Mathematik 2: Zusatzübungsblatt - Fktn. mehrerer Variablen 4

Mehrfachintegrale

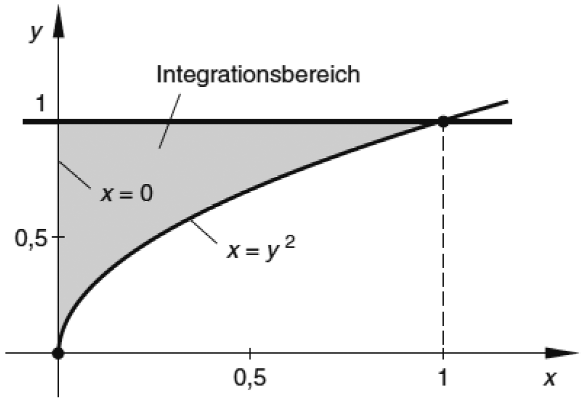
1. Aufgabe:

Gegeben ist das Doppelintegral

$$\boldsymbol{I} = \int_{y=0}^{1} \int_{x=0}^{y^2} e^{\frac{x}{y}} \, dx \, dy$$

Folgende Skizze zeigt den Integrationsbereich. Er wird in x-Richtung durch $x = 0$ (y-Achse) und $x = y^2$ (nach rechts geöffnete Parabelast) und in y-Richtung durch die Parallelen $y = 0$ (x-Achse) und $y = 1$ berandet.

Wie groß ist der Flächeninhalt?



Lösung:

$$A = \iint_{(A)} dA = \int_{y=0}^{1} \int_{x=0}^{y^2} e^{x/y} \, dx \, dy$$

1. Innere Integration (nach x): $\int e^{x/y} \, dx$

Substitution $u = \frac{x}{y} \Longrightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{y} \Rightarrow dx = y \cdot du$

$\Longrightarrow y \int e^u \, du$ Regel für Exponentialfkt. anwenden

$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ mit $a = e$

Rücksubstitution $u = \frac{x}{y}$

$\Longrightarrow y \cdot e^{x/y}$

$$A = \int_{y=0}^{1} \left[y e^{x/y} \right]_0^{y^2} = \int_{y=0}^{1} \left(y e^{y^2/y} - y e^{0/y} \right) dy = \int_{y=0}^{1} y(e^y - 1) \, dy$$

2. Äußere Integration (nach y)

$$A = \int_{y=0}^{1} (y \cdot e^y - y) \, dy = \left[(y-1) \cdot e^y - \frac{1}{2} y^2 \right]_0^1$$

$$= \left[0 - \frac{1}{2} \right] - \left[-1 - 0 \right]$$

$$= -\frac{1}{2} + 1$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

Produktintegration: $\int u(y) \cdot v'(y) \, dy = u(y) \cdot v(y) - \int u'(y) \cdot v(y) \, dy$

$\int y \cdot e^y \, dy$ $\qquad \left.\begin{matrix} u(y) = y \\ u'(y) = 1 \end{matrix}\right\}$ abl. $\qquad \left.\begin{matrix} v(y) = e^y \\ v'(y) = e^y \end{matrix}\right\}$ int.

$$\int y \cdot e^y \, dy = y \cdot e^y - \int 1 \cdot e^y \, dy$$

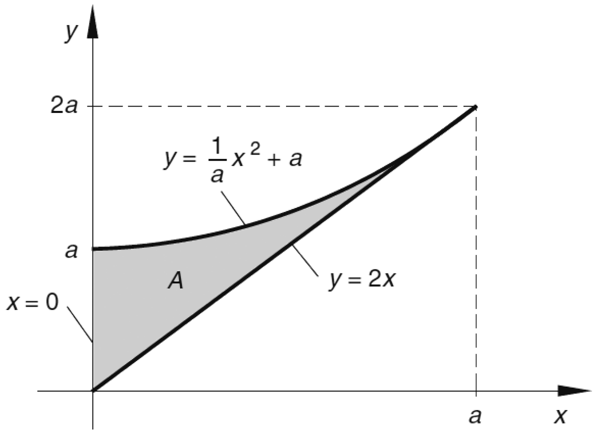
$$= y \cdot e^y - e^y$$

$$= (y-1) e^y + C \quad \text{(allgemein mit Konstante)}$$

2. Aufgabe:

Ein Flächenstück wird berandet durch die
y-Achse ($x = 0$),
$y = 2x$ und
$y = \frac{1}{a}x^2 + a$ mit ($a > 0$).

