Mathematik 2: Übungsblatt 4 - Funktionen mehrerer Variablen

1. Aufgabe:

Man bestimme die partiellen Ableitungen von $f(x,y) = x^2y^3 + xy^2 + 2y$, den Gradienten von f an der Stelle (x,y) und an der Stelle $(0,1)$, sowie die Tangente T an die Höhenlinie (Niveaulinie) L von f durch $(0,1)$.

Lösung:

$$\begin{array}{lcl} f_x = 2xy^3 + y^2 & \Rightarrow & \operatorname{grad} f(x,y) = (2xy^3 + y^2,\ 3x^2y^2 + 2xy + 2) \\ f_y = 3x^2y^2 + 2xy + 2 & & \rightarrow \quad \operatorname{grad} f(0,1) = (1,2) \end{array}$$

$f(0,1) = 2 \quad \Rightarrow \quad L:\ x^2y^3 + xy^2 + 2y = 2$ ist die Niveaulinie.

$\operatorname{grad} f(0,1) = (1,2) \perp T \Rightarrow \vec{t} = (-2,1)$ ist Richtungsvektor von $T(\operatorname{grad} f(0,1) \circ \vec{t} = 0)$

Tangente: $\vec{x} = (0,1) + r(-2,1)$ oder $T:\ x + 2y = 2$ oder $T:\ y = -\frac{1}{2}x + 1$

2. Aufgabe:

Man bestimme die Tangentialebene in Koordinatenform an $f(x,y) = \dfrac{y}{1+x^2}$ bei $\vec{x}_0 = (1,2)$ unter Berücksichtigung, dass der Normalenvektor auf der Tangentialebene folgendermaßen definiert ist:

$\vec{n}_E = (\text{grad } f, -1) = \big(f_x(x_0,y_0), f_y(x_0,y_0), -1\big)$.

Lösung:

$$\begin{array}{lclcl} f_x(x,y) = \dfrac{-2xy}{(1+x^2)^2} & \Rightarrow & fx(1,2) = -1 & \Rightarrow & \operatorname{grad} f(1,2) = (-1, \frac{1}{2}) \\ f_y(x,y) = \dfrac{1}{1+x^2} & & f_y(1,2) = \frac{1}{2} & & \vec{n}_E \quad = (-1, \frac{1}{2}, -1) \end{array}$$

$E:\ z = 1 - (x-1) + \frac{1}{2}(y-2) \quad \Leftrightarrow \quad E:\ 2x - y + 2z = 2 \quad$ (Koordinatenform)

$E:\ (-1, \frac{1}{2}, -1)(x,y,z) = (-1, \frac{1}{2}, -1)(1, 2, f(1,2)) \Leftrightarrow E:\ -x + \frac{1}{2}y - z = -1$

$E:\ \vec{x} = (1,2,1) + r(1,0,-1) + s(0,1,\frac{1}{2}) \quad$ (Paramterform)

3. Aufgabe:

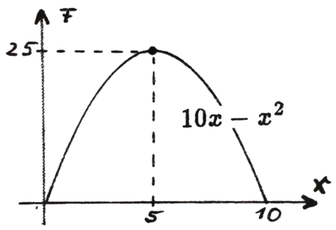
Welches Rechteck hat bei gegebenem Umfang $U = 20$ cm die größte Fläche F?

Lösung:

$f(x,y) = x \cdot y \qquad$ NR: $2x + 2y = 20$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\quad\ 0 \leq x \leq 10$

Aus der NR lässt sich y berechnen: $y = 10 - x$.

Einsetzen ergibt: $F(x) := f(x, 10-x) = x(10-x) = 10x - x^2, \quad 0 \leq x \leq 10$



Maximum der Funktion $F(x) = 10x - x^2$ mit $0 \le x \le 10$ ist zu bestimmen:

$F'(x) = 10 - 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 5$

Da die Randstellen nicht als Maxima in Frage kommen ($F = 0$), hat das Rechteck für $x = y = 5$ (cm^2) maximalen Flächeninhalt $f(5,5) = 25$ cm^2.

