Mathematik 2: Zusatzübungsblatt 2 - Integralrechnung

5) Informieren Sie sich in Ihrer Formelsammlung, welche Integrale nicht elementar integrierbar sind , also keine Stammfunktion für die Funktion existiert und entscheiden Sie, welche von den hier angegebenen Integralen keine Stammfunktion besitzt.
Für die anderen Integrale geben Sie die zu verwendende Integrationsmethode an:

a) $\int x^2 e^{-x} dx$ b) $\int x e^{-x^2} dx$ c) $\int e^{-x^2} dx$ d) $\int \frac{e^x}{x} dx$ e) $\int \frac{x}{e^x} dx$

f) $\int \frac{\sin x}{x} dx$ g) $\int x \sin x dx$ h) $\int x \sin(x^2) dx$ i) $\int \sin^2 x \, dx$ j) $\int x^2 \sin x dx$

k) $\int \frac{1}{\sin x} dx$ l) $\int \frac{x}{\sin x} dx$ m) $\int x \ln x dx$ n) $\int \ln x dx$ o) $\int \frac{dx}{\ln x}$

p) $\int \frac{\ln x}{x} dx$ q) $\int \frac{x}{\ln x} dx$ r) $\int x^2 \ln x dx$ s) $\int \frac{dx}{x \ln x}$

6) Bestimmen Sie Stammfunktionen, entscheiden Sie selbst, welche Integrationsmethode(n) zu verwenden sind:

a) $\int e^{\sqrt{x}} dx$ b) $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx$ c) $\int \frac{\cos x}{1-\cos^2 x} dx$ d) $\int x \ln(x^2) dx$

e) $\int \frac{e^{3x}}{e^x + 1} dx$ f) $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx$ g) $\int \frac{dx}{e^{2x} - 2e^x} dx$ h) $\int \sin(\ln x) dx$

7) Berechnen Sie den von $y = 2\sqrt{x}$ und $y = \sqrt{1-x}$ eingeschlossenen Flächeninhalt.

8) Die Fläche unter der Kurve $y = e^{\frac{1}{2}x}$ zwischen $x = 0$ und $x = 3$ soll durch eine Senkrechte zur x- Achse halbiert werden.
An welcher Stelle schneidet diese die x- Achse?

9) Man berechne das Volumen eines Rotationskörpers, der durch Rotation einer Parabel 3. Ordnung um die x- Achse im Intervall $[0;4]$ entsteht. Die Parabel soll die Punkte $P_0(0;1), P_1(1;\frac{3}{2}), P_3(2;3)$ enthalten und an der Stelle $x = 2$ den Anstieg 1 haben.

10) Wie groß ist die Fläche zwischen dem Graphen von $f(x) = \frac{\cos x}{\sin^3 x + \cos^3 x}$, der x-Achse und den Geraden $x = 0$ und $x = \frac{\pi}{4}$?

11) Berechnen Sie das Volumen des Körpers, der entsteht, wenn die Kurve $f(x) = 2xe^x$ für $0 \le x \le 1$ um die x-Achse rotiert.

12) Für welche $\alpha \in R$ ist $\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ konvergent bzw. divergent?

13) Bestimmen Sie im Falle der Existenz den Wert der folgenden uneigentlichen Integrale:

a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ b) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\cosh^2 x}$ c) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9}$ d) $\int_0^\infty \cos(nx) dx$ e) $\int_3^\infty \frac{x^2+3}{x^2(x^2-1)} dx$

14) Bestimmen Sie im Falle der Existenz den Wert der folgenden uneigentlichen Integrale:

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x dx$ b) $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{|x|}}$ c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1-\sin x} dx$ d) $\int_0^9 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$ e) $\int_0^9 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^4}}$

Lösung:

Aufgabe 5

a) $\int x^2 e^{-x} dx$ partielle Integration (2x)

b) $\int x e^{-x^2} dx$ Substitution $t = -x^2$

c) $\int e^{-x^2} dx$ keine Stammfunktion

d) $\int \frac{e^x}{x} dx$ keine Stammfunktion

e) $\int \frac{x}{e^x} dx = \int x e^{-x} dx$ partielle Integration

f) $\int \frac{\sin x}{x} dx$ keine Stammfunktion

g) $\int x \sin x dx$ partielle Integration

h) $\int x \sin(x^2) dx$ Substitution $t = x^2$

i) $\int \sin^2 x dx = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)\right) dx$ lineare Substitution $t = 2x$,
oder partielle Integration wähle: $u = \sin x$; $v' = \sin x$

