Mathematik 2: Zusatzübungsblatt - Potenz- & Taylorreihen

Anwendung Taylor-Reihen: Fehlerabschätzung

Die Taylor-Formel (auch Satz von Taylor) ist ein Resultat aus dem mathematischen Teilgebiet der Analysis. Sie ist benannt nach dem Mathematiker Brook Taylor.

Man kann diese Formel verwenden, um Funktionen in der Umgebung eines Punktes durch Polynome, die sogenannten Taylorpolynome, anzunähern. Man spricht dann auch von der **Taylor-Näherung**.

Die Taylor-Formel ist aufgrund ihrer relativ einfachen Anwendbarkeit und Nützlichkeit ein Hilfsmittel in vielen Ingenieur-, Sozial- und Naturwissenschaften geworden. So kann ein komplizierter analytischer Ausdruck durch ein Taylorpolynom geringen Grades (oftmals gut) angenähert werden, z.B. in der Physik oder bei der Ausgleichung geodätischer Netze.

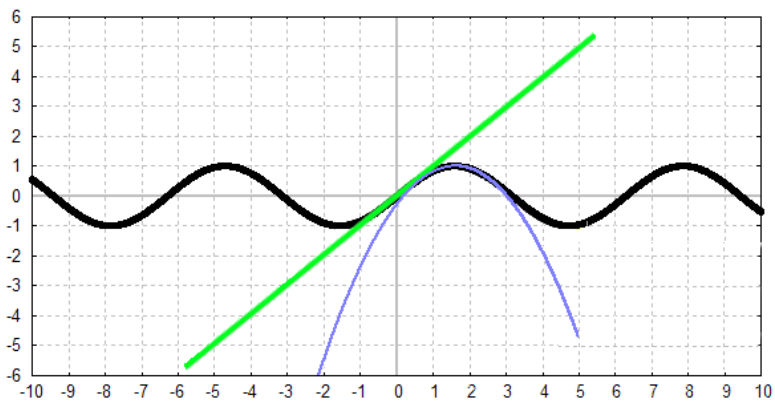
Die oft verwendete Kleinwinkelnäherung des Sinus z.B. ist eine bereits nach dem ersten Glied abgebrochene Taylorreihe dieser Funktion ($\sin(x) = x$).

1. Aufgabe:

Es sollen die Fehler abgeschätzt werden, die an der Stelle x auftreten, wenn die Sinusfunktion durch ein Taylorpolynom an der Stelle x_0 entwickelt wurde. Bei Approximation

a) 1. Grades, $x = 2,\ x_0 = 0$

b) 3. Grades, $x = 5,\ x_0 = \frac{\pi}{2}$ (ungefähr 1.57 oder 90°)



Lösung: (sehr ausführlich)

a) Die Formel für die Fehlerabschätzung lautet:

$$|R_n| \leq \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \max_{\xi \in [x_0, x]} \left| f^{(n+1)}(\xi) \right|$$

Einsetzen der Entwicklungsstelle $x_0 = 0$:

$$|R_n| \leq \frac{|x - 0|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \max_{\xi \in [0, x]} \left| f^{(n+1)}(\xi) \right|$$

Gesucht ist der Fehler an der Stelle $x = 2$, also müssen wir für x die Zahl 2 einsetzen:

$|R_n| \leq \frac{|2|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \max_{\xi \in [0,2]} \left| f^{(n+1)}(\xi) \right|$

Da das Taylorpolynom vom Grad 1 ist, müssen wir für $n = 1$ einsetzen:

$|R_1| \leq \frac{|2|^{1+1}}{(1+1)!} \cdot \max_{\xi \in [0,2]} \left| f^{(1+1)}(\xi) \right|$

$|R_1| \leq \frac{|2|^{2}}{2!} \cdot \max_{\xi \in [0,2]} \left| f^{(2)}(\xi) \right|$

Den Zähler und Nenner kann man ausrechnen:

$|R_1| \leq \frac{4}{2} \cdot \max_{\xi \in [0,2]} \left| f^{(2)}(\xi) \right|$

$|R_1| \leq 2 \cdot \max_{\xi \in [0,2]} \left| f^{(2)}(\xi) \right|$

Einsetzen der Sinusfunktion $f(\xi) = \sin(\xi)$:

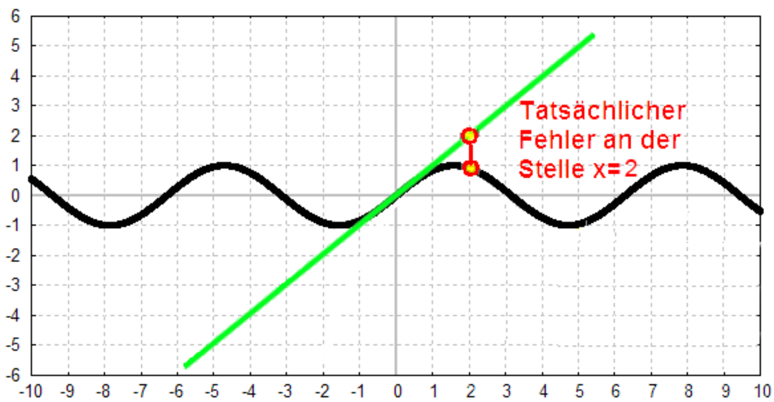
$|R_1| \leq 2 \cdot \max_{\xi \in [0,2]} \left| \sin^{(2)}(\xi) \right|$

Als nächstes bestimmen wir die 2. Ableitung der Sinusfunktion: Dies ist wieder die Sinusfunktion

$|R_1| \leq 2 \cdot \max_{\xi \in [0,2]} \left| \sin(\xi) \right|$

Nun fehlt nur noch der Maximalwert für $\sin(\xi)$, den der Betrag der Sinusfunktion im Intervall [0, 2] annehmen kann. Weil die Sinusfunktion den Wertebereich [-1,1] hat, ist dies der Wert 1:

$R_1 \leq 2 \cdot 1 \leq \mathbf{2}$



Ergebnis: Wenn die Sinusfunktion durch ein Näherungspolynom 1. Grades mit der Entwicklungsstelle $x_0 = 0$ approximiert wird, dann ist der Betrag des Fehlers an der Stelle x=2 kleiner (gleich) 2 Einheiten.

Im Bild erkennt man aber, dass der tatsächliche Fehler an der Stelle $x = 2$ nur ungefähr eine Einheit beträgt.

Man kann mit der Formel den Fehler nur grob abschätzen, aber nicht berechnen!

b) Da das Taylorpolynom vom Grad 3 ist, müssen wir für $n = 3$ einsetzen:

$|R_3| \leq \frac{\left|5-\frac{\pi}{2}\right|^{3+1}}{(3+1)!} \cdot \max_{\xi\in[\frac{\pi}{2},5]}\left|f^{(3+1)}(\xi)\right|$

Den Nenner und die Klammer kann man ausrechnen:

$|R_3| \leq \frac{|138.28|}{24} \cdot \max_{\xi\in[\frac{\pi}{2},5]}\left|f^{(4)}(\xi)\right|$

$|R_3| \leq 5.77 \cdot \max_{\xi\in[\frac{\pi}{2},5]}\left|f^{(4)}(\xi)\right|$

Einsetzen der Sinusfunktion $f(\xi)$ =sin(ξ):

$|R_3| \leq 5.77 \cdot \max_{\xi\in[\frac{\pi}{2},5]}\left|\sin^{(4)}(\xi)\right|$

Als nächstes bestimmen wir die 4. Ableitung der Sinusfunktion: Dies ist wieder die Sinusfunktion

$|R_3| \leq 5.77 \cdot \max_{\xi\in[\frac{\pi}{2},5]}\left|\sin(\xi)\right|$

Maximalwert für sin(ξ) $\rightarrow$ Wertebereich [-1,1] $\rightarrow$ Wert 1:

$R_3 \leq 5.77 \cdot 1 < \mathbf{5.77}$

Ergebnis: Wenn die Sinusfunktion durch ein Näherungspolynom 3. Grades mit der Entwicklungsstelle $x_0 = \pi/2$ approximiert wird, dann ist der Betrag des Fehlers an der Stelle x=5.7618492... , also kleiner als 5.77.

Im Bild erkennt man aber, dass der tatsächliche Fehler an der Stelle $x = 5$ nur knappe 4 Einheiten beträgt.