Mathematik 3: Übungsblatt - Wahrscheinlichkeitsverteilung 1

1. Aufgabe:

Die Zufallsvariable X sei die Augenzahl beim Wurf eines symmetrischen Würfels. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsvariable X einen Wert von

a) genau 4

$\Rightarrow \quad P(X = 4) = \mathbf{\frac{1}{6}}$

b) mindestens 4

$\Rightarrow \quad P(X \geq 4) = 1 - P(X < 4) = 1 - \frac{3}{6} = \mathbf{\frac{3}{6}}$

c) höchstens 4

$\Rightarrow \quad P(X \leq 4) = \frac{4}{6} = \mathbf{\frac{2}{3}}$

d) größer als 4

$\Rightarrow \quad P(X > 4) = \frac{2}{6} = \mathbf{\frac{1}{3}}$

e) kleiner als 4 annimmt?

$\Rightarrow \quad P(X < 4) = \frac{3}{6} = \mathbf{\frac{1}{2}}$

2. Aufgabe:

Die Verteilung einer diskreten Zufallsgröße X sei durch die folgende Tabelle gegeben:

x_i	1	3	5	7	9	11
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	p_4	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{24}$

Berechnen Sie

a) $p_4 = P(X = 7)$

$p_4 = 1 - (p_1 + p_2 + p_3 + p_5 + p_6) = 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{3} - \frac{1}{12} - \frac{1}{8} - \frac{1}{24} = \mathbf{\frac{1}{4}}$

b) die Verteilungsfunktion $F(X)$

$$F(X) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ \frac{1}{6}, & 1 \leq x < 3 \\ \frac{1}{2}, & 3 \leq x < 5 \\ \frac{7}{12}, & 5 \leq x < 7 \\ \frac{5}{6}, & 7 \leq x < 9 \\ \frac{23}{24}, & 9 \leq x < 11 \\ 1, & x \geq 11 \end{cases}$$

c) $F(6)$

$F(6) = \frac{7}{12}$

d) die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Zufallsgröße X

i. mindestens 9 wird

$P(X \geq 9) = 1 - P(X < 9) = 1 - \frac{5}{6} = \mathbf{\frac{1}{6}}$

ii. höchstens 9 wird

$P(X \leq 9) = \mathbf{\frac{23}{24}}$

iii. im Intervall $[2, 8]$ liegt

$P(2 \leq X \leq 8) = \mathbf{\frac{2}{3}}$

e) den Mittelwert und die Varianz von X.

$\mu = \mathbf{4.917}, \quad \sigma = 2.914, \quad \sigma^2 = \mathbf{8.493}$

3. Aufgabe:

Bei dem Test eines Impfstoffes gegen einen neuen Virus kam heraus, dass dieser den Empfänger in 90% der Fällen schützt. Da bei alten Leuten der Virus häufig zum Tode führt, sollen die 50 Bewohner eines Altenheimes als erstes den Impfstoff bekommen.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

- keiner den Virus bekommt?

  $P(X = 50) = 0.9^{50} = \mathbf{0.005153775}$

- genau 37 Personen nicht vom Virus befallen werden?

  $P(X = 37) = \binom{50}{37} \cdot 0.9^{37} \cdot 0.1^{13} = \mathbf{0.0007194996}$

- höchstens 36 Personen nicht vom Virus befallen werden?

$$P(X \leq 36) = 1 - P(X > 36) = 1 - \sum_{i=37}^{50} P(X = i)$$
$$= 1 - \sum_{i=37}^{50} \binom{50}{i} \cdot 0.9^{i} \cdot 0.1^{50-i} = \mathbf{0.0002851203}$$

```
> pbinom(36,50,0.9)
```