Mathematik 3: Übungsblatt - Wahrscheinlichkeitsrechnung 2

1. **Aufgabe:**

   Wir würfeln gleichzeitig mit 2 homogenen und unterscheidbaren Würfeln. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Augenzahl jedes Würfels gerade ist, wenn bekannt ist, dass eine 8 gewürfelt wurde?

   Hinweis: Möglicherweise hilft es, sich die folgenden Ereignisse zu definieren:

   A: Die Augenzahl jedes Würfels ist gerade

   B: Die Augensumme beträgt 8

   Lösung:

   Wir benutzen die Formel der bedingten Wahrscheinlichkeit
   $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$, wobei
   $A \cap B = \{(2,6),(4,4),(6,2)\}$ und somit $P(A \cap B) = \frac{|A \cap B|}{|\Omega|} = \frac{3}{36}$.
   Außerdem $B = \{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\}$ und somit $P(B) = \frac{5}{36}$.

   Es folgt: $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{3}{36}}{\frac{5}{36}} = \mathbf{\frac{3}{5}}$

2. **Aufgabe:**

   Betrachte eine Handball Mannschaft, deren Siegchance je Spiel bei 75% liegt, falls ihr Kapitän gut in Form ist.

   - Wenn ihr Kapitän jedoch nicht in guter Form ist, dann beträgt ihre Siegeschance nur 40%.
   - Bei 70% aller Spiele seiner Mannschaft ist der Kapitän in guter Form.
   - Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, dass:
     a) die Mannschaft ein Spiel gewinnt
     b) der Kapitän bei einem Spiel in guter Form ist, obwohl die Mannschaft das Spiel nicht gewinnt.

   Lösung:

   Sei $A = \{\text{Mannschaft gewinnt Spiel}\}, \bar{A} = \{\text{Mannschaft gewinnt Spiel nicht}\}$
   und $B = \{\text{Kapitän ist in guter Form}\}, \bar{B} = \{\text{Kapitän ist nicht in guter Form}\}$
   Dann gilt: $P(A|B) = 0.75,\ P(A|\bar{B}) = 0.4,\ P(B) = 0.7, P(\bar{B}) = 0.3$

   Mit der Formel der totalen Wahrscheinlichkeit und dem Satz von Bayes ergibt sich folgendes:

   a)
   $$\begin{aligned} P(A) &= P(A|B)P(B) + P(A|\bar{B})P(\bar{B}) \\ &= 0.75 \cdot 0.7 + 0.4 \cdot 0.3 \\ &= \mathbf{0.645} \end{aligned}$$

   b)
   $$\begin{aligned} P(B|\bar{A}) &= \frac{P(\bar{A}|B)P(B)}{P(\bar{A})} \\ &= \frac{0.25 \cdot 0.7}{0.355} \\ &= \mathbf{0.493} \end{aligned}$$

3. Aufgabe:

In einer Gruppe von 900 Personen haben sich 600 prophylaktisch gegen Grippe impfen lassen. Nach einer bestimmten Zeit wurde jedes Gruppenmitglied danach befragt, wer an einer Grippe erkrankte.

Die Ergebnisse werden in einer 4–Feldtafel dargestellt.

	B (erkrankt)	$\overline{B}$ (nicht erkrankt)	$\sum$
A (mit Impfung)	60	540	600
$\overline{A}$ (ohne Impfung)	120	180	300
$\sum$	180	720	900

Das Ereignis A sei „Person ist geimpft“ und das Ereignis B: „Person erkrankt“. Berechnen Sie:

a) $P(A)$ b) $P(B)$ c) $P(A \cap B)$ d) $P(B|A)$ e) $P(A|B)$ f) $P(\bar{A} \cap B)$ g) $P(B|\bar{A})$

Geben Sie die Bedeutung der einzelnen Ergebnisse in Textform an.

h) Zeichnen Sie ein Baumdiagramm mit dem 1. Merkmal „Impfung“ (mit Impfung, ohne Impfung) und dem 2. Merkmal „Grippe“ (erkrankt, nicht erkrankt).

