

Mathematik 2: Zusatzübungsblatt - Differentialrechnung 1

1. Aufgabe:

Leiten Sie folgende Funktionen mit der **Produktregel** nach x ab:

$$\text{a) } y = 3x^2 \sin(x) \Rightarrow y'(x) = 3(2x \cdot \sin(x) + x^2 \cos(x))$$

$$\text{b) } y = x^4 e^x - 8 \Rightarrow y'(x) = 4x^3 e^x + x^4 e^x = x^3 e^x (4 + x)$$

$$\text{c) } y = 3x \cdot \cos(x) \Rightarrow y'(x) = 3(\cos(x) - x \cdot \sin(x))$$

$$\text{d) } y = x \cdot \ln(x) \Rightarrow y'(x) = \ln(x) + \frac{x}{x} = \ln(x) + 1$$

$$\text{e) } y = e^x \sin(x) \Rightarrow y'(x) = e^x \sin(x) + e^x \cos(x) = e^x (\sin(x) + \cos(x))$$

$$\text{f) } y = -5x^2 \ln(x) \Rightarrow y'(x) = -5(2x \ln(x) + x) = -5x(2 \ln(x) + 1)$$

$$\text{g) } y = -3x 3^x \Rightarrow y'(x) = -3(3^x + x 3^x \ln(3)) = -3^{x+1}(1 + x \ln(3))$$

$$\text{h) } y = \sqrt{x} \cdot \sin(x) \Rightarrow y'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \sin(x) + \sqrt{x} \cos(x)$$

$$\text{i) } y = x^3 e^x \Rightarrow y'(x) = 3x^2 e^x + x^3 e^x = 3x^2 e^x (1 + x)$$

$$\text{j) } y = \sqrt[3]{x} \cdot \cos(x) \Rightarrow y'(x) = \frac{\cos(x)}{3\sqrt[3]{x^2}} - \sqrt[3]{x} \cdot \sin(x)$$

2. Aufgabe:

Leiten Sie folgende Funktionen mit der **Quotientenregel** nach x ab:

$$\text{a) } y = \frac{3x}{\sin(x)} \Rightarrow y'(x) = \frac{3 \cdot \sin(x) - 3x \cdot \cos(x)}{\sin^2(x)}$$

$$\text{b) } y = \frac{x^4}{\cos(x)} \Rightarrow y'(x) = \frac{4x^3 \cdot \cos(x) + x^4 \cdot \sin(x)}{\cos^2(x)}$$

$$\text{c) } y = \frac{5x}{x^2} \Rightarrow y'(x) = \frac{5x^2 - (5x + 2)2x}{x^4} = \frac{-5x^2 - 4x}{x^4} = \frac{5x + 4}{x^3}$$

$$\text{d) } y = \frac{x}{\ln(x)} \Rightarrow y'(x) = \frac{\ln(x) - 1}{\ln^2(x)}$$

$$\text{e) } y = \frac{e^x}{x} \Rightarrow y'(x) = \frac{xe^x - e^x}{x^2} = \frac{x-1}{x^2} \cdot e^x$$

$$\text{f) } y = \frac{3x^2 - 4}{x^5} \Rightarrow y'(x) = \frac{6x^6 - (3x^2 - 4)5x^4}{x^{10}} = \frac{-9x^6 + 20x^4}{x^{10}} = \frac{-9x^2 + 20}{x^6}$$

$$\text{g) } y = \frac{\sin(x)}{x} \Rightarrow y'(x) = \frac{x\cos(x) - \sin(x)}{x^2}$$

$$\text{h) } y = \frac{5x - 3}{3x^2} \Rightarrow y'(x) = \frac{15x^2 - (5x - 3)6x}{9x^4} = \frac{-15x^2 + 18x}{9x^4} = \frac{-5x + 6}{3x^3}$$

$$\text{i) } y = \frac{2x}{e^x} \Rightarrow y'(x) = \frac{2e^x - 2xe^x}{e^{2x}} = \frac{2(1-x)}{e^x}$$

$$\text{j) } y = \frac{4a}{x} \Rightarrow y'(x) = \frac{0 \cdot x - 4a}{x^2} = \frac{-4a}{x^2}$$

