Mathematik 2: Übungsblatt 6 - Differentialgleichungen DGL

1. **Aufgabe:**

   Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme durch Trennung der Veränderlichen:

   a) $y' + y\cos(x) = 0 \;$ mit $\; y(\frac{\pi}{2}) = 2\pi$

   b) $x(x+1)y' = y \;$ mit $\; y(1) = \dfrac{1}{2}$

   Durch Trennung der Variablen ergibt sich:

   Lösung:

   a) Allgemeine Lösung:

   $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y\cos(x) = 0$$

   $$\frac{\mathrm{d}y}{y} = -\cos(x)\,\mathrm{d}x, \quad \text{also} \quad \int \frac{1}{y}\mathrm{d}y = \int -\cos(x)\,\mathrm{d}x$$

   $$\implies \ln|y| = -\sin x + A$$

   $$\implies |y| = e^{-\sin x + A} = e^{A}e^{-\sin x} = \boldsymbol{B \cdot e^{-\sin x}}$$

   Spezielle Lösung:

   Lösen des Anfangswertproblems:

   $$y(\tfrac{\pi}{2}) = 2\pi \quad \implies \quad \frac{B}{e} = 2\pi \quad \implies \quad B = 2e\pi$$

   Einsetzen $\implies \quad y(x) = \boldsymbol{2\pi e^{1-\sin x}}$

   b) Allgemeine Lösung:

   $$x(x+1)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y$$

   $$\frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{1}{x(x+1)}\,\mathrm{d}x, \quad \text{also} \quad \int \frac{1}{y}\mathrm{d}y = \int \frac{1}{x(x+1)}\,\mathrm{d}x$$

   NR: Koeffizientenvergleich

   $$\frac{1}{x(1+x)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} \quad |\cdot x(x+1)$$

   $$1 = a(x+1) + bx$$

   $$1 = a + x(a+b) \qquad (\text{Annahme: } a = 1)$$

   $$1 = x + 1 + bx$$

   $$0 = x(1+b) \quad |:x$$

   $$b = -1$$

   $$\implies \int \frac{1}{y}\mathrm{d}y = \int \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x$$

   $$\implies \ln|y| = \ln|x| - \ln|x+1| + A$$

   $$\implies |y| = e^{A}e^{\frac{x}{x+1}} = \boldsymbol{B \cdot \frac{x}{x+1}}$$

Spezielle Lösung:

Lösen des Anfangswertproblems:

$$y(1) = \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad B \cdot \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad B = 1$$

$$\text{Einsetzen} \quad \Longrightarrow \quad y(x) = \boldsymbol{\frac{x}{x+1}}$$

2. Aufgabe:

Welche der folgenden Differentialgleichungen sind linear, welche nichtlinear. Unterscheiden Sie außerdem die linearen Differentialgleichungen nach homogenen und inhomogenen Differentialgleichungen.

DGL	linear	nicht linear	homogen	inhomogen
$y' = xy$	X		X	
$x^3y' - y = 2xy^2$		X	N/A	N/A
$y' - 2y = \sin x$	X			X
$y'\cos x - y\sin x = 1$	X			X
$y'y^2 + x^2 = 1$		X	N/A	N/A
$y' = \sqrt{y}$		X	N/A	N/A
$y' - x(1+y^2) = 0$		X	N/A	N/A
$xy' + y = \ln x$	X			X
$y'' = 5x^4(y+1)$	X			X