j) $\int x^2 \sin x dx$ partielle Integration (2x)

k) $\int \frac{1}{\sin x} dx$ Substitution $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

l) $\int \frac{x}{\sin x} dx$ keine Stammfunktion

m) $\int x \ln x dx$ partielle Integration

n) $\int \ln x dx$ partielle Integration

o) $\int \frac{dx}{\ln x}$ keine Stammfunktion

p) $\int \frac{\ln x}{x} dx$ Substitution $t = \ln x$

q) $\int \frac{x}{\ln x} dx$ keine Stammfunktion

r) $\int x^2 \ln x dx$ partielle Integration

s) $\int \frac{dx}{x \ln x}$ Substitution $t = \ln x$

Aufgabe 6

a) Subst.: $t=\sqrt{x}$ $,dx=2\sqrt{x}dt=2tdt$, $\int e^{\sqrt{x}}dx=2\int te^{t}dt \overset{part.Int.}{=} 2(t-1)e^{t}=2(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}}+c$

b) $\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx=\int\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}\cdot\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}}dx=\int\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx-\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$=\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+c$, 2. Integral mit Substitution: $t=1-x^2$

c) $\int\frac{\cos x}{1-\cos^2 x}dx=\int\frac{\cos x}{\sin^2 x}dx$, Subst.: $t=\sin x$, $\int\frac{\cos x}{\sin^2 x}dx=\int\frac{\cos x}{t^2}\frac{dt}{\cos x}=-\frac{1}{t}=-\frac{1}{\sin x}+c$

d) $\int x\ln(x^2)dx=2\int x\ln x dx=x^2\ln x-\frac{1}{2}x^2+c$, mit part. Integration: $u=\ln x;\ \ v'=x$,

e) Subst.: $t=e^x, dx=\frac{dt}{t}$, $\int\frac{e^{3x}}{e^x+1}dx=\int\frac{t^3}{t+1}\frac{dt}{t}=\int\frac{t^2}{t+1}dt=\int t-1+\frac{1}{t+1}dt=$

$=\frac{1}{2}t^2-t+\ln|t+1|+c=\frac{1}{2}e^{2x}-e^x+\ln|e^x+1|+c$

f) Subst.: $t=1+\sqrt{x}\Rightarrow\sqrt{x}=t-1, dx=2\sqrt{x}dt=2(t-1)dt$, $\int\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx=\int\frac{t-1}{t}2(t-1)dt$

$=2\int\frac{t^2-2t+1}{t}dt=2\int t-2+\frac{1}{t}dt=t^2-4t+2\ln|t|=(1+\sqrt{x})^2-4(1+\sqrt{x})+2\ln|1+\sqrt{x}|+c$

$=x-2\sqrt{x}+2\ln|1+\sqrt{x}|+c$

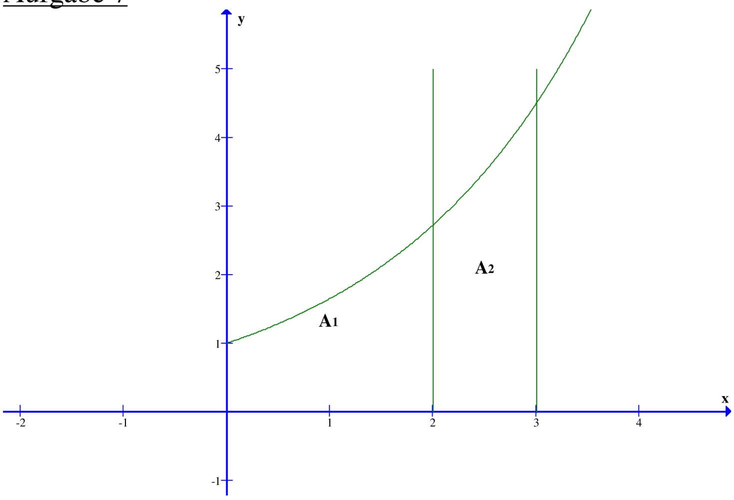
g) Subst.: $t=e^x, dx=\frac{dt}{t}$ $\int\frac{dx}{e^{2x}-2e^x}dx=\int\frac{dt}{(t^2-2t)t}=\int\frac{dt}{t^2(t-2)}$, Partialbruchzerlegung