3. Aufgabe:

Leiten Sie folgende Funktionen mit der **Kettenregel** nach x ab:

$$\text{a) } y = \sin(3x^2) \Rightarrow y'(x) = 6x \cdot \cos(3x^2)$$

$$\text{b) } y = e^{3x^2} \Rightarrow y'(x) = 6xe^{3x^2}$$

$$\text{c) } y = \cos(x^2) \Rightarrow y'(x) = -2x \cdot \sin(x^2)$$

$$\text{d) } y = (x^2 - 2)^2 \Rightarrow y'(x) = 2x \cdot 2(x^2 - 2) = 4x(x^2 - 2)$$

$$\text{e) } y = e^{\sqrt{x}} \Rightarrow y'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}}$$

$$\text{f) } y = (3x + 1)^3 \Rightarrow y'(x) = 3 \cdot 3(3x + 1)^2 = 9 \cdot (3x + 1)^2$$

$$\text{g) } y = \ln(x^2) \Rightarrow y'(x) = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x}$$

$$\text{h) } y = \sqrt[3]{3x + 2} \Rightarrow y'(x) = 3 \cdot \frac{1}{3^3 \sqrt{(3x + 2)^2}} = (3x + 2)^{-\frac{2}{3}}$$

i) $y = \sin(x^2) + \cos(x^2) \Rightarrow y'(x) = 2x \cdot \cos(x^2) - 2x \cdot \sin(x^2)$

j) $y = (x^2 - 3x + 1)^2 \Rightarrow y'(x) = 2(2x - 3)(x^2 - 3x + 1)$

k) $y = e^{5x^2 - 3x + 1} \Rightarrow y'(x) = (10x - 3)e^{5x^2 - 3x + 1}$

4. Aufgabe:

Leiten Sie folgende Funktionen nach x ab:

a) $y = 3x^2 + 4ax + 9 \Rightarrow y'(x) = 9x + 4a$ (Potenzregel)

b) $y = \sin(9x^2) \Rightarrow y'(x) = 18x \cdot \cos(9x^2)$ (Kettenregel)

c) $y = x^2 \ln(x) \Rightarrow y'(x) = 2x \ln(x) + x^2 \frac{1}{x} = x(2 \ln(x) + 1)$ (Produktregel)

d) $y = -6x \cdot \cos(x) \Rightarrow y'(x) = -6 \cdot \cos(x) + 6x \cdot \sin(x)$ (Produktregel)

e) $y = \frac{3x + 4}{x^2} \Rightarrow y'(x) = \frac{3x^2 - (3x + 4)2x}{x^4} = \frac{-(3x + 8)}{x^3}$ (Quotientenregel)

f) $y = 5xe^x + 4x^3 \Rightarrow y'(x) = 5(x + 1)e^x + 12x^2$ (Produkt- & Summenregel)

g) $y = \frac{\sin(x)}{x^2} \Rightarrow y'(x) = \frac{x^2 \cos(x) - 2x \sin(x)}{x^4} = \frac{x \cos(x) - 2 \sin(x)}{x^3}$ (Quotientenregel)

h) $y = \sqrt{x} \cdot e^x \Rightarrow y'(x) = \frac{e^x}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x} \cdot e^x = \sqrt{x} \cdot e^x \left(\frac{1}{2x} + 1 \right)$ (Produktregel)

i) $y = x \cdot 3^x \Rightarrow y'(x) = 3^x(1 + x \ln(3))$ (Produktregel)

j) $y = x \cdot \cos(x^2) \Rightarrow y'(x) = \cos(x^2) - 2x^2 \cdot \sin(x^2)$ (Produkt- & Kettenregel)

k) $y = x^5 \cdot e^{ax+3} \Rightarrow y'(x) = 5(1 + ax)e^{ax+3}$ (Produkt- & Kettenregel)