Berechnen Sie den Flächeninhalt A.



Lösung:

Zunächst wichtig -> Schnittpkt. Parabel mit Gerade:

$$\frac{1}{a}x^2 + a = 2x$$

$$x^2 + a^2 = 2ax$$

$$x^2 - 2ax + a^2 = 0 \iff (x-a)^2 = 0 \quad (2.\ \text{Binom})$$

$\Rightarrow x_{1/2} = a$, daraus folgt ein zweifacher Berührpkt. $B(a/2a)$

Somit Integration in x-Richtung von $x = 0$ bis $x = a$,
in y-Richtung von $y = 2x$ bis $\frac{1}{a}x^2 + a$

$$A = \iint_{(A)} dA = \int_{x=0}^{a} \int_{y=2x}^{1/a\, x^2+a} dy\, dx$$

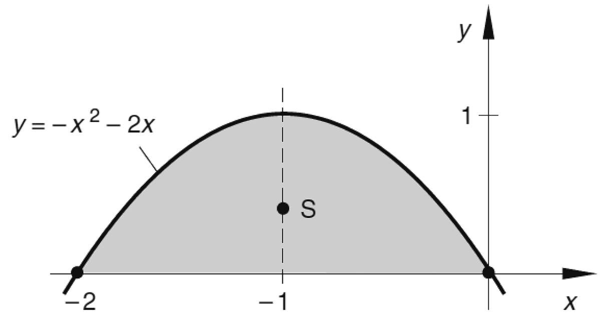
$$= \int_{x=0}^{a} \left[y \right]_{2x}^{1/a\, x^2+a} dx = \int_0^a \left(\frac{1}{a}x^2 + a\right) dx - (2x) dx$$

$$= \left[\frac{1}{3a}x^3 + ax\right]_0^a - \left[x^2\right]_0^a = \frac{1}{3}a^2 + a^2 - a^2$$

$$= \frac{1}{3}a^2$$

3. Aufgabe:

Bestimmen Sie den Schwerpunkt S der Fläche zwischen der Parabel $y = -x^2 - 2x$ und der x-Achse ($y = 0$) mittels Doppelintegral.



Lösung:

Nullstellen d. Parabel sind Integrationsgrenzen, $x_1 = -2$, $x_2 = 0$

Es gilt:

$$A = \iint_{(A)} dA = \int_{x=-2}^{0} \int_{y=0}^{-x^2-2x} 1 \, dy \, dx = \int_{-2} \left(\left[y \right]_0^{-x^2-2x} \right) dx$$

$$= \int_{-2}^{0} (-x^2 - 2x) \, dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 - x^2 \right]_{-2}^{0}$$

$$= 0 - \left(\frac{8}{3} - 4 \right) = 0 - \frac{8}{3} + \frac{12}{3} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$$

Schwerpunktskoordinate $x_S = -1$ (durch Ablesen)

Schwerpunktskoordinate y_S ber.:

$$y_S = \frac{1}{A} \cdot \iint y \, dA = \frac{3}{4} \cdot \int_{x=-2}^{0} \int_{y=0}^{-x^2-2x} y \, dy \, dx$$

Innere Integration (n. y)

$$\int_{y=0}^{-x^2-2x} y \, dy = \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_0^{-x^2-2x} = \frac{1}{2}(-x^2-2x)^2 - 0$$

NR.: $(-x^2-2x) \cdot (-x^2-2x)$

$$= \frac{1}{2}(x^4 + 4x^3 + 4x^2)$$

Äußere Integration (n. x)

$$\frac{3}{4} \int_{x=-2}^{0} \frac{1}{2}(x^4 + 4x^3 + 4x^2) \, dx = \frac{3}{8} \left[\frac{1}{5}x^5 + x^4 + \frac{4}{3}x^3 \right]_{-2}^{0}$$