$=\int-\frac{1}{2t^2}-\frac{1}{4t}+\frac{1}{4(t-2)}dt=\frac{1}{2t}-\frac{1}{4}\ln|t|+\frac{1}{4}\ln|t-2|+c=\frac{1}{2}e^{-x}-\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}\ln|e^x-2|+c$

h) Subst.: $t=\ln x, dx=xdt=e^t dt$,

$\int\sin(\ln x)dx=\int\sin(t)\,e^t dt=\int e^t\sin t\,dt \overset{\substack{zweimal\\ part.Int.}}{=} \frac{1}{2}e^t(\sin t-\cos t)+c=\frac{1}{2}x(\sin(\ln x)-\cos(\ln x))+c$

Aufgabe 7



$$A_1 = A_2, \quad \int_0^{x_0} e^{\frac{x}{2}}dx = \int_{x_0}^{3} e^{\frac{x}{2}}dx \Rightarrow \left[2e^{\frac{x}{2}}\right]_0^{x_0} = \left[2e^{\frac{x}{2}}\right]_{x_0}^{3} \Rightarrow e^{\frac{x_0}{2}} - 1 = e^{\frac{3}{2}} - e^{\frac{x_0}{2}} \Rightarrow x_0 \approx 2{,}02$$

Aufgabe 8

$y = ax^3 + bx^2 + cx + d, \quad y' = 3ax^2 + 2bx + c$

$P_0(0;1): \quad 1 = d$

$P_1(1;\frac{3}{2}): \quad \frac{3}{2} = a + b + c + 1 \qquad a + b + c = \frac{1}{2}$

$P_2(2;3): \quad 3 = 8a + 4b + 2c + 1 \qquad 4a + 2b + c = 1$

$y'(2) = 1: \quad 1 = 12a + 4b + c \qquad 12a + 4b + c = 1$

Die eindeutige Lösung dieses inhomogenen LGS ist $a = \frac{1}{2}, b = 2, c = -1, d = 1$.

Parabelgleichung: $y = -\frac{1}{2}x^3 + 2x^2 - x + 1$

$$V = \pi \int_0^4 (-\tfrac{1}{2}x^3 + 2x^2 - x + 1)^2 dx = \pi \int_0^4 (\tfrac{1}{4}x^6 - 2x^5 + 5x^4 - 5x^3 + 5x^2 - 2x + 1)dx$$

$$= \pi\left[\tfrac{1}{28}x^7 - \tfrac{1}{3}x^6 + x^5 - \tfrac{5}{4}x^4 + \tfrac{5}{3}x^3 - x^2 + x\right]_0^4 \approx 58{,}04 \text{ VE}$$

Aufgabe 9

a) $y' = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{x^2}, \quad 1 + y'^2 = 1 + \frac{1}{16}x^4 - \frac{1}{2} + \frac{1}{x^4} = \left(\frac{x^2}{4} + \frac{1}{x^2}\right)^2$

$$s = \int_{x=2}^{4} \left(\frac{x^2}{4} + \frac{1}{x^2}\right)^2 dx = \left[\frac{x^3}{12} - \frac{1}{x}\right]_2^4 = \frac{59}{12} \approx 4{,}92 \text{ LE}$$

b) $y' = \cot x, \quad 1 + y'^2 = \frac{1}{\sin x},$

$$s = \int_{x=\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x} = \left[\ln \tan\left(\tfrac{x}{2}\right)\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \tfrac{1}{2}\ln 3 \approx 0{,}549 \text{ LE}$$

(ausführliche Integration mit Substitution $t = \tan\frac{x}{2}$ dann ist $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$ und $dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}$)

Aufgabe 10

Da $f(x)$ im Integrationsbereich keine Nullstellen hat, ist $A=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x}{\sin^3 x+\cos^3 x}dx$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x}{\sin^3 x+\cos^3 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x}{\sin^3 x+\cos^3 x}\cdot\frac{\frac{1}{\cos^3 x}}{\frac{1}{\cos^3 x}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\tan^3 x+1}dx,$$

