Übungsaufgaben zu Differenzialgleichungen - Musterlösung

Aufgabe 1

Welche der folgenden Differenzialgleichungen sind linear, welche nichtlinear. Unterscheiden Sie außerdem die linearen Differenzialgleichungen nach homogenen und inhomogenen Differenzialgleichungen.

(i) $y' = xy$,

(ii) $x^3y' - y = 2xy^2$,

(iii) $y' - 2y = \sin(x)$,

(iv) $y' \cdot \cos(x) - y\sin(x) = 1$,

(v) $y'y^2 + x^2 = 1$,

(vi) $y' = \sqrt{y}$,

(vii) $L\frac{di}{dt} + Ri = u(t)$,

(viii) $y' - x \cdot (1 + y^2) = 0$,

(ix) $xy' + y = \ln(x)$,

(x) $m\dot{v} + k \cdot v = mg$,

(xi) $y'\sqrt{y} - x = 0$,

(xii) $y' = 5x^4 \cdot (y + 1)$.

Lösungen zu Aufgabe 1

(i) linear, homogen,

(ii) nichtlinear,

(iii) linear, inhomogen,

(iv) linear, inhomogen,

(v) nichtlinear,

(vi) nichtlinear,

(vii) linear, inhomogen,

(viii) nichtlinear,

(ix) linear, inhomogen,

(x) linear, inhomogen,

(xi) nichtlinear,

(xii) linear, inhomogen.

Aufgabe 2

Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme durch Trennung der Variablen.

(i) $y' + y\cos(x) = 0, \qquad y(\frac{\pi}{2}) = 2\pi,$

(ii) $x(x+1)y' = y, \qquad y(1) = \frac{1}{2},$

(iii) $y^2y' + x^2 = 1, \qquad y(2) = 1,$

(iv) $yy' = 2e^{2x}, \qquad y(0) = 2.$

Lösungen zu Aufgabe 2

Im folgenden ist $c \in \mathbb{R}$ stets eine Konstante,

(i) Allgemeine Lösung: $ce^{-\sin(x)}$, Spezielle Lösung: $2\pi e^{1-\sin(x)}$,

(ii) Allgemeine Lösung: $c\frac{x}{x+1}$, Spezielle Lösung: $\frac{x}{x+1}$,

(iii) Allgemeine Lösung: $\sqrt[3]{3x - x^3 + 3c}$, Spezielle Lösung: $\sqrt[3]{3x - x^3 + 3}$,

(iv) Allgemeine Lösung: $\pm\sqrt{2e^{2x} + 2c}$, Spezielle Lösung: $\sqrt{2e^{2x} + 2}$.

Aufgabe 3

Lösen Sie mittels Variation der Konstanten die folgenden Anfangswertprobleme:

(i) $xy' - y = x^2 \cdot \cos(x), \qquad y(\pi) = 2\pi,$

(ii) $xy' + y = \ln(x), \qquad y(1) = 1.$

Lösungen zu Aufgabe 3

Im Folgenden bezeichnen wir mit $y_0(x)$ die allgemeine Lösung der korrespondierenden homogenen DGL und mit $C \in \mathbb{R}$ eine Konstante.

(i)) Lösung der homogenen DGL: $y_0(x) = Cx + x\sin(x)$. Durch Einsetzen der Anfangsbedingung erhält man die spezielle Lösung: $y = 2x + x\sin(x)$.

(ii)) Allgemeine Lösung: $y_0(x) = \ln(x) - 1 + \frac{C}{x}$. Durch Einsetzen der Anfangsbedingung finden wir die spezielle Lösung: $y = \ln(x) - 1 + \frac{2}{x}$.

Aufgabe 4

Lösen Sie die folgenden inhomogenen linearen DGL 1.ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten durch Aufsuchen einer partikulären Lösung:

(i) $y' = 2x - y$,

(ii) $y' + 2y = 4e^{5x}$,

(iii) $y' + y = e^{-x}$,

(iv) $y' - 4y = 5\sin(x)$,

(v) $y' - 5y = \cos(x) + 4\sin(x)$,

(vi) $y' - 6y = 3e^{6x}$.

Lösungen zu Aufgabe 4

Im Folgenden bezeichnen wir mit $C, a, b \in \mathbb{R}$ Konstanten.

(i) Lösung der homogenen DGL: $y_0 = Ce^{-x}$, Ansatz: $y_p = ax + b$, partikuläre Lösung: $2x - 2$, daraus ergibt sich: $y = y_0 + y_p = Ce^{-x} + 2x - 2$.

(ii) Lösung der homogenen DGL: $y_0 = Ce^{-2x}$, Ansatz: $y_p = ae^{5x}$, partikuläre Lösung: $\frac{4}{7}e^{5x}$, daraus ergibt sich: $y = y_0 + y_p = Ce^{-2x} + \frac{4}{7}e^{5x}$.

