

Mathematik 1: Zusatzübung - Folgen

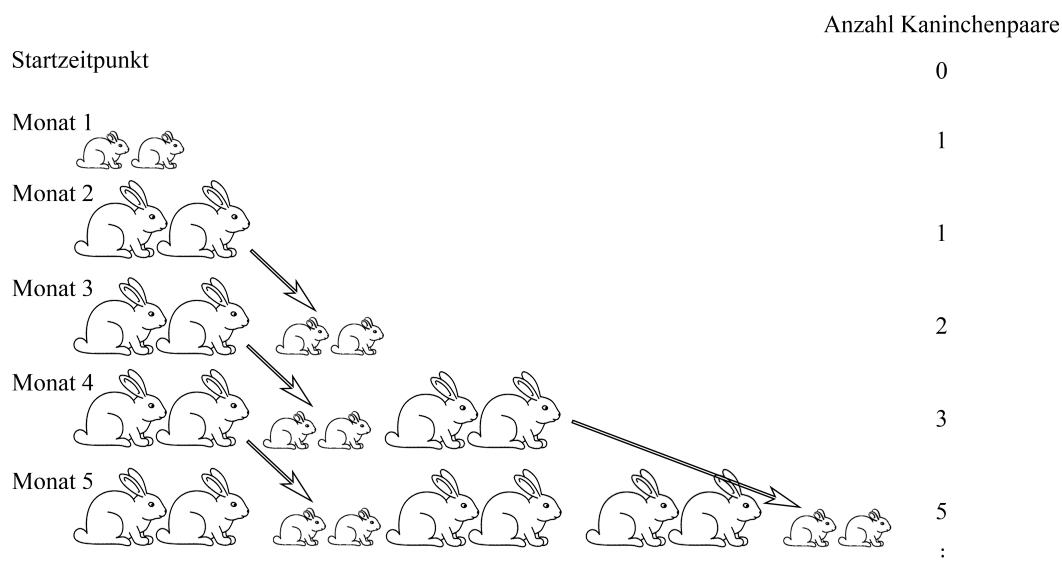
Natur/Kunst: Fibonacci-Folge / Goldener Schnitt

Berühmtheit erlangten Fibonacci und sein Werk mit einer relativ "belanglosen" Aufgabenstellung:

Das Kaninchenproblem. Wir sehen uns die Vermehrung von Kaninchenpaaren anhand eines abgeschlossenen Modells genauer an. Unser Augenmerk liegt dabei auf dem Zuwachs der einzelnen Kaninchengenerationen, wobei der Start mit null Kaninchenpaaren festgelegt wird. Im ersten Monat kommt das erste Kaninchenpaar hinzu. Ab diesem Zeitpunkt gilt es folgende mathematische Regeln zu beachten:

1. Erst im zweiten Lebensmonat wird das Kaninchenpaar fortpflanzungsfähig.
2. Ab dem gebärfähigen Alter wirft das Paar pro Monat ein weiteres Kaninchenpaar.
3. Kein Kaninchen stirbt, wird von außen hinzugefügt bzw. kann diese Gemeinschaft verlassen.

Beim Startpunkt null existiert somit noch kein Kaninchenpaar. Erst im ersten Monat wird nach unserer Voraussetzung genau ein Kaninchenpaar in das Modell eingebracht. Dieses Paar wird nach zwei Monaten fortpflanzungsfähig, wodurch die Anzahl im zweiten Monat bei einem Kaninchenpaar bestehen bleibt. Somit leben aber dann im dritten Monat das Ursprungspaar und ein weiteres junges Kaninchenpaar. Im vierten Monat wirft das Ausgangspaar ein weiteres Paar, währenddessen das andere Kaninchenpaar gebärfähig wird. Verfolgt man das Diagramm, so erkennt man, dass im fünften Monat bereits fünf (im sechsten Monat schon acht) Kaninchenpaare vorhanden sind.



Die Zahlenreihenfolge der Kaninchenpaare (f_0 ; f_1 ; f_2 ; ...), welche sich durch die Aneinanderreihung der Fibonacci- Zahlen ergibt, wird als Fibonacci-Folge bezeichnet.

1. Aufgabe:

Die Anzahl der Paare im n -ten Monat werden mit f_n definiert. Dadurch ergibt sich:

$$f_0 = 0; f_1 = 1; f_2 = 1; f_3 = 2; f_4 = 3; f_5 = 5; f_6 = 8 \dots$$

Wie viele Kaninchenpaare gibt es im n -ten Monat?

Finden Sie dazu eine Rekursionsformel und berechnen Sie die Werte bis $n = 10$.

