel**: $np < 10$, also $20 \cdot 0.015 = 0.3 < 10$ (passt) und $n > 1500 \cdot p \Rightarrow 1500 \cdot 0.015 = 22.5 \Rightarrow 20 > 22.5$ (passt nicht ganz -> Faustregel).
Gemäß Grenzwertsatz von Poisson ergibt sich also näherungsweise der Parameter λ der Poissonverteilung zu $\lambda = n \cdot p = 20 \cdot 0.015 = 0.3$.

a) Damit folgt

$$P(X=0 \cup X=1) = P(X=0) + P(X=1) = \frac{0.3^0}{0!} \cdot e^{-0.3} + \frac{0.3^1}{1!} \cdot e^{-0.3} = \mathbf{0.9631}$$

b)

$$P(X=2) = \frac{0.3^2}{2} \cdot e^{-0.3} = \mathbf{0.0333}$$

c)

$$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - 0.9631 - 0.0333 = \mathbf{0.0036}$$

2. Lösung (mit R):

Für die Binomialverteilung wird das Bernoulli-Schema angewendet. Man erhält:

a) Höchstens einer: $P(X=0)+P(X=1)$ und es gilt: $P(X=x)=\binom{n}{x}\cdot p^x\cdot q^{n-x}$

$P(X=0)=\binom{20}{0}\cdot 0.015^0\cdot 0.985^{20}=0.7391$ in R: `> dbinom(0,20,0.015)`

$P(X=1)=\binom{20}{1}\cdot 0.015^1\cdot 0.985^{19}=0.2251$ in R: `> dbinom(1,20,0.015)`

$\Rightarrow\quad P(X=0)+P(X=1)\approx \mathbf{0.9642}$

Einfacher in R: `> pbinom(1,20,0.015,lower.tail=TRUE)`

Poisson: **0.9631** $\Rightarrow\ P(X=x)=\frac{\mu^x}{x!}\cdot e^{-\mu}$ `> ppois(1,20*0.015,lower.tail=TRUE)`

b) Binom: **0.0326** `> dbinom(2,20,0.015)`
Poisson: **0.0333** `> dpois(2,20*0.015)`

c) Binom: **0.0031** `> pbinom(2,20,0.015,lower.tail=FALSE)`
Poisson: **0.0036** `> ppois(2,20*0.015,lower.tail=FALSE)`

2. Aufgabe:

Die Messung der Abweichung (!) des Durchmessers von mechanischen Wellen sei **normalverteilt** mit dem Mittelwert 4 μm und der Standardabweichung 6 μm.
Verwenden Sie die Tabelle der Gaußschen Normalverteilung aus dem Skript.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein einzelner gemessener Wert nicht mehr als 2 μm vom wahren Wert abweicht?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein einzelner gemessener Wert mehr als 8 μm vom wahren Wert abweicht?

c) Welche Abweichung α des wahren Wertes vom Mittelwert der Messwerte lässt sich mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 % garantieren?

Lösung:

Sei X der wahre Wert des Durchmessers. Er ist normalverteilt mit $\mu=4$ und $\sigma=6$.

a) Gesucht ist

$$P(|X-4|<2)\quad\text{bzw.}\quad P(2\le X\le 6)\quad\text{bzw.}\quad \boldsymbol{P(X\le 6)-P(X\le 2)}$$

Mit den transformierten Variablen

$$u_{(6)}=\frac{6-4}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}\quad\text{bzw.}\quad u_{(2)}=\frac{x-\mu}{\sigma}=\frac{2-4}{6}=-\frac{2}{6}=-\frac{1}{3}$$

berechnet man nun anhand der Tabelle der Standard-Normalverteilung

$$P(X\le 6)-P(X\le 2)=\Phi\left(\frac{1}{3}\right)-\Phi\left(-\frac{1}{3}\right)=\Phi\left(\frac{1}{3}\right)-\left(1-\Phi\left(\frac{1}{3}\right)\right)=2\cdot\Phi(0.33)-1=2\cdot 0.6293-1=\mathbf{0.2586}$$

b) Gesucht ist

$$\boldsymbol{P(|X-4|>8)} \quad \text{bzw.} \quad P(-8 \geq X-4 \geq 8)$$

Etwas einfacher als unter a) gelangt man zu

$$u_{(8)} = \frac{8-(4-4)}{6} = \frac{8-0}{6} = \frac{4}{3} \quad \text{bzw. sofort, da symmetrisch:} \quad u_{(-8)} = -\frac{4}{3}$$

$$P(|X-4|>8) = 1-\left(2\cdot\Phi\left(\frac{4}{3}\right)-1\right) = 1-2\cdot\Phi(1.33)+1 = 2-2\cdot 0.908241 = \mathbf{0.1835}$$

c) Gegeben ist die Wahrscheinlichkeit

$$P(|X-\mu|<\alpha) = 0.9 \quad \text{bzw.} \quad P(-\alpha \leq X-\mu \leq \alpha) = 0.9\,.$$

