

Mathematik 3: Übungsblatt - Wahrscheinlichkeitsrechnung 1

1. Aufgabe:

In einer Tüte M&M gibt es verschiedenen Farben mit folgenden Häufigkeiten:

13% braun, 14% gelb, 13% rot, 24% blau, 20% orange und 16% grün. Nun greifen Sie blind in die Tüte und nehmen sich genau ein M&M heraus.

- Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie ein braunes oder ein gelbes M&M erwischen?
- Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie kein blaues M&M aus der Tüte ziehen?

Lösung:

a) $br \cup ge = 13\% + 14\% = 27\%$

b) $100\% - 24\% = 76\%$

2. Aufgabe:

Eine homogene Münze wird 3 Mal geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 2 Mal Wappen (W) erscheint?

Lösung:

Es gibt insgesamt $2^3 = 8$ mögliche gleichwahrscheinliche Elementarereignisse (Variation mit Zurücklegen). Davon sind 4 „günstig“, nämlich (Z=Zahl, W=Wappen):

WWZ, WZW, ZWW, WWW $\Rightarrow P(\text{mind. 2 Mal Wappen}) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

3. Aufgabe:

Ein Bogenschütze trifft die Zielscheibe mit der Wahrscheinlichkeit $p = 0.6$. Er schießt insgesamt 3-mal.

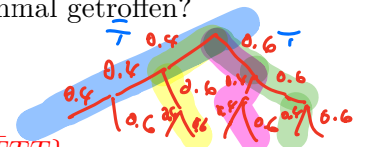
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er dabei genau 2 mal die Scheibe trifft?
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird die Scheibe dabei mindestens einmal getroffen?

Lösung:

Sei T : Treffer, $\bar{T}$: Kein Treffer $\Rightarrow P(T) = 0.6, P(\bar{T}) = 0.4$.

- Ereignis A: genau 2 Treffer bei 3 Schüssen $\Rightarrow A = \{T\bar{T}T, T\bar{T}\bar{T}, \bar{T}T\bar{T}\}$.
Also $P(A) = 3 \cdot (0.6^2 \cdot 0.4) = 0.432$

- Ereignis B: mindestens 1 Treffer bei 3 Schüssen. Es ist einfacher das Gegenereignis zu betrachten. $\bar{B}$: Kein Treffer bei 3 Schüssen $\Rightarrow \bar{B} = \{\bar{T}\bar{T}\bar{T}\}$.
Also $P(\bar{B}) = 0.4^3 = 0.064$ und somit $P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 0.936$



4. Aufgabe:

Jeder neue Account für einen Online-Store erhält eine rein zufällige, fünfstellige PIN (an jeder der 5 Stellen sind die Ziffern 1-9 möglich).

Berechne die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

- A: An der ersten Stelle der PIN steht eine 3 und an der letzten Stelle steht keine ungerade Ziffer.
- B: Genau 2 Ziffern sind gleich und alle anderen Ziffern sind voneinander verschieden. $\approx 51.12\%$
- C: Die Ziffern 8 und 9 kommen je genau einmal vor und die Ziffer 8 steht an der letzten Stelle.

Lösung:

Es handelt sich um ein Laplace Experiment mit $|\Omega| = 9^5 = 59'049$ (da es sich um ein Modell mit Reihenfolge und mit Zurücklegen handelt, also eine Variation mit Wiederholung)

$$|A| = \frac{1}{9} \cdot \frac{9}{9} \cdot \frac{9}{9} \cdot \frac{9}{9} \cdot \frac{4}{9} = \frac{4}{9 \cdot 9} = \frac{4}{81} \quad \checkmark$$

a) $|A| = 1 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 4 = 9^3 \cdot 4 \Rightarrow P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{9^3 \cdot 4}{9^5} = \frac{4}{81} \approx \mathbf{0.0494}$

