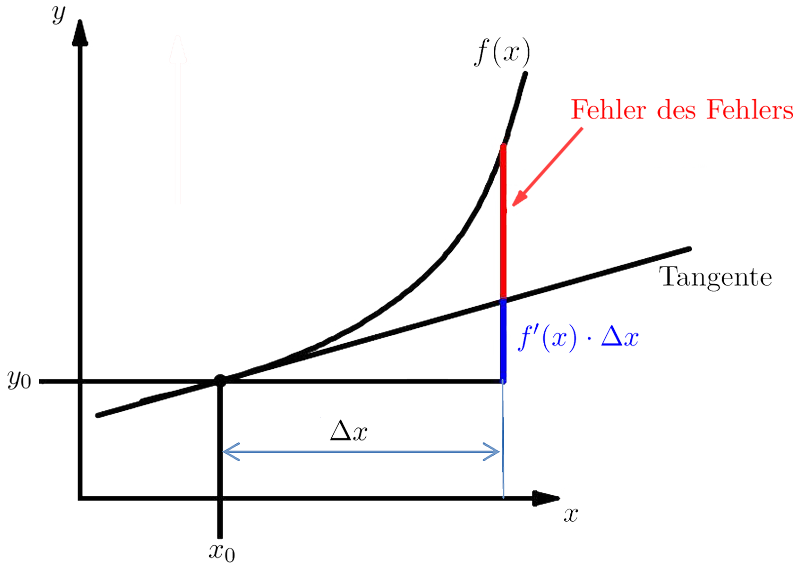
Anwendung Totales Differential: Fehlerrechnung



Tatsächlicher Fehler

Wir betrachten zuerst die Funktion einer Variablen $y = f(x)$

Wähle Δx infinitesimal klein, somit verschwindet der Fehler des Fehlers

$$\mathrm{d}f = f'(x) \cdot \mathrm{d}x$$
$$\boldsymbol{\mathrm{d}f = f_x(x)\mathrm{d}x}$$

Bei Funktionen mit zwei Variablen: $z = f(x, y)$

$$\mathrm{grad}(f) \begin{pmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \end{pmatrix} = \nabla f \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \end{pmatrix} = \nabla f \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$
$$\boldsymbol{\mathrm{d}f = f_x \mathrm{d}x + f_y \mathrm{d}y}$$

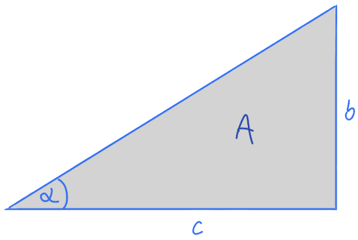
Bei Funktionen mit drei Variablen: $z = f(x, y, z)$

$$\mathrm{grad}(f) \begin{pmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \\ \mathrm{d}z \end{pmatrix} = \nabla f \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \\ \mathrm{d}z \end{pmatrix} = \nabla f \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$
$$\boldsymbol{\mathrm{d}f = f_x \mathrm{d}x + f_y \mathrm{d}y + f_z \mathrm{d}z}$$

Bei Funktionen mit n Variablen: $y = f(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$

$$\boldsymbol{\mathrm{d}f = f_{x_1} \mathrm{d}_{x_1} + f_{x_2} \mathrm{d}_{x_2} + ... + f_{x_n} \mathrm{d}_{x_n}}$$

1. **Aufgabe:**



Ein Dreieck hat die Seitenlängen $b = 5$ cm, $c = 8$ cm, $\alpha = 30°$.

Der Flächeninhalt errechnet sich aus: $\boldsymbol{A = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin(\alpha)}$

Man berechne für $\Delta b = +2\%$, $\Delta c = -3\%$ und $\Delta\alpha = -1°$

a) den exakten Flächeninhalt

b) den absoluten und den relativen Fehler des Flächeninhaltes, wobei hier die tatsächliche Änderung berechnet wird (ohne Betragsbildung, also kein "worst case"). Dabei können sich Einzelfehler teilweise aufheben.

