Mathematik 3: Übungsblatt - Mengen und Ereignisse

1. Aufgabe:

Was bedeuten $A \cup A$ und $A \cap \bar{A}$?

Lösung:
$A \cup A = A$ und $A \cap \bar{A} = \emptyset$

2. Aufgabe:

Das Ereignis A liege vor, wenn von vier Werkstücken mindestens eines Ausschuss ist, B trifft ein, sobald mindestens zwei der vier Werkstücke Ausschuss sind. Was bedeuten die Ereignisse $\bar{A}$ und $\bar{B}$?

Lösung:
Das Ereignis $\bar{A}$ bedeutet, dass kein Werkstück Ausschuss ist. Das Ereignis $\bar{B}$ bedeutet, dass höchstens ein Werkstück Ausschuss ist.

3. Aufgabe:

Das Ereignis A liege vor, wenn von drei geprüften Geräten mindestens eines Ausschuss ist. Das Ereignis B trifft ein, wenn alle drei Geräte einwandfrei sind. Was bedeuten die Ereignisse $A \cup B$ und $A \cap B$?

Lösung:
Das Ereignis $A \cup B = \Omega$ bedeutet, dass alles möglich ist. Das Ereignis $A \cap B = \emptyset$ bedeutet, dass nichts möglich ist.

4. Aufgabe:

Zwei Schachspieler spielen eine Partie. A bedeute: es siegt der erste Spieler. B bedeute: es siegt der zweite Spieler. Welches Ereignis müssen wir noch zu den beiden hinzufügen, um das sichere Ereignis zu erhalten?

Lösung:
Remis

5. Aufgabe:

Wenn wir einen Würfel einmal werfen, können wir Ereignisse festlegen:

A: Die Augenzahl ist kleiner als 4.
B: Die Augenzahl ist eine ungerade Zahl.
C: [4 ; 5]

a) Bilden Sie $A \cap B$ und beschreiben Sie die Menge in Worten.

b) Bilden Sie $A \cup B$ und beschreiben Sie die Menge in Worten.

c) Bilden Sie $\bar{A} \cap B$ und beschreiben Sie die Menge in Worten.

d) Bilden Sie $A \cap C$ und beschreiben Sie die Menge in Worten.

Lösung:

a) $A = \{1;2;3\}$ $B = \{1;3;5\}$ $\Rightarrow$ $A \cap B = \{1;3\}$
$A \cap B$: Die Augenzahl ist kleiner als 4 oder (sowie) eine ungerade Zahl.

b) $A = \{1;2;3\}$ $B = \{1;3;5\}$ $\Rightarrow$ $A \cup B = \{1;2;3;5\}$
$A \cup B$: Die Augenzahl ist nicht 4 oder (sowie) 6 bzw. ungerade oder (sowie) 2.

c) $A = \{1;2;3\}$ $\Rightarrow$ $\bar{A} = \{4;5;6\}$ Die Augenzahl ist größer als 3
$B = \{1;3;5\}$ Die Augenzahl ist eine ungerade Zahl.
$\bar{A} \cap B = \{5\}$ Die Augenzahl ist größer als 3 oder (sowie) eine ungerade Zahl.

d) $A = \{1;2;3\}$ $C = \{4;5\}$ $\Rightarrow$ $A \cap B = \{\ \} = \emptyset$
$A \cap C$: Die Augenzahl ist kleiner als 4 oder (sowie) 4 oder 5.
Ein solches Ereignis nennt man **unvereinbar**.

6. Aufgabe:

Ein System bestehe aus zwei Teilsystemen. Es bedeute A_i das Ereignis:

"Das i-te Teilsystem fällt aus", $i = 1, 2$.

a) Stellen Sie die folgenden Ereignisse durch die Ereignisse A_1 und A_2 dar:

- B_1: Kein Teilsystem fällt aus
- B_2: Mindestens ein Teilsystem fällt aus
- B_3: Höchstens ein Teilsystem fällt aus
- B_4: Genau ein Teilsystem fällt aus

b) Bilden Sie die Ereignisse $B_1 \cap B_2$, $B_1 \cup B_2$, $B_1 \cap B_3$, $B_1 \cup B_3$.

Lösung:

a)
- $B_1 = \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2$
- $B_2 = (A_1 \cup A_2) \cup (A_1 \cap A_2)$
- $B_3 = (\bar{A}_1 \cup \bar{A}_2) \cup (\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2)$
- $B_4 = \left(A_1 \cap \bar{A}_2\right) \cup \left(\bar{A}_1 \cap A_2\right)$

b)
- $B_1 \cap B_2 = \emptyset$
- $B_1 \cup B_2 = S$ (das sichere Ereignis)
- $B_1 \cap B_3 = B_1$
- $B_1 \cup B_3 = B_3$

Rechnerisch:

$$B_1 \cap B_3 = (\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2) \cap (\bar{A}_1 \cup \bar{A}_2)$$

Distributivität

$$= \left[(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2) \cap \bar{A}_1\right] \cup \left[(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2) \cap \bar{A}_2\right]$$
$$= (\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2) \cup (\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2)$$
$$= \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2$$
$$= \underline{\underline{B_1}}$$

$$B_1 \cup B_3 = (\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2) \cup (\bar{A}_1 \cup \bar{A}_2)$$

Distributivität

$$= \left[\bar{A}_1 \cup (\bar{A}_1 \cup \bar{A}_2)\right] \cap \left[\bar{A}_2 \cup (\bar{A}_1 \cup \bar{A}_2)\right]$$
$$= (\bar{A}_1 \cup \bar{A}_2) \cap (\bar{A}_1 \cup \bar{A}_2)$$
$$= \bar{A}_1 \cup \bar{A}_2$$
$$= \underline{\underline{B_3}}$$