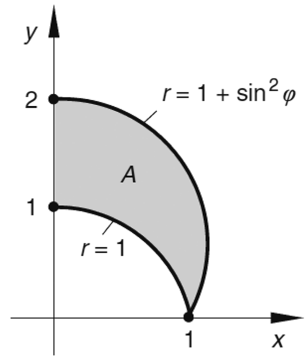
$$= \frac{3}{8} \left(0 - \left(-\frac{32}{5} + 16 - \frac{32}{3} \right) \right)$$

$$= \frac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{8}_{1}} \cdot \frac{\cancel{16}^{2}}{\cancel{15}_{5}} = \frac{2}{5} = 0{,}4$$

$\Rightarrow$ Schwerpkt $S = (-1 \,/\, 0{,}4)$

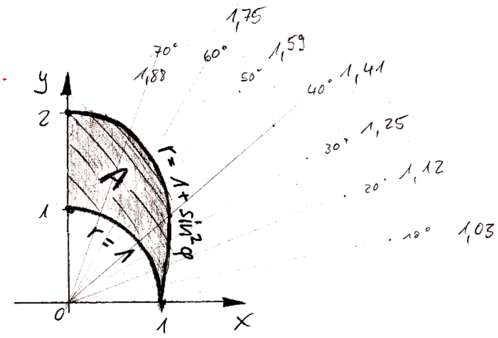
4. Aufgabe:

Zu berechnen ist der Flächeninhalt A des im 1. Quadranten liegenden Flächenstückes, berandet durch die Kurven $r = 1+\sin^2\varphi$ und $r = 1$ (Einheitskreis).
Die Polarkoordinaten sind r und φ.



Lösung:

geg.:



Obere Berandung: $r = 1+\sin^2\varphi$

Untere Berandung: $r = 1$

Der Integrationsbereich in Polarkoordinaten lautet

Radius: $r = 1$ bis $1+\sin^2\varphi$

Drehwinkel: $\varphi = 0$ bis $\frac{\pi}{2}$

ges.

Doppelintegral für Flächeninhalt

$$A = \iint_{(A)} dA = \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \int_{r=1}^{1+\sin^2\varphi} r \, dr \, d\varphi$$

Anm.: Flächenelement $dA = r \, dr \cdot d\varphi$

1. Innere Integration (nach der Variablen r, also Radius)

$$\int_1^{1+\sin^2\varphi} r \, dr = \left[\frac{1}{2} r^2\right]_1^{1+\sin^2\varphi} = \frac{1}{2}\left[r^2\right]_1^{1+\sin^2\varphi} = \frac{1}{2}\left[(1+\sin^2\varphi)^2 - 1\right]$$

$=$

2. Äußere Integration (nach dem Drehwinkel φ)

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}\left[(1+\sin^2\varphi)^2 - 1\right] d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\left[\cancel{1} + 2\sin^2\varphi + \sin^4\varphi - \cancel{1}\right] d\varphi$$

$$\frac{1}{2}\left[2\sin^2\varphi + \sin^4\varphi\right] d\varphi = \left[\frac{\sin(4x) - 24 \cdot \sin(2x) + 44x}{64}\right]_0^{\pi/2} = \underline{\underline{\frac{11}{32}\pi}}$$

Integration:

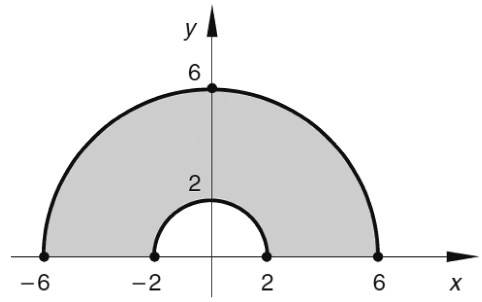
$$\int(\sin^4\varphi + 2\sin^2\varphi)d\varphi = \int \sin^4\varphi \, d\varphi + 2\int \sin^2\varphi \, d\varphi \quad \rightarrow \quad \text{Reduktionsformel}$$