Lösung:

a) **Exakter Flächeninhalt:**

$A = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 8 \cdot \sin(30°) = 10 \left[\text{cm}^2\right]$

b) **Absoluter Fehler:**

i. **Bestimmung von $\boldsymbol{\Delta b}$, $\boldsymbol{\Delta c}$ und $\boldsymbol{\Delta\alpha}$**

$$\Delta b = \frac{5 \cdot 2}{100} = 0.1 \qquad \Delta c = \frac{8 \cdot (-3)}{100} = -0.24 \qquad \Delta\alpha = \frac{-1 \cdot \pi}{180} = -\frac{-\pi}{180} \text{ (Bogenmaß)}$$

ii. **Partielle Ableitung von $\boldsymbol{A = \frac{1}{2} bc \cdot \sin(\alpha)}$ bilden:**

$$\frac{\partial A}{\partial b} = \frac{1}{2} c \cdot \sin(\alpha) \qquad \frac{\partial A}{\partial c} = \frac{1}{2} b \cdot \sin(\alpha) \qquad \frac{\partial A}{\partial \alpha} = \frac{1}{2} bc \cdot \cos(\alpha)$$

In der rein mathematischen Anwendung errechnet sich der Fehler mit dem totalen Differential:

$$\boxed{\mathrm{d}A = \frac{\partial A}{\partial b} \cdot \mathrm{d}b + \frac{\partial A}{\partial c} \cdot \mathrm{d}c + \frac{\partial A}{\partial \alpha} \cdot \mathrm{d}\alpha}$$

iii. **Fehler berechnen:**

In der Messtechnik Praxis ist folgende Schreibweise üblich:

$$\boxed{\Delta A = A_b \cdot \Delta b + A_c \cdot \Delta c + A_\alpha \cdot \Delta\alpha}$$

$$\Delta A = 0.5 \cdot 8 \cdot \sin(30°) \cdot 0.1 + \tfrac{1}{2} \cdot 5 \cdot \sin(30°) \cdot (-0.24) + \tfrac{1}{2} \cdot 5 \cdot 8 \cdot \cos(30°) \cdot \left(\frac{-\pi}{180}\right)$$

$\boldsymbol{\Delta A \approx 0.402 \left[\text{cm}^2\right]}$

iv. **Relativer Fehler:**

$$\frac{\Delta A}{A} = \frac{0.402}{10} = 0.0402 = \mathbf{4.02\%}$$

2. Aufgabe:

Meist interessiert man sich für den "worst case", wenn sich alle Fehler ihn die gleiche Richtung addieren. Dann nimmt man überall die Beträge, wie in nachstehendem Beispiel:

Der Innendurchmesser D eines dünnen Rohres der Länge l kann wie folgt bestimmt werden. Das Rohr wird mit Quecksilber der Dichte ρ befüllt. Die Masse m des benötigten Quecksilbers wird gewogen. Daraus kann der Durchmesser berechnet werden:

$$D = D(\rho, m, l) = \sqrt{\frac{4m}{\pi \rho l}}$$

Folgende Werte werden gemessen:

- Dichte: $\rho = 13.8\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$ mit der Messungenauigkeit $\mathrm{d}\rho = \pm 0.8\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$
- Masse $m_0 = 55.4$ g mit einer Messungenauigkeit $\mathrm{d}m = \pm 0.5$ g
- Länge des Rohres: $l_0 = 74.2$ cm mit der Messungenauigkeit $\mathrm{d}l = \pm 0.052$ cm

Fragen:

a) Berechnen Sie den Durchmesser D_0 mit den gemessenen Werten

b) Berechnen Sie die **partiellen Ableitungen** von D nach ρ, m und l

c) Berechnen Sie den **absoluten** und **relativen** Fehler mit den oben gegebenen Messungenauigkeiten unter Verwendung des **totalen Differentials.**

Lösung:

a) **Berechnung des Durchmessers D_0**

$$D_0 = \sqrt{\frac{4m}{\pi \rho l}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 55.4\ \mathrm{g}}{\pi \cdot 13.8 \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3} \cdot 74.2\ \mathrm{cm}}} \approx \mathbf{0.262\ cm}$$

b) **Partielle Ableitungen**

$$D_0 = \sqrt{\frac{4m}{\pi \rho l}} = 2 \cdot \sqrt{\frac{m}{\pi \rho l}}$$

(NR: Potenz- & Kettenregel)

Ableitungen von Wurzeln

$f(x) = \sqrt{x} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$f(x) = \sqrt{\frac{x}{t}} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{t}}} \cdot \frac{1}{t}$