Lösung:

Zum Zeitpunkt des $(n+1)$ -ten Monats sind laut Definition f_{n+1} Paare vorhanden. Jetzt stellen wir uns die Frage, wie viele der f_{n+1} Kaninchenpaare bereits fortpflanzungsfähig sind.

Bei unseren Überlegungen hilft uns die Tatsache, dass die Kaninchenpaare erst im Alter von zwei Lebensmonaten gebärfähig werden. Somit können nur jene Kaninchenpaare ein neues Paar zur Welt bringen, die bereits im n -ten Monat existiert und somit mindestens das nötige Alter erreicht haben.

Das heißt, dass genau f_n der f_{n+1} Kaninchenpaare fortpflanzungsfähig sind. Somit werfen f_n Paare im $(n+2)$ -ten Monat ein neues Kaninchenpaar. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} f_{n+2} &= \text{Kaninchenpaare im } (n+2)\text{-ten Monat} \\ &= \text{Kaninchenpaare im } (n+1)\text{-ten Monat} \\ &\quad + \text{Kaninchenpaare, die im } (n+2)\text{-ten Monat auf die Welt gekommen sind} \\ &= f_{n+1} + f_n. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{f_{n+2} = f_{n+1} + f_n} \quad \text{mit } f_0 = 0, f_1 = 1 \quad \text{und } n \in \mathbb{N}$$

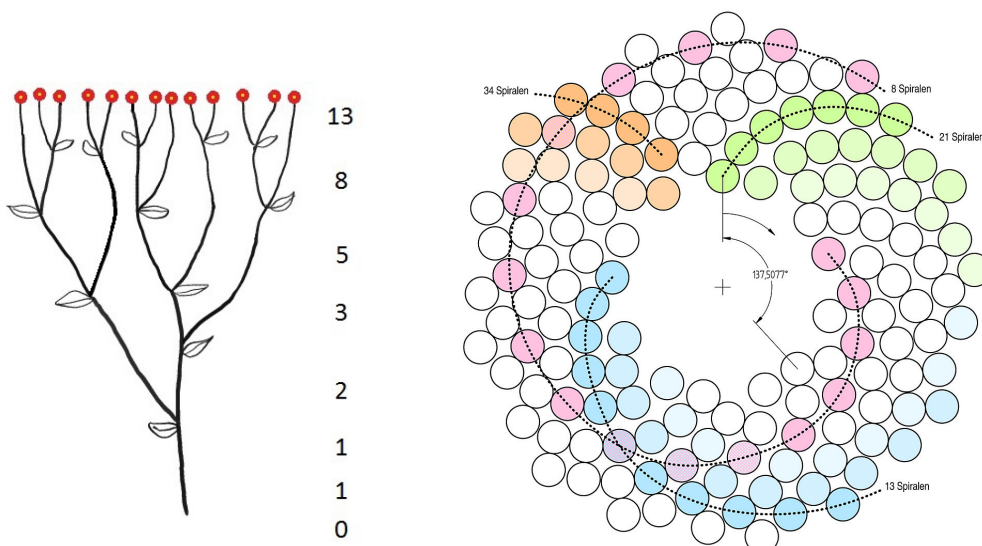
Ab dem dritten Folgenglied ergeben sich also die Werte als Summe der beiden vorangegangenen Glieder.

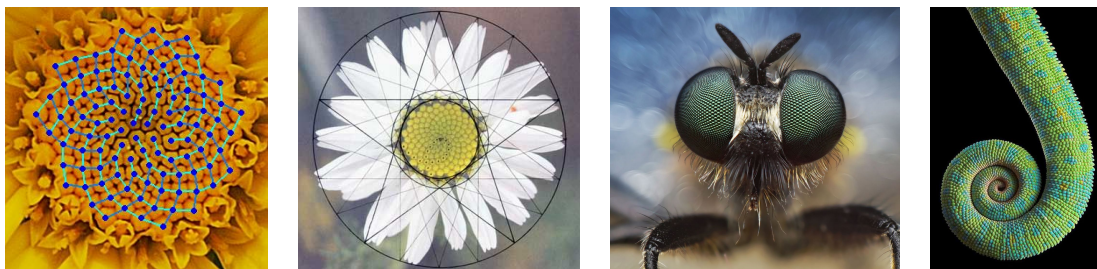
Durch diesen Satz erhält man nun die Möglichkeit, sehr rasch die Ergebnisse von $f_0; f_1; f_2; f_3; f_4; \dots$ nacheinander angeben zu können.