Subst.: $t=\tan x, dx=\cos^2 xdt;\ x=0\to t=0;\ x=\frac{\pi}{4}\to t=1$

$$A=\int_0^1\frac{1}{t^3+1}dt\overset{PBZ}{=}\int_0^1\frac{1}{3(t+1)}+\frac{-t+2}{3(t^2-t+1)}dt=\left.\left[\tfrac{1}{3}\ln|t+1|-\tfrac{1}{6}\ln\left|t^2-t+1\right|+\tfrac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\tfrac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)\right]\right|_0^1$$

$$=\tfrac{1}{3}\ln 2+\tfrac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right)-\tfrac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(-\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right)=\tfrac{1}{3}\ln 2+\tfrac{1}{\sqrt{3}}\tfrac{\pi}{6}-\tfrac{1}{\sqrt{3}}\left(-\tfrac{\pi}{6}\right)=\tfrac{1}{3}\left(\ln 2+\tfrac{\pi}{\sqrt{3}}\right)\approx 0{,}836FE$$

Aufgabe 11

$$V=\pi\int_0^1(2xe^x)^2dx=4\pi\int_0^1x^2e^{2x}dx\overset{\substack{zweimal\\ part.Integr.}}{=}4\pi\tfrac{1}{4}e^{2x}\left(2x^2-2x+1\right)\Big]_0^1=\pi\left(e^2-1\right)\ \text{VE}$$

Aufgabe 12

$$\int_1^\infty\frac{dx}{x^\alpha}=\lim_{z\to\infty}\int_1^z\frac{dx}{x^\alpha}\overset{\text{für }\alpha\neq1}{=}\lim_{z\to\infty}\left.\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^z=\frac{1}{1-\alpha}\lim_{z\to\infty}z^{1-\alpha}-1=\begin{cases}\frac{1}{\alpha-1}, & \text{für}\ \alpha>1\\ \text{kein Grenzwert} & \text{für}\ \alpha<1\end{cases}$$

$$\alpha=1:\ \int_1^\infty\frac{dx}{x}=\lim_{z\to\infty}\int_1^z\frac{dx}{x}=\lim_{z\to\infty}\ln|x|\big]_1^z=\lim_{z\to\infty}\ln|z|-\ln 1=\infty$$

also Konvergenz für $\alpha>1$ und Divergenz für $\alpha\le 1$

Aufgabe 13

a) $$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to\infty}}\int_a^b\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to\infty}}[\arctan x]_a^b=\lim_{b\to\infty}\arctan b-\lim_{a\to-\infty}\arctan a=\tfrac{\pi}{2}-\left(-\tfrac{\pi}{2}\right)=\pi$$

b) $$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\cosh^2 x}=\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to\infty}}\int_a^b\frac{dx}{\cosh^2 x}=\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to\infty}}[\tanh x]_a^b=\lim_{b\to\infty}\tanh b-\lim_{a\to-\infty}\tanh a=1-(-1)=2$$

c) $$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+4x+9}=\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to\infty}}\int_a^b\frac{dx}{x^2+4x+9}=\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to\infty}}\int_a^b\frac{dx}{(x+2)^2+5}=\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to\infty}}\frac{1}{5}\int_a^b\frac{dx}{\left(\frac{x+2}{\sqrt{5}}\right)^2+1}=$$

$$=\frac{\sqrt{5}}{5}\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to\infty}}\left|\arctan\tfrac{x+2}{\sqrt{5}}\right|_a^b=\frac{\sqrt{5}}{5}\lim_{b\to\infty}\arctan\left(\tfrac{b+2}{\sqrt{5}}\right)-\frac{\sqrt{5}}{5}\lim_{a\to-\infty}\arctan\left(\tfrac{a+2}{\sqrt{5}}\right)=\frac{\sqrt{5}}{5}\left(\tfrac{\pi}{2}-\left(-\tfrac{\pi}{2}\right)\right)=\frac{\sqrt{5}}{5}\pi$$

d) $$\int_0^\infty\cos(nx)dx=\lim_{z\to\infty}\int_0^z\cos(nx)dx=\lim_{z\to\infty}\left[\tfrac{1}{n}\sin(nx)\right]_0^z=\tfrac{1}{n}\left(\lim_{z\to\infty}\sin(nz)-0\right).$$

Das Integral ist divergent, da $\lim_{z\to\infty}\sin(nz)$ nicht existiert.

e) $\int_3^\infty\frac{x^2+3}{x^2(x^2-1)}dx$, Partialbruchzerlegung: $\frac{x^2+3}{x^2(x-1)(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-1}+\frac{D}{x+1}$