(iii) Lösung der homogenen DGL: $y_0 = Ce^{-x}$, Ansatz: $y_p = axe^{-x}$, partikuläre Lösung: xe^{-x}, daraus ergibt sich: $y = y_0 + y_p = Ce^{-x} + xe^{-x}$.

(iv) Lösung der homogenen DGL: $y_0 = Ce^{4x}$, Ansatz: $y_p = a\sin(x) + b\cos(x)$, partikuläre Lösung: $y_p = -\frac{20}{17}\sin(x) - \frac{5}{17}\cos(x)$, daraus ergibt sich: $y = y_0 + y_p = Ce^{4x} - \frac{20}{17}\sin(x) - \frac{5}{17}\cos(x)$.

(v) Lösung der homogenen DGL: $y_0 = Ce^{5x}$, Ansatz: $y_p = a\sin(x) + b\cos(x)$, partikuläre Lösung: $y_p = -\frac{19}{26}\sin(x) - \frac{9}{26}\cos(x)$, daraus ergibt sich: $y = y_0 + y_p = Ce^{5x} - \frac{19}{26}\sin(x) - \frac{9}{26}\cos(x)$.

(vi) Lösung der homogenen DGL: $y_0 = Ce^{6x}$, Ansatz: $y_p = axe^{6x}$, partikuläre Lösung: $y_p = 3xe^{6x}$, daraus ergibt sich: $y = y_0 + y_p = Ce^{6x} + 3xe^{6x}$.

Aufgabe 5

Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme:

(i) $y' + 4y = x^3 - x, \qquad y(1) = 2$,

(ii) $y' - y = e^x, \qquad y(0) = 1$,

(iii) $y' + 3y = -\cos(x), \qquad y(0) = 5$.

Lösungen zu Aufgabe 5

(i) Aufsuchen einer partikulären Lösung mittels dem Ansatz: $y_p = ax^3 + bx^2+cx+d$ mit noch zu bestimmenden Koeffizienten $a, b, c, d\ in \mathbb{R}$ ergibt die allgemeine Lösung: $y = Ce^{-4x} + \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{16}x^2 - \frac{5}{32}x + \frac{5}{128}$. Mittels Einsetzen der Anfangsbedingung ergibt sich: $y = 112.18 \cdot e^{-4x} + \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{16}x^2 - \frac{5}{32}x + \frac{5}{128}$.

(ii) Aufsuchen einer partikulären Lösung mittels dem Ansatz: $y_p = axe^x$ mit noch zu bestimmendem Koeffizient $a\ in \mathbb{R}$ ergibt die allgemeine Lösung: $y = (C+x)e^x$. Mittels Einsetzen der Anfangsbedingung ergibt sich: $y = (x+1)e^x$.

(iii) Aufsuchen einer partikulären Lösung mittels dem Ansatz: $y_p = a\sin()x) + b\cos(x)$ mit noch zu bestimmenden Koeffizienten $a, b\ in \mathbb{R}$ ergibt die allgemeine Lösung: $y = Ce^{-3x} - \frac{1}{10}\sin(x) - \frac{3}{10}\cos(x)$. Mittels Einsetzen der Anfangsbedingung ergibt sich: $y = \frac{53}{10}e^{-3x} - \frac{1}{10}\sin(x) - \frac{3}{10}\cos(x)$.

Nun einige Aufgaben zu Differenzialgleichung 2.ter Ordnung:

Aufgabe 6

Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme:

(i) $y'' + 4y' + 5y = 0, \qquad y(0) = \pi, y'(0) = 0,$

(ii) $y'' + 20y' + 64y = 0, \qquad y(0) = 0, y'(0) = 2,$

(iii) $4y'' - 4y' + y = 0, \qquad y(0) = 5, y'(0) = -1,$

Lösungen zu Aufgabe 6

Zur Wiederholung das Vorgehen:

1) Bestimmen der Nullstellen $\Lambda_{1,2}$ des korrespondierenden charakteristischen Polynoms.

2) Bestimmen der allgemeinen Lösung y_0 der zugehörigen homogenen DGL. Diese enthält zunächst 2 beliebige noch zu bestimmende (Integrations-) Parameter oder Freiheitsgrade c_1, c_2.

3) Bestimmen der Freiheitsgrade bzw. Parameter durch das Einsetzen der gegebenen Anfangsbedingungen in die allgemeine Lösung y_0 bzw. y_0'. Das Ergebnis ist dann die spezielle Lösung y.

Nun die Lösungen der Aufgaben:

(i) Nullstellen des charakteristischen Polynoms: $\Lambda_{1,2} = -2 \pm i$, wobei $i^2 = -1$. Allgemeine Lösung: $y_0 = e^{-2x}(c_1\sin(x) + c_2\cos(x))$. Spezielle Lösung: $y = \pi e^{-2x}(2\sin(x) + \cos(x))$.

