Mathematik 2: Zusatzübungsblatt 1 - Integralrechnung

Alle Integrale sind mittels Rückführung auf Grundintegrale zu bestimmen.

1) Bestimmen Sie die Menge aller Stammfunktionen :

a) $f(x) = e^{1-2x}$ b) $f(x) = 1 - 2x + \cos\frac{x}{2}$ c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

d) $f(x) = \left(2^x\right)^2$ e) $f(x) = x - \cosh(x-1)$ f) $f(x) = \left(\frac{1-x}{x}\right)^2$

2) Bestimmen Sie folgende unbestimmten Integrale mit einer geeigneten Substitution:

a) $\int \frac{dx}{x^2+4}$ b) $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$ c) $\int \frac{x}{x^2+2}dx$ d) $\int \frac{e^x}{e^x+2}dx$

3) Nach einer Partialbruchzerlegung des Integranden bestimme man:

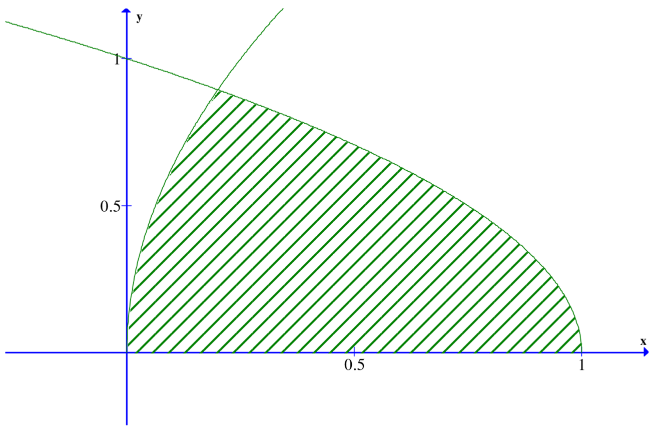
a) $\int_0^1 \frac{4x+1}{x^2-x-2}dx$ b) $\int \frac{x^3+8x+4}{x^2+4x+4}dx$

4) Unter Verwendung der partiellen Integration bestimme man:

a) $\int xe^{-2x}dx$ b) $\int (2-x)\sin(2-x)dx$ c) $\int x^2 \ln x dx$ d) $\int x(\ln x)^2 dx$

e) $\int_0^1 x^2 \sinh(2x)dx$ f) $\int_0^1 x\ln(x^2+1)dx$ g) $\int_0^{1-e} \ln(1-x)dx$ h) $\int_1^e \frac{\ln x}{2x^2}dx$

5) Berechnen Sie den von $y = 2\sqrt{x}$ und $y = \sqrt{1-x}$ eingeschlossenen Flächeninhalt.



Lösung:

Aufgabe 1

a) $F(x)=-\frac{1}{2}e^{1-2x}+c$

b) $F(x)=x-x^2+2\sin\left(\frac{x}{2}\right)+c$

c) $F(x)=\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}+c=\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+c$

d) $\int 2^{2x}\,dx=\frac{1}{2\ln 2}\cdot 2^{2x}+c$

e) $F(x)=\frac{1}{2}x^2-\sinh(x-1)+c$

f) $\int 1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\,dx=x-2\ln|x|-\frac{1}{x}+c$

Aufgabe 2

a) $\frac{1}{4}\int\frac{dx}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}=\frac{1}{4}\cdot 2\arctan\left(\frac{x}{2}\right)+c=\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right)+c$

b) $\frac{1}{3}\int\frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2}}=\frac{1}{3}\cdot 3\arcsin\left(\frac{x}{3}\right)+c=\arcsin\left(\frac{x}{3}\right)+c$

c) Substitution: $x^2+2=t,\ dx=\frac{dt}{2x},\quad \int\frac{x}{x^2+2}dx=\frac{1}{2}\ln\left|x^2+2\right|+c$

d) Substitution: $e^x+2=t,\ dx=\frac{dt}{e^x},\quad \int\frac{e^x}{e^x+2}dx=\ln\left|e^x+2\right|+c$, auch vom Typ: $\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx$

