

Mathematik 3: Übungsblatt - Grundlagen

Fakultät:

1. Aufgabe:

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke soweit wie möglich (ohne Taschenrechner, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$):

a) $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$

b) $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$

c) $\frac{4!}{6!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{1}{5 \cdot 6} = \frac{1}{30}$

d) $\frac{3! \cdot 4!}{6!} = \frac{3!}{5 \cdot 6} = \frac{1}{5}$

e) $\frac{3! \cdot 5!}{4! \cdot 6!} = \frac{5!}{4 \cdot 6!} = \frac{1}{4 \cdot 6} = \frac{1}{24}$

f) $\frac{5!}{3! \cdot 4!} = \frac{5}{3!} = \frac{5}{6}$

g) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = \frac{(n+1) \cdot n \cdot (n-1)!}{(n-1)!} = (n+1) \cdot n$

h) $\frac{(n+2)! \cdot n}{(n+1)!} = \frac{(n+2) \cdot (n+1)! \cdot n}{(n+1)!} = (n+2) \cdot n$

i) $\frac{(n+1)!}{(m-1)!} : \frac{(n-1)!}{m!} = \frac{(n+1)! \cdot m!}{(m-1)! \cdot (n-1)!} = (n+1) \cdot n \cdot m$

j) $\frac{(n+3)!}{(n+1)! \cdot (n+2)} = \frac{(n+3)!}{(n+1)! \cdot (n+2)} = \frac{(n+3) \cdot (n+2) \cdot (n+1)!}{(n+1)! \cdot (n+2)} = n+3$

k) $\frac{(2n)! \cdot (n-1)!}{(2n-1)! \cdot n!} = \frac{(2n)!}{(2n-1)!} \cdot \frac{(n-1)!}{n!} = 2n \cdot \frac{1}{n} = 2$

1. Rausziehen
2. -1 (abziehen)

$$(n+1)! = (n+1) \cdot (n+1-1)! \\ = (n+1) \cdot n!$$

Binomialkoeffizient:

2. Aufgabe:

Berechnen Sie ohne Taschenrechner (und überprüfen Sie mit R):

a) $2 \cdot \binom{6}{2} = 2 \cdot \frac{6!}{2! \cdot (6-2)!} = 2 \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 2 \cdot \frac{6 \cdot 5}{2} = 30$ R: `2*choose(6,2)`

b) $\binom{14}{3} = \frac{14!}{3! \cdot (14-3)!} = \frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 11 \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{14 \cdot 13 \cdot 12}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 364$ R: `choose(14,3)`

3. Aufgabe:

Beweisen Sie:

a) $\binom{n}{0} = 1 = \frac{n!}{0! \cdot (n-0)!} = \frac{n!}{1 \cdot n!} = 1$

b) $\binom{n}{n} = 1 = \frac{n!}{n! \cdot (n-n)!} = \frac{1}{(1 \cdot 0)!} = 1$

c) $\binom{n}{1} = n = \frac{n!}{1! \cdot (n-1)!} = \frac{n \cdot (n-1)!}{(n-1)!} = n$

d) $\binom{n}{n-1} = n = \frac{n!}{(n-1)! \cdot (n-(n-1))!} = \frac{n \cdot (n-1)!}{(n-1)! \cdot 1!} = n$

e) $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$ (Symmetriegesetz)

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!}$$

mit $n - (n - k) = n - n + k = k$ folgt

$$= \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (\text{Formel für den Binomialkoeffizienten})$$

$$= \binom{n}{k}$$

f) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$ Tipp: Es gilt (Skript S. 12) $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k$

Man kann nun $a = 1$ und $b = 1$ setzen, um die allgemeine Aussage zu beweisen!

$$(1+1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^{n-k} \cdot 1^k$$

$$2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$$