Erklärung: Die erste Ziffer muss eine 3 sein, dafür gibt es nur eine Möglichkeit. An den Ziffern 2-4 ist egal, welche Ziffer auftritt, also je 9 Möglichkeiten. An der letzten Stelle darf keine ungerade Ziffer stehen, sie muss also gerade sein. Davon gibt es 4 Möglichkeiten (2,4,6,8).

$$\frac{9}{9} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{9}{9} \cdot \frac{9}{9} \cdot \frac{4}{9} \cdot \binom{5}{2}$$

b) $|B| = 9 \cdot 1 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \binom{5}{2} = 30'240 \Rightarrow P(B) = \frac{30'240}{9^5} \approx \mathbf{0.5121}$

Erklärung: 2 gleiche Ziffern erreicht man indem man die 1. Ziffer frei wählt (9 Möglichkeiten) und die 2. Ziffer ergibt sich sofort aus der ersten (muss dieselbe sein). Dafür gibt es eine Möglichkeit. Alle anderen Ziffern müssen voneinander verschieden sein. Für die 3. Stelle gibt es noch 8 Möglichkeiten (alle bis auf das was an Position 1 & 2 steht, da nur genau 2 Ziffern gleich sein dürfen). Für Position 4 & 5 bleiben dann noch 7 bzw. 6 Möglichkeiten. Schließlich gibt es noch $\binom{5}{2}$ Möglichkeiten die 2 gleichen Ziffern unter den 5 Ziffern anzuordnen, da nirgendwo erwähnt wurde, wo genau die 2 gleichen Ziffern stehen müssen.

c) $|C| = 1 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 1 \cdot \binom{4}{1} = 1372 \Rightarrow P(C) = \frac{1372}{9^5} = \mathbf{0.0232}$

$$\frac{1}{9} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{1}{9} \cdot \binom{4}{1}$$

Erklärung: Ziffer 9 kommt genau einmal vor, also z.B. an Stelle 1 (also 1 Möglichkeit). Die Stellen 2-4 dürfen jede Zahl bis auf die 8 & 9 enthalten, also je 7 Möglichkeiten und am Ende muss die 8 stehen, also genau 1 Möglichkeit. Die 8 am Ende ist fixiert, aber für die Ziffer 9 gibt es genau $\binom{4}{1}$ Möglichkeiten diese anzuordnen.

5. Aufgabe:

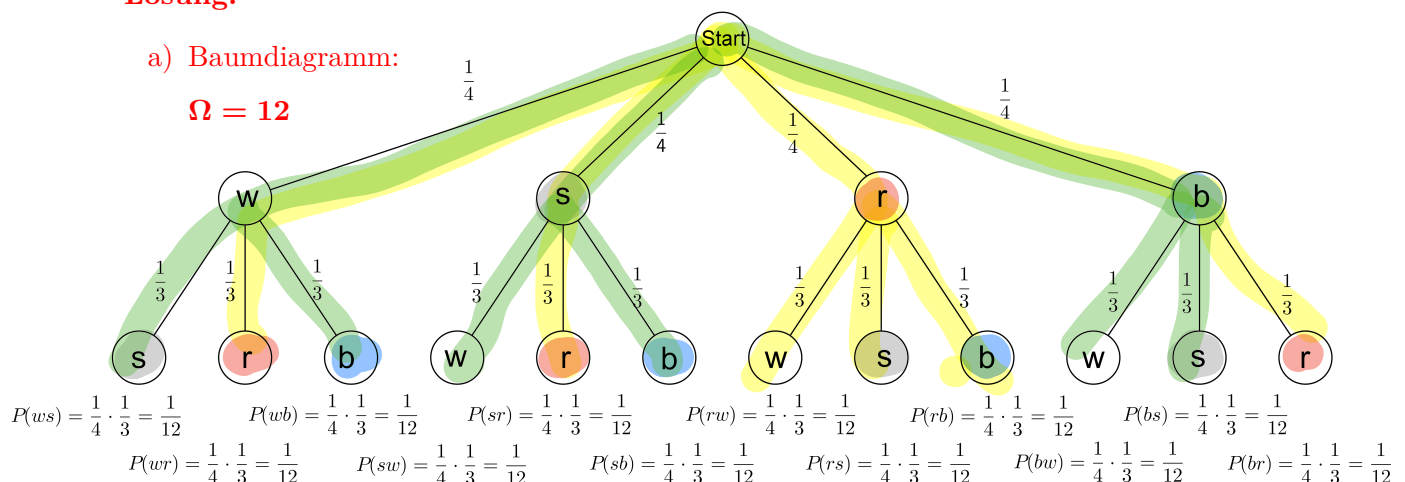
In einer Urne befinden sich eine weiße, eine schwarze, eine rote und eine blaue Kugel. Es werden nacheinander (und ohne Zurücklegen) zwei Kugeln entnommen.

