Mathematik 2: Übungsblatt 5 - Potenzreihen, Taylorreihen

1. Aufgabe:

Prüfen Sie folgende Reihen auf Konvergenz/Divergenz und geben Sie die ersten drei Teilsummen an.

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^5}{2^k}$

b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{5^k}$

c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k-1}{3k+2}$

d) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{k}$

Lösung:

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^5}{2^k} = \frac{1}{2} + \frac{32}{4} + \frac{243}{8} + \ldots$

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)^5}{2^{k+1}} \cdot \frac{2^k}{k^5} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2} \cdot \left(1+\frac{1}{k}\right)^5 = \frac{1}{2} < 1 \quad \Rightarrow \quad \text{Reihe konvergiert}$$

b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{5^k} = \frac{1}{5} + \frac{2}{25} + \frac{6}{125} + \ldots$

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)!}{5^{k+1}} \cdot \frac{5^k}{k!} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{5} \cdot \frac{k!(k+1)}{k!} = \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)}{5} = \infty \quad \Rightarrow \quad \text{Reihe divergiert}$$

c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k-1}{3k+2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{3}{8} + \ldots$

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty} \frac{2(k+1)-1}{3(k+1)+2} \cdot \frac{3k+2}{2k-1} = \lim_{k\to\infty} \frac{2k+1}{3k+5} \cdot \frac{3k+2}{2k-1} =$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{2+\frac{1}{k}}{3+\frac{5}{k}} \cdot \frac{3+\frac{2}{k}}{2-\frac{1}{n}} = \lim_{k\to\infty} \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = 1$$

$\Rightarrow$ Eine Entscheidung über Konvergenz oder Divergenz mit dem Quotientenkriterium ist nicht möglich.

Die notwendige Bedingung für die Konvergenz einer unendlichen Reihe ist $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$:

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} \frac{2k-1}{3k+2} = \lim_{k\to\infty} \frac{2-\frac{1}{k}}{3+\frac{2}{k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Reihe diviergiert}$$

d) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots$ (alternierende harmonische Reihe)

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \cdot a_k = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - \ldots$$

1. $a_1 > a_2 > a_3 > ... > a_n > a_{k+1} > ...$

   $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{4} > \frac{1}{5} > ... \quad \Rightarrow \quad$ 1. Konvergenzbedingung (Leibnitz) erfüllt

2. $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0 \quad \Rightarrow \quad$ 2. Konvergenzbedingung erfüllt $\quad \Rightarrow \quad$ Reihe konvergiert

2. Aufgabe:

Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen. Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergieren die Reihen? Bemerkung: Hier wird anstatt k, n als Variable verwendet.

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$

Lösung:

Die Potenzreihe hat die Entwicklungsstelle $x_0 = 0$ und die Koeffizienten $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Der Konvergenzradius R ist

$$R = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n+1}}} \right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n}} = 1.$$

Das heißt die Reihe konvergiert für alle $x \in (x_0 - R,\, x_0 + R)$; in unserem Fall also für alle $x \in (-1,\, 1)$.

Schlussendlich müssen wir noch die Randpunkte des Konvergenzintervalls prüfen. Für $x = 1$ sehen wir, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^n}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}},$$

divergent ist, da der Exponent nicht größer als 1 ist. Für $x = -1$ erhalten wir, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}},$$

nach dem Leibnitz-Krierium konvergent ist.

Damit ergibt sich abschließend, dass die Reihe konvergiert, wenn $x \in [-1,\, 1)$.

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}(x-1)^n$

Lösung:

Die Potenzreihe hat die Entwicklungsstelle $x_0 = 1$ und die Koeffizienten $a_n = \frac{n}{2^n}$.

Der Konvergenzradius R ist

$$R = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{\frac{n}{2^n}}{\frac{n+1}{2^{n+1}}} \right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{n \cdot 2^{n+1}}{(n+1)\cdot 2^n} = \lim_{n\to+\infty} 2 \cdot \frac{n}{n+1} = 2.$$

Das heißt die Reihe konvergiert für alle $x \in (x_0 - R,\, x_0 + R)$; in unserem Fall also für alle $x \in (-1,\, 3)$.

Schlussendlich müssen wir noch die Randpunkte des Konvergenzintervalls prüfen. Für $x = -1$ sehen wir, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}(-1-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}(-2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}(-1)^n \cdot 2^n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n,$$

divergent ist, da das notwendige Kriterium verletzt ist. Für $x = 3$ erhalten wir, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}(3-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}2^n = \sum_{n=1}^{\infty} n,$$

aus dem selben Grund divergent ist.

Damit ergibt sich abschließend, dass die Reihe konvergiert, wenn $x \in (-1,\, 3)$.

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n^3}$

Lösung:

Wir erhalten mittels des Quotientenkriteriums:

$$q = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{\frac{x^{2(n+1)}}{(n+1)^3}}{\frac{x^{2n}}{n^3}} \right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{x^{2(n+1)} n^3}{x^{2n}(n+1)^3} = \lim_{n\to+\infty} x^2 \frac{n^3}{(n+1)^3} = \lim_{n\to+\infty} x^2 \left(\frac{n}{n+1}\right)^3 = x^2.$$

Für die Konvergenz muss nun $q = x^2 < 1$ sein, also $|x| < 1$ oder $x \in (-1,\, 1)$.

Schlussendlich müssen wir noch die Randpunkte des Konvergenzintervalls prüfen. Für $x = -1$ sehen wir, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}}{n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3},$$

konvergent ist, da der Exponent größer als 1 ist. Für $x = 1$ erhalten wir, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^{2n}}{n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3},$$

aus dem selben Grund konvergiert.

