Mathematik 2: Zusatzübungsblatt - Fktn. mehrerer Variablen 3

1. Aufgabe:

Berechnen Sie die bestimmten Integrale:

a) $\int_0^{\pi} \int_0^1 r^2 \sin(\phi)\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\phi$

b) $\int_0^1 \int_0^z \int_0^y 6x + 4y^2 + 2z^3\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z$

Lösung:

a)

$$\int_0^{\pi} \int_0^1 r^2 \sin(\phi)\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\phi = \int_0^{\pi} \left[\frac{r^3}{3} \sin(\phi)\right]_{r=0}^{1} \mathrm{d}\phi$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{1}{3} \sin(\phi)\, \mathrm{d}\phi = \left[-\frac{1}{3}\cos(\phi)\right]_{\phi=0}^{\pi} = -\frac{1}{3}(-1) - (-\frac{1}{3} \cdot 1) = \frac{2}{3}$$

b)

$$\int_0^1 \int_0^z \int_0^y 6x + 4y^2 + 2z^3\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z = \int_0^1 \int_0^z \left[3x^2 + 4xy^2 + 2xz^3\right]_{x=0}^{y} \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z$$

$$= \int_0^1 \int_0^z 3y^2 + 4y^3 + 2yz^3\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z = \int_0^1 \left[y^3 + y^4 + y^2 z^3\right]_{y=0}^{z} \mathrm{d}z$$

$$= \int_0^1 z^3 + z^4 + z^5\, \mathrm{d}z = \left[\frac{z^4}{4} + \frac{z^5}{5} + \frac{z^6}{6}\right]_{z=0}^{1} = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}$$

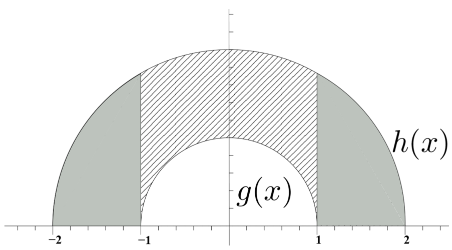
2. Aufgabe:

Berechnen Sie das Volumen unter $f(x, y) = y - 2x$

$$\int_{-2}^{2} \int_{g(x)}^{h(x)} y - 2x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x \qquad \text{wobei } g(x) \text{ und } h(x) \text{ gegeben sind durch:}$$

$$g(x) := \begin{cases} \sqrt{1 - x^2}, & \text{falls } -1 \le x \le 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$h(x) := \begin{cases} \sqrt{4 - x^2}, & \text{falls } -2 \le x \le 2 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$



a) Verwenden Sie kartesische Koordinaten

Hinweis: Teilen Sie das äußere Integral in drei Teile auf. In der Skizze Sehen Sie die Integrationsbereiche dargestellt.

b) Verwenden Sie Polarkoordinaten

Lösung:

a) Als Gesamtlösung für das gesuchte Integral ergibt sich:

$$\int_{-2}^{2}\int_{g(x)}^{h(x)} y-2x\;\mathrm{d}y\;\mathrm{d}x \;=\; \mathbf{4+\frac{2}{3}}$$

Im gesamten integrationsbereich gilt $h(x) = \sqrt{4-x^2}$, allerdings ist $g(x)$ eine zusammengesetzte Funktion. D.h., der Integrationsbereich für x muss in 3 Teile geteilt werden, auf denen $g(x)$ nicht zusammengesetzt ist:

- für $x \in [-2,-1]$ gilt: $g(x) = 0$
- für $x \in [-1,\ 1]$ gilt: $g(x) = \sqrt{1-x^2}$
- für $x \in [\ 1,\ 2]$ gilt: $g(x) = 0$

Wir setzen $f(x,y) = y - 2x$ und erhalten:

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^{2}\int_{g(x)}^{h(x)} y-2x\mathrm{d}y\mathrm{d}x &= \underbrace{\int_{-2}^{-1}\int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x}_{=\frac{5}{6}+2\sqrt{3}} + \underbrace{\int_{-1}^{1}\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x}_{=3} + \underbrace{\int_{1}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x}_{=\frac{5}{6}-2\sqrt{3}} \\
&= 3 + 2\frac{5}{6} = 4 + \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

Wir berechnen die einzelenen Integrale nun jeweils in einer Nebenrechnung:

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^{-1}\int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} y-2x\;\;\mathrm{d}y\mathrm{d}x &= \int_{-2}^{-1}\left[\frac{y^2}{2}-2xy\right]_{y=0}^{\sqrt{4-x^2}}\;\mathrm{d}x \\
&= \int_{-2}^{-1}\frac{4-x^2}{2} - 2x\cdot\sqrt{4-x^2}\;\;\mathrm{d}x \\
&= \left[2x-\frac{x^3}{6}+\frac{2}{3}\left(4-x^2\right)^{3/2}\right]_{x=-2}^{-1} \\
&= -2+\frac{1}{6}+\frac{2}{3}\sqrt{3^3}\;\; - (-4+\frac{8}{6}+0) = \frac{5}{6}+2\sqrt{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1}\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} y-2x\;\;\mathrm{d}y\mathrm{d}x &= \int_{-1}^{1}\left[\frac{y^2}{2}-2xy\right]_{y=\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\;\mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{1}\frac{4-x^2}{2} - 2x\sqrt{4-x^2}\;\; - \left(\frac{1-x^2}{2}-2x\sqrt{1-x^2}\right)\;\mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{1}\frac{3}{2} - 2x\cdot\sqrt{4-x^2}\;\; - \left(-2x\sqrt{1-x^2}\right)\;\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{3}{2}x+\frac{2}{3}\left(4-x^2\right)^{3/2}-\frac{2}{3}\left(1-x^2\right)^{3/2}\right]_{x=-1}^{1} \\
&= \frac{3}{2}+\frac{2}{3}\sqrt{3^3}-0\;\; - (-\frac{3}{2}+\frac{2}{3}\sqrt{3^3}-0) = 3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} y - 2x \;\; \mathrm{d}y\mathrm{d}x &= \int_1^2 \left[\frac{y^2}{2} - 2xy\right]_{y=0}^{\sqrt{4-x^2}} \;\; \mathrm{d}x \\
&= \int_1^2 \frac{4-x^2}{2} - 2x \cdot \sqrt{4-x^2} \;\; \mathrm{d}x \\
&= \left[2x - \frac{x^3}{6} + \frac{2}{3}\left(4-x^2\right)^{3/2}\right]_{x=1}^{2} \\
&= 4 - \frac{8}{6} + 0 \;\; - (2 - \frac{1}{6} + \frac{2}{3}\sqrt{3^3}) = \frac{5}{6} - 2\sqrt{3}
\end{aligned}$$

b) Das Berechnen des Integrals in gewöhnlichen Koordinaten ist sehr rechenaufwändig! In Polarkoordinaten ist das Berechnen wesentlich einfacher. Wichtigster Lernschritt bei dieser Aufgabe ist also: Ein Koordinatenwechsel kann sich manchmal erheblich lohnen.
Beim Wechsel von kartesischen Koordinaten zu Polarkoordinaten, benötigen wir neben dem eigentlichen Ersetzen der Variablen, noch den Korrekturterm r.
Wir erhalten:

$$x = r\cos(\phi) \quad y = r\sin(\phi) \quad \mathrm{d}x \; \mathrm{d}y = r \; \mathrm{d}r \; \mathrm{d}\phi$$

Der Integrationsbereich ist ein Halbkreissegment mit Radius $r \in [1,2]$ und Öffnungswinkel $\phi \in [0,\pi]$. Um dessen Fläche zu berechnen, müssen wir das folgende Integral lösen:

$$\begin{aligned}
\int_B 1 \;\; \mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^\pi \int_1^2 1 \;\; r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\phi \\
&= \int_0^\pi \left[\frac{r^2}{2}\right]_{r=1}^2 \;\; \mathrm{d}\phi \;\; = \;\; \int_0^\pi \frac{3}{2} \; \mathrm{d}\phi = \left[\frac{3}{2}\phi\right]_{\pi=0}^{\pi} \;\; = \frac{3}{2}\pi
\end{aligned}$$

Um das Integral zu berechnen, setzen wir in den Integranten $y - 2x$ die Werte $x = r\cos(\phi)$ und $y = r\sin(\phi)$ ein:

$$\begin{aligned}
\int_B y - 2x \;\; \mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^\pi \int_1^2 (r\sin(\phi) - 2r\cos(\phi)) \;\; r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\phi \\
&= \int_0^\pi \left[\frac{r^3}{3}\sin(\phi) - \frac{r^3}{3} 2\cos(\phi)\right]_{r=1}^2 \;\; \mathrm{d}\phi \;\; = \;\; \int_0^\pi \frac{7}{3}\sin(\phi) - \frac{14}{3}\cos(\phi) \; \mathrm{d}\phi \\
&= \left[-\frac{7}{3}\cos(\phi) - \frac{14}{3}\sin(\phi)\right]_{\phi=0}^{\pi} = -\frac{7}{3}(-1) + 0 \;\; - \left(-\frac{7}{3}(1) + 0\right) = \frac{14}{3} = 4 + \frac{2}{3}
\end{aligned}$$