4. Aufgabe:

Berechnen Sie folgendes Doppelintegral (Tipp: falls Sie nicht weiterkommen, versuchen Sie die Integrationsvariablen zu vertauschen).

$$I = \int_1^2 \int_0^1 y^3 e^{xy^2}\ \mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}x$$

Lösung:

einfachere Berechnung nach Vertauschen der Integrationsreihenfolge

$$\int_0^1 \left(\int_1^2 y^3 e^{xy^2}\ \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} e^{cx} = c e^{cx} \text{ mit } c = y^2 \quad \Rightarrow$$

$$= \left[y e^{xy^2} \right]_{x=1}^{x=2} = y e^{2y^2} - y e^{y^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} e^{cy^2} = 2c e^{cy^2} \text{ mit } c = 2 \text{ und } c = 1 \quad \Rightarrow$$

$$I = \left[\frac{1}{4} e^{2y^2} - \frac{1}{2} e^{y^2} \right]_0^1 = \left(\frac{e^2}{4} - \frac{e}{2} \right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right) = \frac{e^2 - 2e + 1}{4} = \frac{(e-1)^2}{4} = 0.7381...$$

Lösung 2 ist sehr aufwändig, aber machbar:

Aufg. 4

$$I = \int_1^2 \int_0^1 y^3 \cdot e^{xy^2}\, dy\, dx$$

1. Innere Integration (nach der Variablen y)

$$\int_0^1 y^3 e^{xy^2} dy$$

Substitution $u = y^2 \Rightarrow \frac{du}{dy} = 2y \Rightarrow dy = \frac{1}{2y} du$

somit folgt: $\frac{1}{2} \int u \cdot e^{xu} du$ Anm. y fällt somit ja weg

nun Produktintegration machen

$$\int f'g = fg - \int f g'$$

$f' = e^{xu}$ $g = u$

$f = \frac{e^{xu}}{x}$ $g' = 1$

$$\Rightarrow \frac{u \cdot e^{xu}}{x} - \int \frac{e^{xu}}{x} du$$

nochmal Substitution $v = x \cdot u \Rightarrow \frac{dv}{du} = x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dv$

hieraus folgt: $\frac{1}{x^2} \int e^v dv$ | Regel für Exponentialfkt. $\int a^v dv = \frac{a^v}{\ln(a)}$ mit $a = e$ $= e^v$

$$= \frac{e^v}{x^2}$$

Rücksubstitution von $v = x \cdot u$

$$= \frac{e^{xu}}{x^2}$$

gelöste Integrale einsetzen:

$$\frac{u \cdot e^{xu}}{x} - \int \frac{e^{xu}}{x} du = \frac{ue^{xu}}{x} - \frac{e^{xu}}{x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \int u e^{xu} du = \frac{ue^{xu}}{2x} - \frac{e^{xu}}{2x^2}$$

Rücksubstitution von $u = y^2$

$$\frac{y^2 e^{xy^2}}{2x} - \frac{e^{xy^2}}{2x^2} = \frac{(xy^2 - 1) e^{xy^2}}{2x^2} + C$$

Integrationsgrenzen 0 bis 1 einsetzen (für y)

$$\Rightarrow \left[\frac{(xy^2 - 1) e^{xy^2}}{2x^2} \right]_0^1 = \left[\frac{(x-1) e^x}{2x^2} - \frac{-1}{2x^2} \right]$$

$$\Rightarrow \frac{(x-1) e^x + 1}{2x^2}$$ vereinfacht

2. Äußere Integration (nach der Variablen x)

$$\int_1^2 \frac{(x-1) e^x + 1}{2x^2} dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \int \frac{(x-1) e^x + 1}{x^2} dx$$

Anm. Faktor ½ kann vor das Integral gesetzt werden, muss aber später dann beim Endergebnis wieder berücksichtigt werden!