$A=0,\ B=-3,\ C=2,\ D=-2$ also $\int\limits_3^{\infty}\frac{x^2+3}{x^2(x^2-1)}dx = \lim\limits_{z\to\infty}\int\limits_3^{z}-\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x-1}-\frac{2}{x+1}dx$

$$= \lim_{z\to\infty}\left[\tfrac{3}{x}+2\ln|x-1|-2\ln|x+1|\right]_3^z = \lim_{z\to\infty}\left(\tfrac{3}{z}+2\ln\tfrac{z-1}{z+1}-1-2\ln\tfrac{2}{4}\right) = -1-2\ln\tfrac{1}{2} = -1+\ln 4$$

Aufgabe 14

a) Integrand ist unbeschränkt für $x=\frac{\pi}{2}$

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\tan x dx = \lim_{z\to\frac{\pi}{2}+}\int\limits_0^{z}\frac{\sin x}{\cos x}dx = \lim_{z\to\frac{\pi}{2}+}\left[-\ln|\cos x|\right]_0^z = \lim_{z\to\frac{\pi}{2}+}\left(-\ln|\cos z|\right)+\ln 1$$

Der Grenzwert existiert nicht, das Integral divergiert.

b) Integrand ist unbeschränkt für $x=0$

$$\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{|x|}} = \int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt{-x}}+\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{z\to 0-}\int\limits_{-1}^{z}\frac{dx}{\sqrt{-x}}+\lim_{z\to 0+}\int\limits_z^1\frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{z\to 0-}\left[-2\sqrt{-x}\right]_{-1}^z+\lim_{z\to 0+}\left[2\sqrt{x}\right]_z^1$$

$$= \lim_{z\to 0-}\left(-2\sqrt{-z}+2\right)+\lim_{z\to 0+}\left(2-2\sqrt{z}\right)=4$$

c) Integrand ist unbeschränkt für $x=\frac{\pi}{2}$

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1-\sin x}dx = \lim_{z\to\frac{\pi}{2}-}\int\limits_0^{z}\frac{\cos x}{1-\sin x}dx,$$

Subst.: $t=\sin x,\ dx=\frac{dt}{\cos x},\ Grenzen:\ x=0\to t=0, x=z\to t=\sin z$

$$\lim_{z\to\frac{\pi}{2}-}\int\limits_0^{\sin z}\frac{1}{1-t}dt = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-}\left[-\ln|1-t|\right]_0^{\sin z} = \lim_{z\to\frac{\pi}{2}-}\left(-\ln|1-\sin z|\right)$$

Der Grenzwert existiert nicht, das Integral divergiert.

d) Integrand ist unbeschränkt für $x=1$

$$\int\limits_0^9\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} = \int\limits_0^1(x-1)^{-\frac{2}{3}}dx+\int\limits_1^9(x-1)^{-\frac{2}{3}}dx = \lim_{z\to 1-}\int\limits_0^z(x-1)^{-\frac{2}{3}}dx+\lim_{z\to 1+}\int\limits_z^9(x-1)^{-\frac{2}{3}}dx$$

$$= \lim_{z\to 1-}\left[3\frac{(x-1)}{\left((x-1)^2\right)^{\frac{1}{3}}}\right]_0^z+\lim_{z\to 1+}\left[3\frac{(x-1)}{\left((x-1)^2\right)^{\frac{1}{3}}}\right]_z^9 = 3\lim_{z\to 1-}\left(\frac{(z-1)}{\left((z-1)^2\right)^{\frac{1}{3}}}+1\right)+3\lim_{z\to 1+}\left(2-\frac{(z-1)}{\left((z-1)^2\right)^{\frac{1}{3}}}\right)=3+6=9$$

e) Integrand ist unbeschränkt für $x=1$

$$\int\limits_0^9\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^4}} = \int\limits_0^1(x-1)^{-\frac{4}{3}}dx+\int\limits_1^9(x-1)^{-\frac{4}{3}}dx = \lim_{z\to 1-}\int\limits_0^z(x-1)^{-\frac{4}{3}}dx+\lim_{z\to 1+}\int\limits_z^9(x-1)^{-\frac{4}{3}}dx$$

$$= \lim_{z\to 1-}\left[3(x-1)^{-\frac{1}{3}}\right]_0^z+\lim_{z\to 1+}\left[3(x-1)^{-\frac{1}{3}}\right]_z^9 = 3\lim_{z\to 1-}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{z-1}}+1\right)+3\lim_{z\to 1+}\left(2-\frac{1}{\sqrt[3]{z-1}}\right)$$

Die Grenzwerte existieren nicht. Das Integral divergiert.