Mit Kettenregel und $\frac{x}{t}$ abgeleitet $= \frac{1}{t}$

$$\frac{\partial D}{\partial m} = D_{m_0} = \frac{1}{\sqrt{\pi \cdot \rho \cdot l \cdot m}}$$

$$\frac{\partial D}{\partial \rho} = D_{\rho_0} = 2\sqrt{\frac{m}{\pi l}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)\rho^{-\frac{3}{2}}$$

$$\frac{\partial D}{\partial l} = D_{l_0} = 2\sqrt{\frac{m}{\pi \rho}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)l^{-\frac{3}{2}}$$

$$\Rightarrow \quad D_{m_0} = \frac{1}{\sqrt{\pi \cdot 13.8 \cdot 74.2 \cdot 55.4}} = \mathbf{0.00237}$$

$$\Rightarrow \quad D_{\rho_0} = -\sqrt{\frac{m}{\pi \rho^3 l}} = \textbf{-0.00951}$$

$$\Rightarrow \quad D_{l_0} = -\sqrt{\frac{m}{\pi \rho l^3}} = \textbf{-0.00177}$$

c) **Absoluter Fehler**

$$\mathrm{d}D_{\max} = |D_{m_0} \cdot \mathrm{d}m| + |D_{\rho_0} \cdot \mathrm{d}\rho| + |D_{l_0} \cdot \mathrm{d}l|$$

$$\mathrm{d}D_{\max} = 0.00237 \cdot 0.5 + 0.00951 \cdot 0.8 + 0.00177 \cdot 0.05$$

$$\mathbf{d}\boldsymbol{D}_{\max} = \mathbf{0.00888\ [cm]}$$

d) **Relativer Fehler**

$$\frac{\mathrm{d}D_{\max}}{D_0} = \frac{0.00888}{0.262} \approx 0.0338 \approx \mathbf{3.4\%}$$

3. Aufgabe:

In der Messtechnik treten sehr häufig Produkte $x \cdot y$ und Quotienten $\frac{x}{y}$ auf.

Man möchte deshalb wissen, wie sich hier relative Fehler auswirken (z.B. bei $U = R \cdot I,\ v = \frac{s}{t}$).
Welche Regel lässt sich hier generell (über den Weg des totalen Differentials) herleiten?

Hinweis:
Da sich die Fehler nicht gegenseitig aufheben sollen, wird mit Größt- bzw. Maximalfehlern gerechnet (Betragsbildung).

Lösung:

Mit $z = f(x, y) = xy$
erhält man das totale Differential: $\mathrm{d}z = y \cdot \mathrm{d}x + x \cdot \mathrm{d}y, \qquad \Big| : \frac{1}{z} \quad \hat{=} \quad \Big| \cdot \frac{1}{xy}$

woraus sich für den relativen Fehler des Produktes ergibt:

$$\left|\frac{\mathrm{d}z}{z}\right| = \left|\frac{y\mathrm{d}x}{xy} + \frac{x\mathrm{d}y}{xy}\right| \leq \left|\frac{\mathrm{d}x}{x}\right| + \left|\frac{\mathrm{d}y}{y}\right|$$

Die Regel lautet also: Der maximale relative Fehler eines Produktes ist gleich der Summe der beiden maximalen relativen Fehler der Faktoren.

Mit $z = f(x, y) = \frac{x}{y}$
erhält man das totale Differential: $\mathrm{d}z = \frac{1}{y} \cdot \mathrm{d}x - \frac{x}{y^2} \cdot \mathrm{d}y, \qquad \Big| : \frac{1}{z} \quad \hat{=} \quad \Big| \cdot \frac{y}{x}$

woraus sich für den relativen Fehler des Quotienten ergibt:

$$\left|\frac{\mathrm{d}z}{z}\right| = \left|\frac{1}{y} \cdot \frac{y}{x} \cdot \mathrm{d}x - \frac{x}{y^2} \cdot \frac{y}{x} \cdot \mathrm{d}y\right| \leq \left|\frac{\mathrm{d}x}{x}\right| + \left|\frac{\mathrm{d}y}{y}\right|$$

Die Regel lautet also: Der maximale relative Fehler eines Quotienten ist gleich der Summe der relativen Fehler von Zähler und Nenner.

Satz:
Bei der Multiplikation oder Quotientenbildung von Messgrößen addieren sich die relativen Fehler.