Die Werte sind:

$n = 0$	$f_0 = 0$	$n = 10$	$f_{10} = 55$	$n = 20$	$f_{20} = 6765$
$n = 1$	$f_1 = 1$	$n = 11$	$f_{11} = 89$	$n = 21$	$f_{21} = 10946$
$n = 2$	$f_2 = 1$	$n = 12$	$f_{12} = 144$	$n = 22$	$f_{22} = 17711$
$n = 3$	$f_3 = 2$	$n = 13$	$f_{13} = 233$	$n = 23$	$f_{23} = 28657$
$n = 4$	$f_4 = 3$	$n = 14$	$f_{14} = 377$	$n = 24$	$f_{24} = 46368$
$n = 5$	$f_5 = 5$	$n = 15$	$f_{15} = 610$	$n = 25$	$f_{25} = 75025$
$n = 6$	$f_6 = 8$	$n = 16$	$f_{16} = 987$	$n = 26$	$f_{26} = 121393$
$n = 7$	$f_7 = 13$	$n = 17$	$f_{17} = 1597$	$n = 27$	$f_{27} = 196418$
$n = 8$	$f_8 = 21$	$n = 18$	$f_{18} = 2584$	$n = 28$	$f_{28} = 317811$
$n = 9$	$f_9 = 34$	$n = 19$	$f_{19} = 4181$	$n = 29$	$f_{29} = 514229$

In der Natur finden sich viele Beispiele die nach diesem Wachstumsprozess sich entwickeln.





Versuch einer Begründung:

Eine Möglichkeit sieht die Grundidee in der asymmetrischen Zellteilung. Ähnlich dem System der Kaninchenvermehrung müssen hier die juvenilen Zellen zuerst zu adulten Zellen heranreifen, um eine Teilung durchlaufen zu können.

Durch kurzes Überlegen gelangt man zur Einsicht, dass die Anzahl der einzelnen Zellgenerationen den Fibonacci-Zahlen entspricht.

Demnach ergibt sich insgesamt betrachtet eine Übereinstimmung mit der Fibonacci-Folge. In gewisser Hinsicht weisen diese Zellen einen Stammzellen-Charakter auf, während sich eine Tochterzelle spezialisiert und somit differenziert, verbleibt die andere bei ihrem Status einer undifferenzierten, teilungsfähigen Zelle. Dieser Ansatz könnte das spiralförmige Wachstum des Pflanzenmeristems erklären.

Zudem wäre anhand der asymmetrischen Zellteilung die Entstehung von einerseits rechts und andererseits links gewundenen Anordnungen in gleichen Verhältnissen plausibel.

Eine andere Hypothese beruht auf einer optimalen Packung in Verbindung mit einer idealen Raumnutzung, weswegen diese Anordnung der Voraussetzung einer gleichen Samengröße unterliegt, unabhängig davon, ob es sich nur um große oder nur um kleine Samen handelt. Dadurch wird gewährleistet, dass es zu keiner Anhäufung im Zentrum oder aber Freiräumen am Rand kommt. Dieses Optimierungsmodell äußert sich in einem spiralförmigen Muster mit dem Auftreten meist benachbarter Fibonacci-Zahlen.

2. Aufgabe:

Nun widmen wir uns einer neuen Fragestellung: Welche Zahl ergibt das 155-te (f_{155}) oder das 1001-te (f_{1001}) Folgenglied der Fibonacci-Reihenfolge?

Hier ergibt sich eine Schwierigkeit: Um dies beantworten zu können, müsste man mit der rekursiven Darstellung alle Folgenglieder bis zum Gesuchten berechnen. Dies ist natürlich sehr aufwendig und würde einiges an Zeit in Anspruch nehmen.

Finden Sie eine Möglichkeit f_n auf direktem Weg zu erhalten, also eine Formel die unabhängig von ihren Vorgängern ist.

Lösungshinweis: Betrachten Sie die rekursive Darstellungsweise:

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Uns interessiert das Wachstum der Folgenglieder und da diese sehr schnell, sehr große Werte annehmen, vermuten wir, dass ein exponentielles Wachstum vorliegt. Deshalb wird der Ansatz

$$x_n := \lambda^n$$

ausgewählt, wobei es sich bei λ um eine unbekannte Zahl aus der Menge der reellen (oder komplexen) Zahlen handelt, welche bestimmt werden muss.

Lösung:

Wir setzen λ^n in die Rekursionsformel ein

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$$

Es ergibt sich die rekursive Bedingung:

$$\lambda^{n+2} = \lambda^{n+1} + \lambda^n.$$

Dividiert man nun durch λ^n und formt anschließend die Gleichung um, so folgt

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

Bei dieser (berühmten) Gleichung handelt es sich um das charakteristische Polynom der Rekursionsformel. Die Ergebnisse dieser quadratischen Gleichung lauten:

$$\lambda_1 = \Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{und} \quad \lambda_2 = \Psi = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = 1 - \lambda_1 = -\frac{1}{\lambda_1}.$$

Eine besondere (irrationale) Zahl stellt $\Phi \approx \mathbf{1.6180\dots}$ dar, da es sich hierbei um den **goldenen Schnitt** handelt.

