Mathematematik 3: Übungsblatt - Grundlagen

Fakultät:

1. Aufgabe:

Berechnen Sie:

a) $3! \quad = 1 \cdot 2 \cdot 3 = \mathbf{6}$

b) $5! \quad = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = \mathbf{120}$

c) $\frac{4!}{6!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{1}{5 \cdot 6} = \mathbf{\frac{1}{30}}$

d) $\frac{3! \cdot 4!}{6!} = \frac{3!}{5 \cdot 6} = \mathbf{\frac{1}{5}}$

e) $\frac{3! \cdot 5!}{4! \cdot 6!} = \frac{5!}{4 \cdot 6!} = \frac{1}{4 \cdot 6} = \mathbf{\frac{1}{24}}$

f) $\frac{5!}{3! \cdot 4!} = \frac{5}{3!} = \mathbf{\frac{5}{6}}$

g) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = \frac{(n+1) \cdot n \cdot (n-1)!}{(n-1)!} = \boldsymbol{(n+1) \cdot n}$

h) $\frac{(n+2)! \cdot n}{(n+1)!} = \frac{(n+2) \cdot (n+1)! \cdot n}{(n+1)!} = \boldsymbol{(n+2) \cdot n}$

i) $\frac{(n+1)!}{(m-1)!} : \frac{(n-1)!}{m!} = \frac{(n+1)! \cdot m!}{(m-1)! \cdot (n-1)!} = \boldsymbol{(n+1) \cdot n \cdot m}$

Binomialkoeffizient:

2. Aufgabe:

Berechnen Sie (und überprüfen Sie mit R):

a) $2 \cdot \binom{6}{2} = 2 \cdot \frac{6!}{2! \cdot (6-2)!} = 2 \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 2 \cdot \frac{6 \cdot 5}{2} = \mathbf{30}$ R: `2* choose(6,2)`

b) $\binom{14}{3} = \frac{14!}{3! \cdot (14-3)!} = \frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 11 \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{14 \cdot 13 \cdot 12}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \mathbf{364}$ R: `choose(14,3)`

3. Aufgabe:

Beweisen Sie:

a) $\binom{n}{0} = 1 = \frac{n!}{0! \cdot (n-0)!} = \frac{n!}{1 \cdot n!} = \mathbf{1}$

b) $\binom{n}{n} = 1 = \frac{n!}{n! \cdot (n-n)!} = \frac{1}{(1 \cdot 0!} = \mathbf{1}$

c) $\binom{n}{1} = n = \frac{n!}{1! \cdot (n-1)!} = \frac{n \cdot (n-1)!}{(n-1)!} = \boldsymbol{n}$

d) $\binom{n}{n-1} = n = \frac{n!}{(n-1)! \cdot (n-(n-1))!} = \frac{n \cdot (n-1)!}{(n-1)! \cdot 1!} = \boldsymbol{n}$

e) $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$ (Symmetriegesetz)

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!\big(n-(n-k)\big)!}$$

mit $n-(n-k) = n-n+k = k$ folgt

$$= \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{(Formel für den Binomialkoeffizienten)}$$

$$= \boldsymbol{\binom{n}{k}}$$

f) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

Es gilt (Skript S. 12): $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k$

Man kann nun $a = 1$ und $b = 1$ setzen, um die allgemeine Aussage zu beweisen!

$$(1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} \cdot 1^k$$

$$\boldsymbol{2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}}$$