Mathematik 3: Übungsblatt - Kombinatorik 2

Permutation / Kombination / Variation:

Geben Sie zu jeder Aufgabe an, um welche der drei Anordnungen es sich handelt!

1. **Aufgabe:**

   Auf wie viele Arten kann man 7 Hotelgäste in 10 freien Einzelzimmern unterbringen?

   $$\frac{10!}{(10-7)!} = \frac{10!}{3!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = \mathbf{604'800} \qquad \textbf{(Variation)}$$

2. **Aufgabe:**

   In einem Zimmer gibt es 5 Lampen, die unabhängig voneinander aus- und eingeschaltet werden können. Wieviele Möglichkeiten gibt es, dass

   a) genau 3 Lampen brennen?

   $$\binom{5}{3} = \mathbf{10} \qquad \textbf{(Kombination)}$$

   b) höchstens 2 Lampen brennen?

   $$\sum_{k=0}^{2} \binom{5}{k} = \binom{5}{0} + \binom{5}{1} + \binom{5}{2} = 1 + 5 + 10 = \mathbf{16} \qquad \textbf{(Kombination)}$$

   c) Wie viele Arten der Beleuchtung gibt es insgesamt?

   $$\sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} = \binom{5}{0} + \binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5} = \mathbf{32} \qquad \textbf{(Kombination)}$$

   oder

   $$2^5 = \mathbf{32} \qquad \textbf{(Variation mit Wiederholung)}$$

3. **Aufgabe:**

   Ein Zahlenschloss besitzt fünf Ringe, die jeweils die Ziffern $0, ..., 9$ tragen.

   a) Wie viele verschiedene fünfstellige Zahlencodes sind möglich?

   $$10^5 = \mathbf{100'000} \qquad \textbf{(Variation mit Wiederholung)}$$

   b) Wie ändert sich die Anzahl aus Teil (a), wenn in dem Zahlencode jede Ziffer nur einmal vorkommen darf, d.h. der Zahlencode aus fünf verschiedenen Ziffern bestehen soll?

   $$\frac{10!}{5!} = \mathbf{30'240} \qquad \textbf{(Variation ohne Wiederholung)}$$

   c) Wie ändert sich die Anzahl aus Teil (a), wenn der Zahlencode nur aus gleichen Ziffern bestehen soll?

   $$\mathbf{10} \qquad \textbf{(Variation ohne Wiederholung)}$$

4. **Aufgabe:**

   Ein Autokennzeichen werde gebildet aus

   - mindestens 1, maximal 2 Buchstaben des Alphabets (insgesamt 26 Buchstaben) und
   - einer Zahl bestehend aus mindestens 2, maximal 3 Ziffern (ohne die “0” an erster Stelle)

   Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn

a) ein Buchstabe auch mehrmals erscheinen darf?

$26 \cdot 9 \cdot 10 \; + \; 26 \cdot 9 \cdot 10^2 \; + \; 26^2 \cdot 9 \cdot 10 \; + \; 26^2 \cdot 9 \cdot 10^2 = \mathbf{694'980}$ **(Variation)**

b) ein Buchstabe maximal einmal erscheinen darf?

$26 \cdot 9 \cdot 10 \; + \; 26 \cdot 9 \cdot 10^2 \; + \; 26 \cdot 25 \cdot 9 \cdot 10 \; + \; 26 \cdot 25 \cdot 9 \cdot 10^2 = \mathbf{669'240}$ **(Variation)**

5. Aufgabe:

Auf wieviele Arten können n Personen $k(\leq n)$ Plätze besetzen?
Berechnen Sie dies für $n = 4$ und $k = 2$ bzw. $k = 3$.

Lösung:
Man hat n Personen, die sich auf $k \leq n$ Sitzplätze verteilen, wobei die n Personen unterscheidbar, die $n - k$ freien Plätze aber nicht unterscheidbar sind, weshalb man die Gesamtzahl $n!$ der Anordnungen durch $(n-k)!$ dividieren muss.

