Mathematik 2: Zusatzübungsblatt - Potenz- & Taylorreihen

1. Aufgabe:

Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen. Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergieren die Reihen?
Bemerkung: Hier wird anstatt k, n als Laufvariable verwendet.

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+2}}{2^n} x^n$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n2^n}$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2019)^n}{n^n}$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$

Lösung:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+2}}{2^n} x^n$

Die Potenzreihe hat den Entwicklungsstelle $x_0 = 0$ und den Koeffizienten $a_n = \frac{3^{n+2}}{2^n}$. Der Konvergenzradius R ist:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{3^{n+2}}{2^n}}{\frac{3^{n+3}}{2^{n+1}}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{3^{n+2} 2^{n+9}}{2^n 3^{n+3}} \right| = \frac{1\cdot 2}{1 \cdot 3} = \frac{2}{3}$$

Das heißt die Reihe konvergiert für alle x ∈ $(x_0 - R, x_0 + R)$. In unserem Fall also für alle x ∈ $(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$

Schlussendlich müssen wir noch die Randpunkte des Konvergenzintervalls prüfen. Für $x = \frac{2}{3}$ sehen wir, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+2}}{2^n} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+2}}{2^n} \cdot \frac{2^n}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 3^2 = 9$$

Die Reihe konvergiert zur Partialsumme 9. Für $x = -\frac{2}{3}$ gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+2}}{2^n} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+2}}{2^n} \cdot \frac{2^n}{3^n} \cdot (-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} 3^2 (-1)^n = 9(-1)^n$$

ist die Reihe divergent.

Damit ergibt sich abschließend, dass die Reihe konvergiert, wenn $x \in [\frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n2^n}$

Die Potenzreihe hat den Entwicklungsstelle $x_0 = 0$ und den Koeffizienten $a_n = \frac{1}{n2^n}$. Der Konvergenzradius R ist:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{n^{2^n}}}{\frac{1}{(n+1)2^{n+1}}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1 \cdot (n+1) \cdot 2^{n+1}}{n2^n \cdot 1} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| 2 \frac{n+1}{n} \right| = 2$$

Das heißt die Reihe konvergiert für alle x ∈ $(x_0 - R, x_0 + R)$. In unserem Fall also für alle x ∈ $(2, -2)$

Schlussendlich müssen wir noch die Randpunkte des Konvergenzintervalls prüfen. Für $x = 2$ sehen wir, dass

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Die Reihe eine harmonische Reihe ist und daher divergent. Für $x = -2$ gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

Die Reihe ist eine alternierede harmonische Reihe und ist dadurch konvergent nach dem Leibnitz Kriterium.

Damit ergibt sich abschließend, dass die Reihe konvergiert, wenn $x \in (2, -2]$.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2019)^n}{n^n}$

Die Potenzreihe hat den Entwicklungsstelle $x_0 = 2019$ und den Koeffizienten $a_n = \frac{1}{n^n}$. Der Konvergenzradius R ist:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{n^n}}{\frac{1}{(n+1)^{n+1}}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \right| \underset{n\to\infty}{\to} \infty$$

Da der Konvergenzradius unendlich ist, konvergiert die Reihe für alle $x \in R$.

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$

Die Potenzreihe hat den Entwicklungsstelle $x_0 = 2019$ und den Koeffizienten $a_n = \frac{1}{n^2}$. Der Konvergenzradius R ist:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{(n+1)^2}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)^2}{n^2} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n^2+2n+1}{n^2} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| 1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} \right| = 1$$

Das heißt die Reihe konvergiert für alle x ∈ $(x_0 - R, x_0 + R)$. In unserem Fall also für alle x ∈ $(1, -1)$

Schlussendlich müssen wir noch die Randpunkte des Konvergenzintervalls prüfen. Für $x = 1$ sehen wir, dass

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Die Reihe konvergent ist, da der Exponent größer als eins ist. Für $x = -1$ gilt

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

Die Reihe ist ebenso nach dem Leibnitz Kriterium konvergent.

Damit ergibt sich abschließend, dass die Reihe konvergiert, wenn $x \in [1, -1]$.