Damit ergibt sich abschließend, dass die Reihe konvergiert, wenn $x \in [-1,\, 1]$.

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{n^n} x^n$

Lösung:

Die Potenzreihe hat die Entwicklungsstelle $x_0 = 0$ und die Koeffizienten $a_n = \frac{(n-1)!}{n^n}$.

Der Konvergenzradius R ist

$$R = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{\frac{(n-1)!}{n^n}}{\frac{n!}{(n+1)^{n+1}}} \right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n-1)!(n+1)^{n+1}}{n!n^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n(n-1)!(n+1)^{n+1}}{n!n^{n+1}}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{n^{n+1}} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right) = e.$$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$

Lösung:

Die Potenzreihe hat die Entwicklungsstelle $x_0 = 0$ und die Koeffizienten $a_n = \frac{1}{n^n}$.

Der Konvergenzradius R ist

$$R = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{\frac{1}{n^n}}{\frac{1}{(n+1)^{n+1}}} \right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \geq \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{n+1}}{n^n} = +\infty.$$

Da der Konvergenzradius unendlich ist, konvergiert die Reihe für alle $x \in \mathbb{R}$.

3. Aufgabe:

Bestimmen Sie für $\boldsymbol{f(x) = 1 + 2\sqrt{x}}$ das Taylorpolynom 3. Grades im Entwicklungspunkt $\boldsymbol{x_0 = 1}$. Bestimmen Sie damit einen Näherungswert für $\boldsymbol{f(0.984)}$ und vergleichen Sie diesen mit dem Taschenrechner-Wert.

Lösung:

Für das Taylorpolynom 3. Grades betrachten wir also die Taylorreihe von f nur bis $n = 3$. Dazu bilden wieder die ersten 3 Ableitungen von f.

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + 2 \cdot x^{\frac{1}{2}}, \\ f'(x) &= x^{-\frac{1}{2}}, \\ f''(x) &= -\frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{3}{2}}, \\ f^{(3)}(x) &= \frac{3}{4} \cdot x^{-\frac{5}{2}}. \end{aligned}$$

Durch Einsetzen in die Darstellung des Taylorpolynoms vom Grad 3 erhalten wir nun, dass

$$\begin{aligned} T_{f,3}(x) &= \sum_{n=0}^{3} \frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2 + \frac{f^{(3)}(1)}{3!}(x-1)^3 \\ &= 1 + 2 \cdot 1^{\frac{1}{2}} + 1^{-\frac{1}{2}}(x-1) - \frac{\frac{1}{2} \cdot 1^{-\frac{3}{2}}}{2}(x-1)^2 + \frac{\frac{3}{4} \cdot 1^{-\frac{5}{2}}}{3!}(x-1)^3 \\ &= 3 + (x-1) - \frac{1}{4}(x-1)^2 + \frac{1}{8}(x-1)^3 \end{aligned}$$

Nutzen wir das Taylorpoylnom zur Approximation von f in $x = 0,984$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} T_{f,3}(0,984) &\approx 2,983935488 \\ f(0,984) &\approx 2,9839354828. \end{aligned}$$

4. Aufgabe:

Bestimmen Sie für $\boldsymbol{f(x) = \ln(1+x)}$ das Taylorpolynom 2. Grades im Entwicklungspunkt $\boldsymbol{x_0 = 0}$

Lösung:

Taylorentwicklung zweiter Ordnung von $f(x) = \log(1+x)$ an der Entwicklungsstelle $x_0 = 0$.

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)\,x + \tfrac{f''(x_0)}{2!}\,x^2$$

$$\begin{array}{ll} f(x) = \log(1+x) & f(0) = \log(1) = 0 \\ f'(x) = 1/(1+x) = (1+x)^{-1} & f'(0) = 1/(1+0) = 1 \\ f''(x) = -(1+x)^{-2} & f''(0) = -(1+0)^{-2} = -1 \end{array}$$

$$\log(1+x) \approx \quad 0 \quad + \quad 1 \quad x + \; \tfrac{-1}{2} \; x^2 = \quad x - \tfrac{1}{2}x^2$$

5. Aufgabe:

Bestimmen Sie für $\boldsymbol{f(x) = \ln(x)}$ das Taylorpolynom bis 5. Grades im Entwicklungspunkt $\boldsymbol{x_0 = 1}$ und geben Sie allgemein $\boldsymbol{a_n}$ der Taylorreihe an.

Lösung:

$f(x) = \ln x, \quad x_0 = 1$ – Entwicklungszentrum

$$f(x_0) = \ln x_0 = \ln 1 = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}, \qquad f'(1) = 1$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} = -x^{-2}, \qquad f''(1) = -1 = -1!$$

$$f'''(x) = \frac{2}{x^3} = 2x^{-3}, \qquad f'''(1) = 2 = 2!$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{2 \cdot 3}{x^4} = -2 \cdot 3\ x^{-4}, \qquad f^{(4)}(1) = -2 \cdot 3 = -3!$$

$$f^{(5)}(x) = -2 \cdot 3 \cdot (-4)\ x^{-5} = 2 \cdot 3 \cdot 4\ x^{-5} = 4!\ x^{-5}$$

$$f^{(5)}(1) = 4!$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}\ (n-1)!\ x^{-n}, \qquad f^{(n)}(1) = (-1)^{n+1}\ (n-1)!$$

Taylorreihe einer Funktion im Entwicklungspunkt x_0

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

$$\ln x = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4 + \ldots =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-1)^n$$

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$