Mathematik 2: Zusatzübungsblatt - Fktn. mehrerer Variablen 2

Richtungsableitung

1. Aufgabe:

Durch ein Gelände mit der Höhe

$$h(x,y) = \frac{1000 + x + y + \sqrt{xy+76}}{10}$$

werde längs der Gerade

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

eine Straße gebaut.

Bestimmen Sie den Anstieg der Straße im Geländepunkt $(x,y) = (4,6)$.

Lösung:

Richtungsableitung (Maß für die Änderung der Funktion f in Richtung $\vec{v}$):
Ist die Funktion f im Punkt $\vec{x}$ total differenzierbar, so existieren alle Richtungsableitungen. Für $\|\vec{v}\| = 1$ gilt $\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial \vec{v}} = \nabla f(\vec{x}) \cdot \vec{v}$. Hat der Vektor $\vec{v}$ eine andere Länge, so muss er erst normiert werden. Es gilt dann $\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial \vec{v}} = \nabla f(\vec{x}) \cdot \vec{v}_n = \frac{1}{\|\vec{v}\|} \nabla f(\vec{x}) \cdot \vec{v}$.

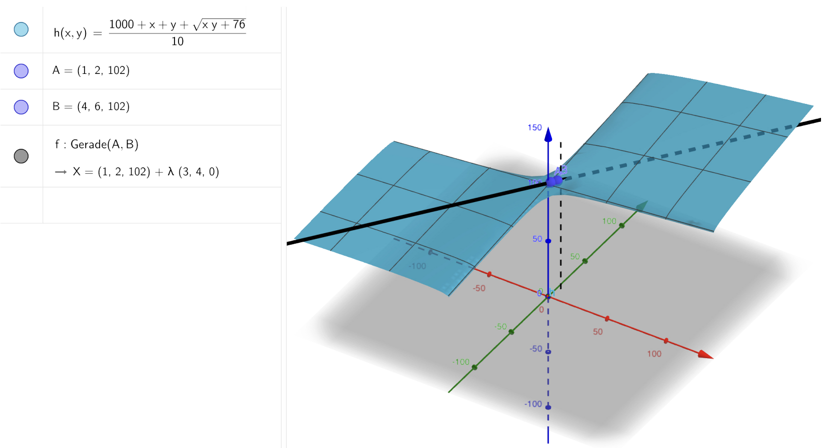
$$\nabla h = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 + \frac{y}{2\sqrt{xy+76}} \\ 1 + \frac{x}{2\sqrt{xy+76}} \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \text{ normiert: } \vec{v}_n = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial h}{\partial \vec{v}} = \nabla h \cdot \vec{v}_n = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 + \frac{y}{2\sqrt{xy+76}} \\ 1 + \frac{x}{2\sqrt{xy+76}} \end{pmatrix} \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 + \frac{6}{20} \\ 1 + \frac{4}{20} \end{pmatrix} \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{100} \begin{pmatrix} 13 \\ 12 \end{pmatrix} \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{39 + 48}{500} = \underline{\underline{\frac{87}{500} = 0.174}}$$

Somit beträgt der Anstieg 17,4 %. (Ein Anstieg von $1 = 100\,\%$ entspricht einem Steigungswinkel von $45°$.)

In Richtung $\vec{v}$ gilt $\Delta h \approx \frac{\partial h}{\partial \vec{v}} \|\Delta \vec{x}\|$. Pro Meter Basislänge beträgt der Anstieg ca. 17,4 cm, d.h. für 1 m ca. 17,4 cm, für 2 m ca. 34,8 cm und für 10 m ca. 1,74 m.



Anwendung Totales Differential: BWL

2. Aufgabe:

Eine Ackerfläche wird mit Hopfen bestellt. Zuvor wird Kunstdünger der Sorte 1 in x_1 Mengeneinheiten und Kunstdünger der Sorte 2 in x_2 Mengeneinheiten ausgestreut.

Aus langjähriger Erfahrung weiß der Landwirt, dass der Ertrag in Abhängigkeit von der Düngung bei normalen Wetterbedingungen durch die folgende Funktion wiedergegeben wird:

$$f(x_1, x_2) = -x_1^2 - 2x_2^2 + x_1x_2 + 7x_1 + 14x_2 + 100$$
$$D = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x_1 \leq 14, 0 \leq x_2 \leq 7\}$$

Wie ändert sich näherungsweise der Ertrag, wenn der Landwirt den Düngereinsatz von $(x_1, x_2) = (6, 6)$ auf $(5, 5)$ ändert? Benutzen Sie zu dieser näherungsweisen Bestimmung der Ertragsänderung das totale Differential.

Lösung:

Bestimmung der näherungsweisen Änderung des Ertrags

$f(x_1, x_2) = -x_1^2 - 2x_2^2 + x_1x_2 + 7x_1 + 14x_2 + 100,$

durch berechnen des totalen Differentials:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}f &= \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial f}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x_i \\
&= \frac{\partial f}{\partial x_1}\,\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\,\mathrm{d}x_2 \\
&= \frac{\partial f}{\partial x_1}(-x_1^2 - 2x_2^2 + x_1x_2 + 7x_1 + 14x_2 + 100)\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(-x_1^2 - 2x_2^2 + x_1x_2 + 7x_1 + 14x_2 + 100)\mathrm{d}x_2 \\
&= (-2x_1 + x_2 + 7)\mathrm{d}x_1 \;+\; (-4x_2 + x_1 + 14)\mathrm{d}x_2
\end{aligned}$$

Bestimmung von $\mathrm{d}x_1$ und $\mathrm{d}x_2$:

$\mathrm{d}x_1$ und $\mathrm{d}x_2$ werden durch die Differenz der gegebenen Punkte ermittelt:

$\mathrm{d}x_1 = 5 - 6 = -1$

$\mathrm{d}x_2 = 5 - 6 = -1$

Einsetzen in das totale Differential:

$\mathrm{d}f(6, 6, -1, -1) = (-2 \cdot 6 + 6 + 7) \cdot (-1) + (-4 \cdot 6 + 6 + 14) \cdot (-1) = -1 + 4 = \mathbf{3}$