Lösung:

a) $P(A) = \dfrac{600}{900} = \mathbf{0.\overline{6}}$

Bei der zufälligen Auswahl einer Person ist die Wahrscheinlichkeit dafür, eine geimpfte Person zu finden 0.666...

b) $P(B) = \dfrac{180}{900} = \mathbf{0.2}$

Bei der zufälligen Auswahl einer Person ist die Wahrscheinlichkeit dafür, eine erkrankte Person zu finden 0.2.

c) $P(A \cap B) = \dfrac{60}{900} = \mathbf{0.0\overline{6}}$

Bei der zufälligen Auswahl einer Person ist die Wahrscheinlichkeit dafür, eine trotz Impfung erkrankte Person zu finden 0.06666...

d) $P(B|A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{\frac{60}{900}}{\frac{600}{900}} = \dfrac{60}{600} = \mathbf{0.1}$

Eine Person, von der man weiß, dass sie geimpft wurde ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.1 dennoch erkrankt.

e) $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{\frac{60}{900}}{\frac{180}{900}} = \dfrac{60}{180} = \mathbf{0.\overline{3}}$

Eine Person, von der man weiß, dass sie erkrankt ist, wurde ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.333... geimpft.

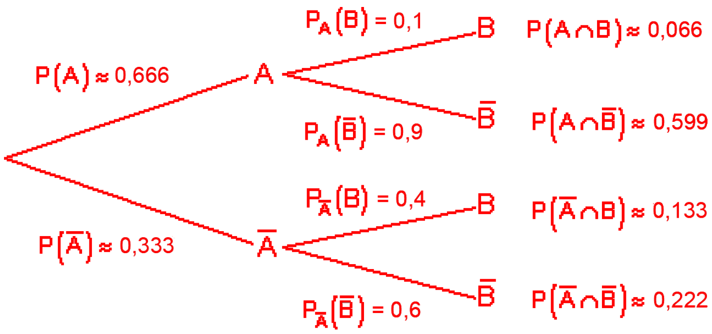
f) $P(\bar{A} \cap B) = \dfrac{120}{900} = \mathbf{0.1\overline{3}}$

Bei der zufälligen Auswahl einer Person, ist die Wahrscheinlichkeit eine nicht geimpfte und auch erkrankte Person zu finden 0.1333...

g) $P(B|\bar{A}) = \dfrac{P(\overline{A} \cap B}{P(\overline{A})} = \dfrac{\frac{120}{900}}{\frac{300}{900}} = \dfrac{120}{300} = \mathbf{0.4}$

Eine Person, von der man weiß, dass sie nicht geimpft wurde ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.4 auch erkrankt.

h)



4. **Aufgabe:**

Es werden nacheinander 2 Münzen geworfen. Die Ereignisse A, B, C & D seien gegeben durch

- A: Die zuerst geworfene Münze zeigt Kopf.
- B: Es erscheint mindestens einmal Kopf.
- C: Es erscheint mindestens einmal Zahl.
- D: Die zweite Münze zeigt Kopf.

Überprüfen Sie, ob folgende Ereignisse unabhängig sind:

a) A und C

b) A und D

c) B und C

Lösung:

Erinnerung: 2 Ereignisse A, B mit $P(A) > 0,\ P(B) > 0$ heißen unabhängig, wenn

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Wir berechnen zuerst $P(A) = \frac{1}{2},\ P(B) = \frac{3}{4},\ P(C) = \frac{3}{4},\ P(D) = \frac{1}{2}$.

(a) $A \cap C$: 1. Münze zeigt Kopf, 2. Münze zeigt Zahl.

$\Rightarrow P(A \cap C) = \dfrac{1}{4} \neq P(A)P(C) = \dfrac{3}{8}$.

Das heißt, die Ereignisse A und C sind **nicht unabhängig**.

(b) $A \cap D$: beiden Münzen zeigen Kopf.

$\Rightarrow P(A \cap D) = \dfrac{1}{4} = P(A)P(D) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}$.

Das heißt, die Ereignisse A und D sind **unabhängig**.

(c) $B \cap C$: genau einmal Kopf und einmal Zahl.

$\Rightarrow P(B \cap C) = \dfrac{1}{2} \neq P(B)P(C) = \left(\dfrac{3}{4}\right)^2 = \dfrac{9}{16}$.

Das heißt, die Ereignisse B und C sind **nicht unabhängig**.