Mathematik 2: Zusatzübungsblatt - Differentialrechnung 2

1) Existiert für die Fkt. $f(x)=\begin{cases} -\sqrt[3]{|x|}, & \textit{für } x<0 \\ \sqrt[3]{x}, & \textit{für } x\geq 0 \end{cases}$ die erste Ableitung an der Stelle $x_0=0$?

2) Man bestimme für $f(x)=\begin{cases} x^2-ax+9, & \textit{für } x<3 \\ \dfrac{x^2-a}{x-2}, & \textit{für } x\geq 3 \end{cases}$ $a\in R$ so, dass f an der Stelle $x_0=3$ differenzierbar wird.

3) Es sei $f(x)=\begin{cases} \dfrac{b}{x} & \textit{für } x\leq 2 \\ ax-2a+1 & \textit{für } x>2. \end{cases}$

a) Ist f in $x_0=0$ stetig und differenzierbar?

b) Es sind $a,b\in R$ so zu bestimmen, dass f an der Stelle $x_1=2$ differenzierbar wird.

4) Man bestimme die 1. Ableitung folgender Funktionen und vereinfache die Ergebnisse:

a) $y(x)=a^x\cdot x^a$, $a>0, a\neq 1, x>0$

b) $y(x)=\dfrac{2a}{a+\sqrt{x}}$, $x>0$

c) $y=\dfrac{\arccos x}{\arcsin x}$, $0<x<1$

d) $y=\dfrac{x\sinh x-\cosh x}{x\cosh x-\sinh x}$, $x\neq 0$.

5) Man bestimme die 1. Ableitung und ermittle $y'(x_0)$:

$y=e^{3\ln\sqrt[3]{1-\sin^2 x}}=\exp\left(3\ln\sqrt[3]{1-\sin^2 x}\right)$, $\quad x_0=\dfrac{\pi}{4}$.

6) Man zeige, dass für $f(x)=\arctan\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}+\tfrac{1}{2}\arcsin x$ mit $|x|<1$ gilt: $f(x)=\text{const}$.

7) An welcher Stelle x_0 haben die Graphen von $f(x)=x^2+x$ und $h(x)=\ln(x^2+1)$ parallele Tangenten? Man stelle die Gleichungen der Tangenten auf.

8) Man berechne folgende Grenzwerte :

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2(a+x)-\sin^2 a}{(a+x)^2-a^2}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(2+3e^{ax})-e^a}{5+7x}$

c) $\lim\limits_{x\to a+}\left[(a-x)\cdot\ln\dfrac{x^2-a^2}{x+a}\right]$

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[2^x\cdot\tan\left(\dfrac{a}{2^x}\right)\right]$

e) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x\ln x-1}{\ln x}-\dfrac{x-2}{x-1}\right)$

f) $\lim\limits_{x\to 0+}\left(\dfrac{1}{\sin x}\right)^{\frac{1}{\ln x}}$

g) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\tfrac{\pi}{2}-\arctan x\right)^{\frac{1}{\ln x}}$.

9) Von der Funktion $y = -\dfrac{x^2 + x - 6}{(x-1)^2}$ bestimme man Nullstellen, Polstellen, die Gleichung der Asymptote (für $x \to \pm\infty$) sowie die Schnittpunkte zwischen Funktion und Asymptote. Außerdem berechne man die lokalen Extrema, die Wendepunkte und die Gleichung der Wendetangenten. Der Graph der Funktion ist zu skizzieren.

10) Man ermittle die lokalen Extrema und die Wendepunkte der Funktion $y = 2x - 5\arctan 2x$.

11) Gegeben ist die Funktion $y = e^x(b - e^x)$ mit $b > 0$. Man berechne die Nullstellen, lokale Extrema, Wendepunkte sowie den Anstieg der Wendetangente. Wie verhält sich die Funktion für $x \to \pm\infty$? Für $b = 2$ ist der Graph zu skizzieren.

12) Man bestimme die lokalen und globalen Extrema von $f(x) = \arcsin\left|\dfrac{2x}{x^2+2}\right|$.

13) Gegeben ist die Funktion $y = f(x) = \sqrt{2(x^2 - x^4)}$.
Man berechne den Definitionsbereich, die Nullstellen und die Extrema. Der Graph der Funktion ist zu skizzieren.

14) Man bestimme $x_0 \in [0;1]$ so, dass die Tangente an den Graph der Funktion $f(x) = (x-1)^2$ im Punkt $P(x_0, y_0)$ vom 1. Quadranten ($x > 0, y > 0$) ein Dreieck mit maximalem Flächeninhalt abschneidet. Wie groß ist der Flächeninhalt?

15) Mit Hilfe der logarithmischen Ableitung berechne man die erste Ableitung der folgenden Funktionen:

a) $y = (\cos x)^{x^2+4}, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$

b) $y = x^a a^x x^{\ln x}, \quad a > 0, a \neq 1, x > 0$

c) $y = \left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^{1/x}, \quad x \in R \setminus [-1;1]$