Es gilt: $\int \sin^n(x)\,dx = \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}(x)\,dx - \frac{\cos(x) \cdot \sin^{n-1}(x)}{n}$ mit $n = 4$

$$= -\frac{\cos(x) \cdot \sin^3(x)}{4} + \frac{3}{4}\int \sin^2(x)\,dx$$

5. Aufgabe:

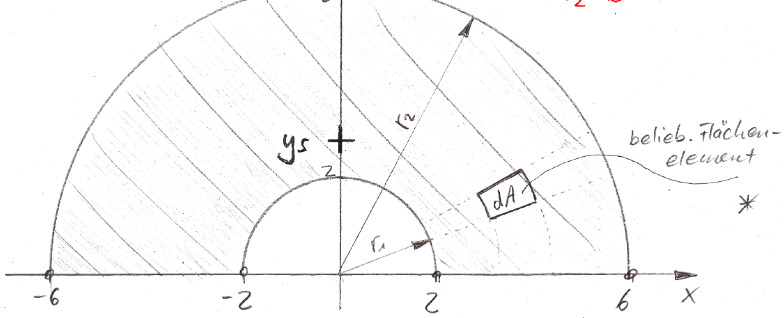
Es ist der Flächenschwerpunkt S folgender Fläche zu berechnen …



Lösung:

geg. Innenradius $r_1 = 2$

Außenradius $r_2 = 6$



Winkelbereich $0 \le \varphi \le \pi$

ges. Flächenschwerpunkt $S\ (x_s / y_s)$

Flächeninhalt $A = \frac{1}{2}\pi(r_2^2 - r_1^2) = \frac{1}{2}\pi(36-4) = 16\pi = 50{,}265\ldots$
(elementar ber.)

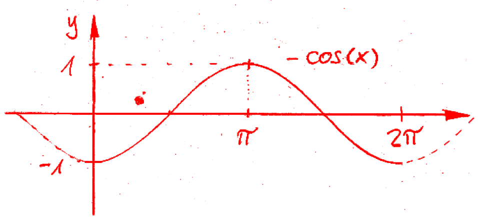
Ausnutzung der Symmetrie zur y-Achse, d.h. x_s liegt auf y-Achse, also $x_s = 0$, Ordinate y_s über Doppelintegral ber.

$$y_s = \frac{1}{A}\iint y\, dA = \frac{1}{16\pi}\cdot \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi}\int_{r=2}^{r=6} r^2 \cdot \sin\varphi\, dr\, d\varphi$$

(mit Transformationsgl. $y = r\cdot\sin\varphi$, Flächenelement $dA = r\, dr\, d\varphi$ *)

$$y_s = \frac{1}{16\pi}\int_0^{\pi}\left[\frac{1}{3}r^3\right]_2^6 \cdot \sin\varphi\, d\varphi = \frac{1}{16\pi}\cdot\left(72 - \frac{8}{3}\right)\cdot\left[-\cos\varphi\right]_0^{\pi}$$

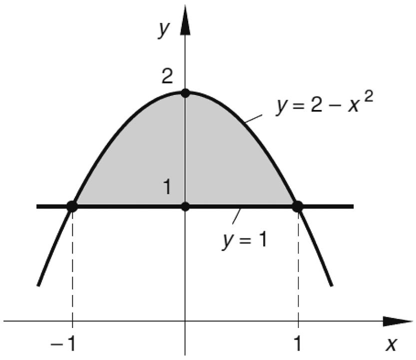
$$y_s = \frac{1}{16\pi}\cdot\frac{208}{3}\cdot\left(1-(-1)\right) = \underline{\underline{\frac{26}{3\pi} = 2{,}758\ldots}}$$



zur Erinnerung:
− cos schaut so aus

6. Aufgabe:

Welches Volumen V hat ein Körper mit der skizzierten Bodenfläche ($x-y$-Ebene), der durch die Funktion $z = 5{-}x{-}y$ nach oben begrenzt wird?