Gesucht ist der Wert α. Dieser ist hier also kein Vielfaches von σ wie im Skript. Außerdem kann man k nicht direkt berechnen. Daher setzt man an

$$\alpha = k\cdot\sigma \quad \Rightarrow \quad k = \frac{\alpha}{\sigma}$$

und mit der Formel aus dem Skript erhält man dann

$$2\Phi\left(\frac{\alpha}{6}\right)-1 = 0.9 \quad \Rightarrow \quad \Phi\left(\frac{\alpha}{6}\right) = 0.95\,.$$

Aus der Tabelle der Standardnormalverteilung liest man nun ab:

$$\frac{\alpha}{6} = 1.65 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 9.90\,.$$

Das Ergebnis lautet also: Im Bereich $4 \pm 9.9\ \mu$m liegen 90% der beobachteten Fehler.

$$P(|X-4\ \mu\text{m}| < 9.90\ \mu m) = \mathbf{0.9}$$

3. Aufgabe:

Ein Hersteller von neuen LED-Lampen behauptet, dass die zu erwartetende Lebensdauer 40'000 h beträgt. Verwenden Sie als Modell für die Verteilung der Lebensdauer L (in Stunden h) eine **Exponentialverteilung**.

a) Bestimmen Sie die Dichtefunktion und die Verteilungsfunktion von L.

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine LED-Lampe höchstens 20'000 h funktioniert?

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die LED-Lampe mehr als 80'000 h funktioniert?

d) Geben Sie die R-Befehle an und visualisieren Sie die Wahrscheinlichkeiten in der Dichtefunktion.

e) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die LED-Lampe mehr als 40'000 h, aber höchstens 100'000 h funktioniert?

f) Bestimmen Sie das 25%- und das 75%-Quantil der Verteilung.

Lösung:

L - zufällige Lebensdauer einer LED-Lampe
L ist exponentialverteilt $L \sim \text{Exp}(\lambda)$

Der freie Parameter der Exponentialverteilung ergibt sich mit

$$\mu = 40'000\ \text{h} \ \Rightarrow \lambda = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{40'000\ \text{h}}$$

a) Damit folgt für die Dichtefunktion:

$$f_L(t) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} \frac{1}{40'000 \text{ h}} \cdot e^{-\frac{t}{40'000 \text{ h}}} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

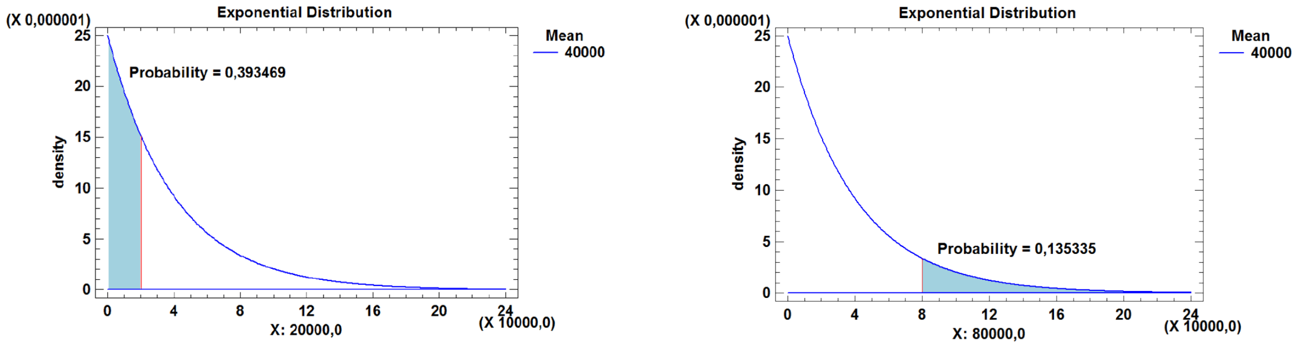
und für die Verteilungsfunktion:

$$F_L(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda \cdot t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 1 - e^{-\frac{t}{40'000 \text{ h}}} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

b) $P(L \leq 20'000) = F_L(20'000) = 1 - e^{-\frac{20'000 \text{ h}}{40'000 \text{ h}}} = 1 - e^{-\frac{1}{2}} \approx 0.3935 = \mathbf{39.4\%}$
> pexp(20’000,lambda,lower.tail=TRUE)

c) $P(L > 80'000) = 1 - F_L(80'000) = 1 - \left(1 - e^{-\frac{80'000 \text{ h}}{40'000 \text{ h}}}\right) = e^{-2} \approx 0.1353 = \mathbf{13.5\%}$
> pexp(80’000,lambda,lower.tail=FALSE)

d)



e) $P(40'000 < L \leq 100'000) = F_L(100'000) - F_L(40'000) = 1 - e^{-\frac{100'000 \text{ h}}{40'000 \text{ h}}} - \left(1 - e^{-\frac{40'000 \text{ h}}{40'000 \text{ h}}}\right) =$
$e^{-1} - e^{-2.5} \approx 0.2858 = \mathbf{28.6\%}$

f) Allgemein gilt für das p-Quantil x_p $(p \in (0,1))$:

$$\begin{aligned} F_L(x_p) &= p \\ x_p &= F_L^{-1}(p) \end{aligned}$$

Einsetzen und umstellen nach x_p ergibt:

$$\begin{aligned} F_L(x_p) = 1 - e^{-\lambda \cdot x_p} &= p \\ e^{-\lambda \cdot x_p} &= 1 - p \\ -\lambda \cdot x_p &= \ln(1-p) \\ x_P &= -\frac{\ln(1-p)}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \cdot \ln\left(\frac{1}{1-p}\right) \end{aligned}$$

Damit ist das 25%-Quantil (der untere Viertelwert) (p=0.25):

$$x_{0.25} = \frac{1}{\lambda} \cdot \ln\left(\frac{1}{1-0.25}\right) = 40'000 \text{ h} \cdot \ln\left(\frac{4}{3}\right) = \mathbf{11'507.28 \text{ h}}$$

Und das 75%-Quantil (der obere Viertelwert) (p=0.75):

$$x_{0.75} = \frac{1}{\lambda} \cdot \ln\left(\frac{1}{1-0.75}\right) = 40'000 \text{ h} \cdot \ln(4) = \mathbf{55'451.77\ h}$$

4. Aufgabe:

Die zufällige Lebensdauer L (L in Jahren) eines Elektromotors entspricht in ihrer Verteilung einer **Weibullverteilung** mit Formparameter $b = 2$ und Lageparameter $T = 10$.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

a) der Motor bereits im ersten Jahr ausfällt,

b) mindestens 10 Jahre arbeitet,

c) mehr als 5 aber höchstens 10 Jahre arbeitet.

d) Wie groß ist der Erwartungswert dieser Verteilung?

Lösung:

L = zufällige Lebensdauer eines Elektromotors (in Jahren)

$$F_L(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t}{T}\right)^b} = 1 - e^{-\left(\frac{t}{10}\right)^2}$$

a) $P(L \leq 1) = F_L(1) = 1 - e^{-\left(\frac{1}{10}\right)^2} = \mathbf{0.00995 \approx 1\%}$

b) $P(L \geq 10) = 1 - F_L(10) = 1 - \left(1 - e^{-\left(\frac{10}{10}\right)^2}\right) = e^{-1} \approx \mathbf{0.3679 = 36.79\%}$

c) $P(5 \leq L \leq 10) = F_L(10) - F_L(5)$

$$= 1 - e^{-\left(\frac{10}{10}\right)^2} - \left(1 - e^{-\left(\frac{5}{10}\right)^2}\right) = e^{-0.25} - e^{-1} \approx \mathbf{0.4109 = 41.09\%}$$

d) $E(L) = T \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{b}\right) = 10 \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{2}\right) = 10 \cdot \Gamma\left(1.5\right)$ (mit: $>$ gamma(1.5) = 0.8862269)

$E(L) = \mathbf{8.862269}$

Hinweis: Der Wert $\Gamma(1.5)$ wurde mit dem freien Statistik Programm R errechnet. Da die Gammafunktion nicht auf den Taschenrechner vorhanden ist, kann solch ein Wert nicht in der Klausur erfragt werden.