Aufgabe 3

a) $\frac{4x+1}{x^2-x-2}=\frac{1}{x+1}+\frac{3}{x-2},\quad \int_0^1\frac{4x+1}{x^2-x-2}dx=\left[\ln|x+1|+3\ln|x-2|\right]_0^1=\ln 2-3\ln 2=-2\ln 2$

b) $\frac{x^3+8x+4}{x^2+4x+4}=x-4+20\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{(x+2)^2}\right),$

$\int\frac{x^3+8x+4}{x^2+4x+4}dx=\frac{1}{2}x^2-4x+20\ln|x+2|+\frac{20}{x+2}+c$

Aufgabe 4

a) wähle: $u = x;\ \ v' = e^{-2x}$, $\int xe^{-2x}dx = -e^{-2x}\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\right)+c$

b) wähle: $u = 2-x;\ \ v' = \sin(2-x)$, $\int(2-x)\sin(2-x)dx = (2-x)\cos(2-x)-\sin(2-x)+c$

c) wähle: $u = \ln x;\ \ v' = x^2$, $\int x^2 \ln x dx = \frac{1}{3}x^3 \ln|x| - \frac{x^3}{9}+c$

d) wähle: $u = (\ln x)^2;\ \ v' = x$, $\int x(\ln x)^2 dx = \frac{1}{2}x^2 \ln^2 x - \int x \ln x dx$

und wähle: $u = \ln x;\ \ v' = x$, $= \frac{1}{2}x^2 \ln^2 x - \frac{1}{2}x^2 \ln x + \frac{1}{4}x^2 + c$

e) wähle: $u = x^2;\ \ v' = \sinh(2x)$, $\int_0^1 x^2 \sinh(2x)dx = \frac{1}{2}x^2\cosh(2x)\Big]_0^1 - \int_0^1 x\cosh(2x)dx$

und wähle: $u = x;\ \ v' = \cosh(2x)$, $= \left[\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}\right)\cosh(2x) - \frac{x}{2}\sinh(2x)\right]_0^1 \approx 0{,}758$

f) wähle: $u = \ln(x^2+1);\ \ v' = x$,

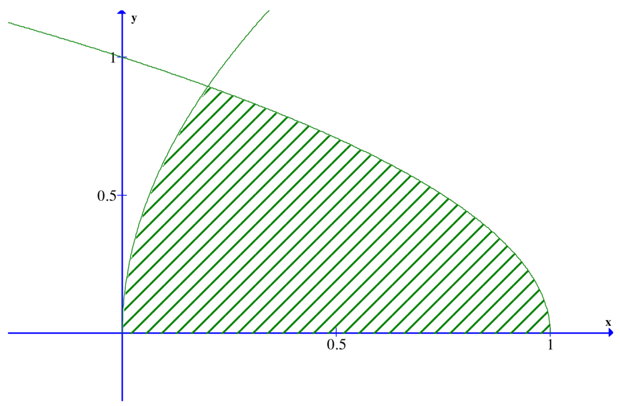
$$\int_0^1 x\ln(x^2+1)dx = \frac{1}{2}x^2\ln(x^2+1)\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^3}{x^2+1}dx = \ldots\Big]_0^1 - \int_0^1 x - \frac{x}{x^2+1}dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2\ln(x^2+1) - \frac{1}{2}x^2\Big]_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}x^2\ln(x^2+1) - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\ln(x^2+1)\Big]_0^1 = \ln 2 - \frac{1}{2}$$

g) wähle: $u = \ln(1-x);\ \ v' = 1$, $\int_0^{1-e}\ln(1-x)dx = \left[(x-1)\ln(1-x) - x\right]_0^{1-e} = -1$

h) wähle: $u = \ln x;\ \ v' = \frac{1}{x^2}$, $\int_1^e \frac{\ln x}{2x^2}dx = \frac{1}{2}\left(-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}\right)_1^e = \frac{1}{2} - \frac{1}{e}$

Aufgabe 5



Schnittpunkt: $2\sqrt{x} = \sqrt{1-x} \Rightarrow x_S = \frac{1}{5}$

$$A = \int_0^{\frac{1}{5}} 2\sqrt{x}dx + \int_{\frac{1}{5}}^1 \sqrt{1-x}dx = 2\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\frac{1}{5}} - \left[\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}\right]_{\frac{1}{5}}^1 = \frac{4}{15}\sqrt{5}\text{ FE.}$$