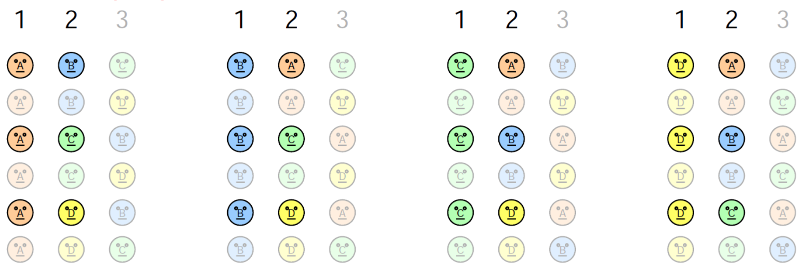
Das ist auf $\dfrac{n!}{(n-k)!}$ verschiedene Arten möglich.

Beispiel: $n = 4, k = 3$: $\quad \dfrac{4!}{(4-3)!} = \dfrac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1} = \mathbf{24}$ **(Variation)**

Platzbelegungen:

Beispiel: $n = 4, k = 2$: $\quad \dfrac{4!}{(4-2)!} = \dfrac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2} = \mathbf{12}$ **(Variation)**

Platzbelegungen:



6. Aufgabe:

Wie viele unterschiedliche Möglichkeiten zur Bildung eines EDV-Passwortes gibt es, das besteht aus

- genau zwei, unterschiedlichen Buchstaben des Alphabets (insgesamt 26 Buchstaben, Groß- und Kleinschreibung ohne Bedeutung) und
- einer Zahl bestehend aus mindestens 2, maximal 4 Ziffern ("0" an erster Stelle möglich)?

$26 \cdot 25 \cdot (10^2 + 10^3 + 10^4) = \mathbf{7'215'000}$ **(Variation)**

7. Aufgabe:

20 Personen verabschieden sich voneinander mit Händedruck. Wie oft werden dabei die Hände gedrückt?

$$\frac{20 \cdot 19}{2} = \mathbf{190}$$

8. Aufgabe:

Bei der Fußball-WM 1998 nahmen 32 Nationen teil. Wie viele Möglichkeiten gab es

a) für die Teilnehmer des Halbfinales (= Runde der letzten 4)?

$$\binom{32}{4} = \mathbf{35'960} \qquad \textbf{(Kombination)}$$

b) für die Reihenfolge auf den ersten 4 Plätzen?

$$\frac{32!}{(32-4)!} = \mathbf{863'040} \qquad \textbf{(Variation)}$$

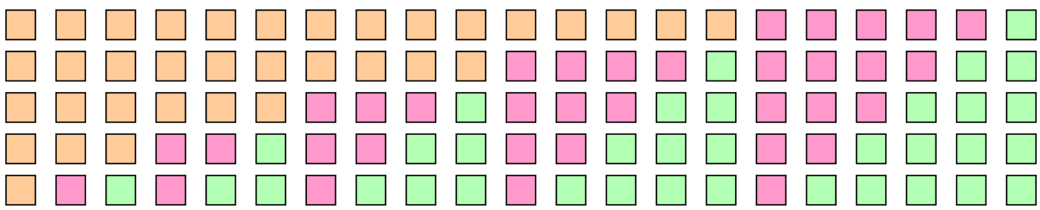
9. Aufgabe:

Wieviele Möglichkeiten gibt es, mit n Farben k Stühle zu streichen?
Berechnen Sie für $n = 3$ und $k = 5$.

Es gibt genau $\boldsymbol{\binom{n+k-1}{k}}$ **Möglichkeiten** **(Kombination mit Wiederholung)**

Beispiel:

n=3, k=5: $\binom{3+5-1}{5} = \binom{7}{5} = \mathbf{21}$



10. Aufgabe:

Man beweise: $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$ für alle $n, k \geq 1$!

$$n\binom{n-1}{k-1} = \frac{n \cdot (n-1)!}{(k-1)!(n-1-k+1)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{k \cdot n!}{k!(n-k)} = \boldsymbol{k\binom{n}{k}}$$