- Zeichnen Sie das Baumdiagramm und lesen Sie den Ergebnisraum Ω dieses Zufallsexperiments ab.
- Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:
 - A : Keine der gezogenen Kugeln ist rot.
 - B : Unter den gezogenen Kugeln ist eine rote.
 - C : Es werden zwei rote Kugeln gezogen.
 - D : Die gezogenen Kugeln sind weiß und schwarz.
- Gib in Worten ein Ereignis E mit der Wahrscheinlichkeit $P(E) = 0.25$ und ein Ereignis F mit der Wahrscheinlichkeit $P(F) = \frac{1}{3}$ an.

Lösung:

a) Baumdiagramm:

$$\Omega = 12$$



b) **Ereignis A :**

Es gibt 6 verschiedene Möglichkeiten dafür, dass keine der gezogenen Kugeln rot ist.

$$A = \{ws; wb; sw; sb; bw; bs\}$$

$$\begin{aligned} P(A) &= P(ws) + P(wb) + P(sw) + P(sb) + P(bw) + P(bs) = \\ &= \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{6}{12} = 0.5 = \mathbf{50\%} \end{aligned}$$

Ereignis B :

Es gibt 6 Möglichkeiten dafür, dass eine Rote unter den gezogenen Kugeln ist.

$$B = \{wr, sr; rw; rs; rb; br\}$$

$$\begin{aligned} P(B) &= P(wr) + P(sr) + P(rw) + P(rs) + P(rb) + P(br) = \\ &= \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{6}{12} = 0.5 = \mathbf{50\%} \end{aligned}$$

Ereignis C :

Es gibt keine Möglichkeit zwei rote Kugeln zu ziehen.

$$C = \{\}$$

$$P(C) = 0 = \mathbf{0\%}$$

Ereignis D :

Es gibt genau 2 Möglichkeiten dafür, dass eine weiße und eine schwarze Kugel unter den Gezogenen sind.

$$D = \{ws; sw\}$$

$$P(D) = P(D) = P(ws) + P(sw) = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{2}{12} \approx 0.167 = \mathbf{16.7\%}$$

c) Zum Beispiel folgende Ereignisse E und F :

E : „Die zweite gezogene Kugel ist weiß.“

$$E = \{sw; rw; bw\}$$

$$E = w \cap (s \cup r \cup b) = (w \cup s) \cap (w \cup r) \cap (w \cup b)$$

$$P(E) = P(sw) + P(rw) + P(bw) = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{3}{12} = 25\%$$

F : „Zuerst wird entweder weiß oder schwarz gezogen, danach entweder rot oder blau.“

$$F = \{wr; wb; sr; sb\}$$

$$F = (w \cup s) \cap (r \cup b) = (w \cup r) \cap (w \cup b) \cap (s \cup r) \cap (s \cup b)$$

$$P(F) = P(wr) + P(wb) + P(sr) + P(sb) = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \approx 33\%$$