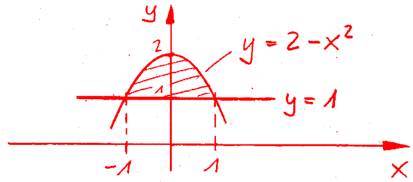


Lösung:

Dreifachintegrale in kartesischen Koordinaten

geg. Begrenzungsfkt. $z = 5 - x - y$

Bodenfläche in x-y-Ebene



ges. Volumenintegral

$$V = \iiint_{(V)} dV = \int_{x=-1}^{x=1} \int_{y=1}^{y=2-x^2} \int_{z=0}^{z=5-x-y} 1\, dz\, dy\, dx$$

Anm.: Integrationsreihenfolge ist also z, y, x

1. Integr. n. z:

$$\int_0^{5-x-y} 1\, dz = \left[z \right]_0^{5-x-y} = (5-x-y) - 0 = 5-x-y$$

2. Integr. n. y:

$$\int_1^{2-x^2} (5-x-y)\, dy = \left[5y - xy - \tfrac{1}{2} y^2 \right]_1^{2-x^2}$$

$$= 5(2-x^2) - x(2-x^2) - \tfrac{1}{2}(2-x^2)^2 - 5 + x + \tfrac{1}{2}$$

$$= 10 - 5x^2 - 2x + x^3 - 2 + 2x^2 - \tfrac{1}{2}x^4 - 5 + x + \tfrac{1}{2}$$

$$= -\tfrac{1}{2}x^4 + x^3 - 3x^2 - x + \tfrac{7}{2}$$

3. Integr. n. x:

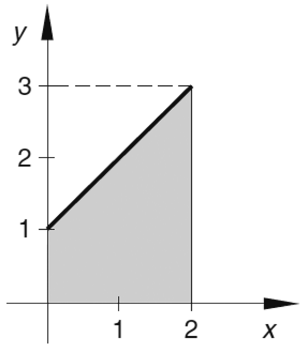
$$\int_{-1}^{1} \left(-\tfrac{1}{2}x^4 + x^3 - 3x^2 - x + \tfrac{7}{2}\right) dx = \left[-\tfrac{1}{10}x^5 + \tfrac{1}{4}x^4 - x^3 - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{7}{2}x \right]_{-1}^{1}$$

$$= -\tfrac{1}{10} + \tfrac{1}{4} - 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{7}{2} - \tfrac{1}{10} - \tfrac{1}{4} - 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{7}{2} = -\tfrac{1}{5} + 5 = \tfrac{24}{5}$$

$$\Rightarrow V = \frac{24}{5} = 4\tfrac{4}{5}$$

7. Aufgabe:

Ein prismatischer Körper hat in der x-y-Ebene die skizzierte trapezförmige Querschnittsfläche. Der Boden liegt in der Ebene $z = 1$ und der Deckel ist eine Teilfläche von $z = x^2 + y + 2$.
Das Prismenvolumen V ist zu berechnen, mittels Dreifachintegral.



Lösung:

geg.: trapezförm. Boden in x-y-Ebene auf Höhe $z = 1$, darüber der Deckel in $z = x^2 + y + 2$, somit gilt:

x-Integration von $x = 0$ bis $x = 2$

y- " von $y = 0$ bis $y = x + 1$

z- " von $z = 1$ bis $z = x^2 + y + 2$

$$V = \iiint_{(V)} dV = \int_{x=0}^{2} \int_{y=0}^{x+1} \int_{z=1}^{x^2+y+2} 1 \, dz \, dy \, dx$$

1. Integr. nach z

$$\int_{z=1}^{x^2+y+2} 1 \, dz = \Big[z \Big]_1^{x^2+y+2} = (x^2+y+2) - 1 = x^2 + y + 1$$

2. Integr. nach y

$$\int_{y=0}^{x+1} (x^2+y+1) dy = \left[x^2 y + \frac{1}{2} y^2 + y \right]_0^{x+1} =$$

Achtung: $x+1$ einsetzen in y !

$$= x^2 \cdot (x+1) + \frac{1}{2}(x+1)^2 + x + 1 - 0$$

$$= x^3 + x^2 + \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2} + x + 1 = x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2x + \frac{3}{2}$$

3. Integr. nach x

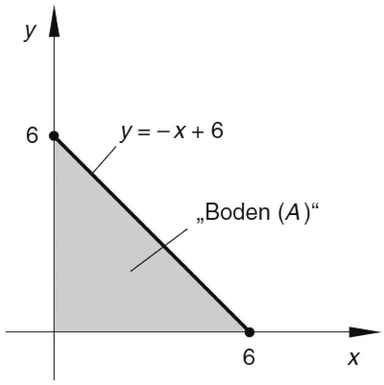
$$V = \int_{x=0}^{2} \left(x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2x + \frac{3}{2}\right) dx = \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^3 + x^2 + \frac{3}{2}x \right]_0^2$$