Die Folge

$$x_n := c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n \quad \text{mit} \quad n \geq 0$$

erfüllt für beliebige reelle (oder komplexe) Konstanten c_1 ; c_2 die bekannte Rekursionsformel.

Wählt man nun die beiden Konstanten c_1 und c_2 so, dass die Startwerte der Fibonacci-Zahlen gelten, dann resultiert folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} f_0 = 0 &= c_1 + c_2 \\ f_1 = 1 &= c_1 \lambda_1 + c_2 \lambda_2 \end{aligned}$$

Daher muss $c_1 = -c_2$ gelten. Zudem erhalten wir durch Einsetzen der Werte von λ_1 und λ_2 die Lösungen für

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{und} \quad c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

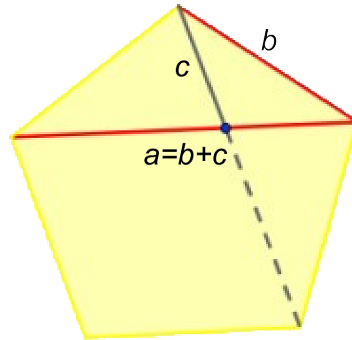
Demnach ist man ab jetzt in der vorteilhaften Lage die Fibonacci-Zahlen explizit darstellen zu können:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right] = \frac{\Phi^n - \Psi^n}{\sqrt{5}}.$$

Man nennt diesen Ausdruck die Formel von Binet.

3. **Aufgabe:** Misst man bei einem regelmäßigen Fünfeck gewisse Längen und bildet daraus ein Verhältnis, stößt man auf eine überraschende Eigenschaft.

So ist beispielsweise das Verhältnis der Diagonalen (c) zur Seitenlänge (b) gleich dem Verhältnis des langen Diagonalenabschnitts (*gestrichelt*) zum kurzen (c), wobei der lange Diagonalenabschnitt (*gestrichelt*) genauso lang wie eine Fünfeckseite (b) ist.



Wo muss man eine Strecke a teilen, so dass das Verhältnis aus b durch den kleinen Rest c gleich dem Verhältnis aus Gesamtstrecke a durch das kleinere b ist $\left(\frac{b}{c} = \frac{a}{b}\right)$?

Lösung:

$$\text{Mit } a = b + c \text{ ergibt sich } \Rightarrow \frac{b}{c} = \frac{b+c}{b}$$

Dieses Verhältnis ist nicht nur in der Mathematik ein ganz besonderes. Auch in der Kunst gilt es als besonders "ästhetisch".

Bei vielen Gebäuden stehen Länge und Breite oder Breite und Höhe im gleichen Verhältnis wie die bezeichneten Längen im regelmäßigen Fünfeck. Sogar in der Musik und der Literatur findet man dieses Verhältnis - dem **"goldenen Schnitt"**. Betrachtet man die Gesamtlänge des Stücks, so bildet hier der Höhepunkt oft den goldenen Schnitt.

Der goldene Schnitt ist natürlich nichts anderes als eine Zahl. Gewöhnlich wird diese mit dem großen griechischen Buchstaben Phi (Φ) abgekürzt (Siehe Aufgabe 2).

Mit unserer Gleichung finden wir recht schnell unsere berühmte quadratische Gleichung, deren positive Lösung unserem goldenen Schnitt Φ entspricht:

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{b+c}{b} = \frac{b}{b} + \frac{c}{b} = 1 + \frac{c}{b} \\ \phi &= 1 + \frac{1}{\phi} \quad \left| \cdot \phi \right. \\ \phi^2 &= \phi + 1 \quad \left| - \phi - 1 \right. \end{aligned}$$

Die Lösung dieser quadratischen Gleichung findet man wieder z. B. mit der $p-q$ Formel:

$$\Phi_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Mit dem Taschenrechner erhalten wir zwei Näherungswerte:

Die Summe ergibt $\Phi_1 \approx 1.6180$, die Differenz $\Phi_2(\Psi) = -0.6180$.

Da ein Verhältnis niemals negativ sein kann, liefert die positive Lösung unseren goldenen Schnitt. Die größere Länge beträgt somit etwas mehr als das $\frac{8}{5}$ -fache der kürzeren.

Der Zusammenhang mit logarithmischen Spiralen wird in Zusatzaufgabenblatt "Komplexe Zahlen" betrachtet.