(ii) Nullstellen des charakteristischen Polynoms: $\Lambda_1 = -4$, $\Lambda_2 = -16$. Allgemeine Lösung: $y_0 = c_1 e^{-4x} + c_2 e^{-16x}$. Spezielle Lösung: $y = \frac{1}{6}(e^{-4x} + e^{-16x})$.

(iii) Nullstellen des charakteristischen Polynoms: $\Lambda_{1,2} = \frac{1}{2}$. Allgemeine Lösung: $y_0 = (c_1 x + c_2)e^{\frac{1}{2}x}$. Spezielle Lösung: $y = (-\frac{7}{2}x + 5)e^{\frac{1}{2}x}$.

Aufgabe 7

Bestimmen Sie die allgemeinen Lösungen der folgenden inhomogenen linearen Differenzialgleichungen zweiter Ordnung:

(i) $y'' + 2y' - 3y = 3x^2 - 4x$,

(ii) $y'' - 2y' + y = e^{2x}$,

(iii) $y'' - 2y' - 3y = -2e^{3x}$,

(iv) $y'' + 10y' + 25y = 3\cos(5t)$,

(v) $y'' - y = x\sin(x)$,

(vi) $y'' + 12y' + 36y = 3e^{-6x}$,

Lösungen zu Aufgabe 7

Zur Wiederholung das Vorgehen:

1) Bestimmen der Nullstellen $\Lambda_{1,2}$ des korrespondierenden charakteristischen Polynoms.

2) Bestimmen der allgemeinen Lösung y_0 der zugehörigen homogenen DGL. Diese enthält zunächst 2 beliebige noch zu bestimmende (Integrations-) Parameter oder Freiheitsgrade c_1, c_2.

3) Aufsuchen einer partikulären Lösung y_p der inhomogenen DGL. Dazu suchen wir zunächst den passenden Ansatz heraus (Formelsammlung oder geschicktes Raten). Dieser Ansatz enthält zu bestimmende Parameter oder Koeffizienten. Diese bestimmt man nun durch Einsetzen.

4) Die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL ist $y = y_0 + y_p$. Nun bestimmen wir die Freiheitsgrade bzw. Parameter c_1, c_2 durch das Einsetzen der gegebenen Anfangsbedingungen in die allgemeine Lösung y_0 bzw. y_0'. Das Ergebnis ist dann die spezielle Lösung y.

Nun die Lösungen der Aufgaben:

(i) Allgemeine Lösung: $y_0 = c_1 e^x + c_2 e^{-3x}$. Ansatz: $ax^2 + bx + c$. Partikuläre Lösung: $y_p = -x^2 - \frac{2}{3}$. Spezielle Lösung: $y = c_1 e^x + c_2 e^{-3x} - x^2 - \frac{2}{3}$.

(ii) Allgemeine Lösung: $y_0 = (c_1x+c_2)e^x$. Ansatz: ae^{2x}. Partikuläre Lösung: $y_p = e^{2x}$. Spezielle Lösung: $y = (c_1x + c_2)e^x + e^{2x}$.

(iii) Allgemeine Lösung: $y_0 = c_1e^{3x} + c_2e^{-x}$. Ansatz: axe^{3x}. Partikuläre Lösung: $y_p = -\frac{1}{2}xe^{3x}$. Spezielle Lösung: $y = c_1e^{3x} + c_2e^{-x} - \frac{1}{2}xe^{3x}$.

(iv) Allgemeine Lösung: $y_0 = (c_1x + c_2)e^{-5x}$. Ansatz: $a\sin(5x) + b\cos(5x)$. Partikuläre Lösung: $y_p = \frac{3}{50}\sin(5x)$. Spezielle Lösung: $y = (c_1x + c_2)e^{-5x} + \frac{3}{50}\sin(5x)$.

(v) Allgemeine Lösung: $y_0 = c_1e^x + c_2e^{-x}$. Ansatz: $(ax + b)\sin(x) + (cx + d)\cos(x)$. Partikuläre Lösung: $y_p = -\frac{1}{2}(x\sin(x) + \cos(x))$. Spezielle Lösung: $y = c_1e^x + c_2e^{-x} - \frac{1}{2}(x\sin(x) + \cos(x))$.

(vi) Allgemeine Lösung: $y_0 = (c_1x + c_2)e^{-6x}$. Ansatz: ax^2e^{-6x}. Partikuläre Lösung: $y_p = \frac{3}{2}x^2e^{-6x}$. Spezielle Lösung: $y = (c_1x+c_2)e^{-6x} + \frac{3}{2}x^2e^{-6x}$.