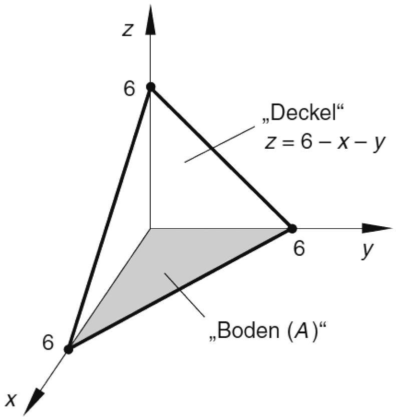
$$= 4 + 4 + 4 + 3 - 0 = \underline{\underline{15}}$$

8. Aufgabe:

Ein prismatischer Körper hat in der x-y-Ebene die skizzierte trapezförmige Querschnittsfläche. Der Boden liegt in der Ebene $z = 1$ und der Deckel ist eine Teilfläche von $z = x^2 + y + 2$.

Das Prismenvolumen V und der Schwerpunkt S sind zu berechnen, mittels Dreifachintegral.





Lösung:

Volumen :

$$V = \iiint_{(V)} dV = \int_{x=0}^{6} \int_{y=0}^{6-x} \int_{z=0}^{6-x-y} 1\,dz\,dy\,dx$$

(Volumenelement $dV = dz\,dy\,dx$)

1. Integrat. nach z :

$$\int_{z=0}^{6-x-y} 1\,dz = [z]_0^{6-x-y} = (6-x-y) - 0 = 6-x-y$$

2. Integrat. nach y :

$$\int_{y=0}^{6-x} (6-x-y)\,dy = \left[6y - xy - \frac{1}{2}y^2\right]_0^{6-x} = 6(6-x) - x\cdot(6-x) - \frac{1}{2}(6-x)^2 - 0$$

$$= 36 - 6x - 6x + x^2 - 18 + 6x - \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}x^2 - 6x + 18$$

3. Integrat. nach x :

$$V = \int_{x=0}^{6} \left(\frac{1}{2}x^2 - 6x + 18\right)dx = \left[\frac{1}{6}x^3 - 3x^2 + 18x\right]_0^6$$

$$= 36 - 108 + 108 - 0 = \underline{\underline{36}}$$

Schwerpunktskoordinaten $\rightarrow S = (x_s \,|\, y_s \,|\, z_s)$

$$x_s = \frac{1}{V} \cdot \iiint\limits_{(V)} dV = \frac{1}{36} \cdot \int_{x=0}^{6} \int_{y=0}^{6-x} \int_{z=0}^{6-x-y} x \, dz \, dy \, dz$$

1. Int. $\rightarrow z$

$$\int_{z=0}^{6-x-y} x \, dz = x \cdot \int_{z=0}^{6-x-y} 1 \, dz = x \cdot [z]_0^{6-x-y} = x \cdot [(6-x-y)-0]$$

$$= 6x - x^2 - xy$$

2. Int. $\rightarrow y$

$$\int_{y=0}^{6-x} (6x - x^2 - xy) \, dy = \left[6xy - x^2 y - \frac{1}{2} x y^2\right]_0^{6-x}$$

$$= 6x \cdot (6-x) - x^2 \cdot (6-x) - \frac{1}{2} x \cdot (6-x)^2 - 0 = \underline{36x} \cancel{-6x^2} - 6x^2 + x^3 \underline{-18x} \cancel{+6x^2} - \frac{x^3}{2}$$

$$= \frac{1}{2} x^3 - 6x^2 + 18x$$

3. Int. $\rightarrow x$

$$x_s = \frac{1}{36} \cdot \int_{x=0}^{6} \left(\frac{1}{2} x^3 - 6x^2 + 18x\right) dx = \frac{1}{36} \left[\frac{1}{8} x^4 - 2x^3 + 9x^2\right]_0^6$$

$$= \frac{1}{36} \cdot (162 - 432 + 324 - 0) = \frac{54}{36} = \frac{3}{2} = \underline{1{,}5}$$

Anm.: $x_s = y_s = z_s$