nun Produktintegration

$$\int f'g = fg - \int f g'$$

$f' = \frac{1}{x^2}$ $g = (x-1)e^x + 1$

$f = -\frac{1}{x}$ $g' = (x-1)e^x + e^x$

$$\Rightarrow -\frac{(x-1)e^x + 1}{x} - \int \frac{(1-x)e^x - e^x}{x} dx$$

$$-\frac{(x-1)e^x + 1}{x} - \int e^x dx$$ | Regel für Exponentialfkt. anwend. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln(a)}$ mit $a = e$ $= e$

$$\Rightarrow e^x - \frac{(x-1)e^x + 1}{x}$$

nun alles wieder zusammengesetzt, Faktor ½ nicht vergessen..

$$\frac{1}{2}\left(e^x - \frac{(x-1)e^x + 1}{x}\right) = \frac{e^x}{2} - \frac{(x-1)e^x + 1}{2x} + C$$

Integrationsgrenzen 1 bis 2 einsetzen (für x)

$$\Rightarrow \left[\frac{e^x - 1}{2x} \right]_1^2 = \left[\frac{e^2 - 1}{4} - \frac{e^1 - 1}{2} \right] = \underline{\underline{0{,}738\ldots}}$$

5. Aufgabe:

Berechnen Sie folgende Dreifachintegrale:

a) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^1 \int_1^2 \frac{\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x}{(x+y+z)^3}$

Lösung:

$$I = I_x = \int_0^1 \Bigg(\overbrace{\int_0^1 \underbrace{\Big(\int_1^2 (x+y+z)^{-3}\,\mathrm{d}z \Big)}_{I_z} \mathrm{d}y}^{I_y} \Bigg)\,\mathrm{d}x$$

(konstante Integrationsgrenzen $\rightsquigarrow$ auch beliebige andere Integrationsreihenfolge möglich)

$$\begin{aligned}
I_z &= \left[-(x+y+z)^{-2}/2\right]_1^2 = -(x+y+2)^{-2}/2 + (x+y+1)^{-2}/2 \\
I_y &= \left[(x+y+2)^{-1}/2 - (x+y+1)^{-1}/2\right]_0^1 = \frac{1/2}{x+3} - 2\,\frac{1/2}{x+2} + \frac{1/2}{x+1} \\
I_x &= \left[\frac{\ln(x+3)}{2} - \ln(x+2) + \frac{\ln(x+1)}{2}\right]_0^1 = \frac{\ln(4/3)}{2} - \ln(3/2) + \frac{\ln(2/1)}{2}
\end{aligned}$$

$\rightsquigarrow \quad I = \frac{1}{2}\ln((4/3)(3/2)^{-2}(2/1)) = \frac{1}{2}\ln(32/27) \approx 0.08495$

b) $\displaystyle\int_1^2 \int_0^{\pi/2} \int_2^4 \sin(2y)2^{z-x}\,\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x$

Lösung:

Produktform des Integranden $f(x,y,z) = 2^{-x}\sin(2y)\,2^z$ bei konstanten Integrationsgrenzen $\rightsquigarrow$ Produktform des Integrals

$$I = \left(\int_1^2 2^{-x}\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^{\pi/2} \sin(2y)\,\mathrm{d}y\right)\left(\int_2^4 2^z\,\mathrm{d}z\right) = I_x\,I_y\,I_z$$

$\int a^{\pm t}\,\mathrm{d}t = \pm a^{\pm t}/\ln a + C \quad \rightsquigarrow$

$$\begin{aligned}
I_x &= \left[-2^{-x}/\ln 2\right]_1^2 = (-1/4 + 1/2)/\ln 2 = 1/(4\ln 2) \\
I_y &= [-\cos(2y)/2]_0^{\pi/2} = -(-1/2) + (1/2) = 1 \\
I_z &= [2^z/\ln 2]_2^4 = (16-4)/\ln 2 = 12/\ln 2
\end{aligned}$$

$\rightsquigarrow \quad I = \frac{1}{4\ln 2}\cdot 1 \cdot \frac{12}{\ln 2} = 3/(\ln 2)^2 \approx 6.2441$

6. Aufgabe:

Berechnen Sie folgende Doppelintegrale:

a) $I = \int_{-1}^{1} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x^2 sin(y) \; \mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}x$

Lösung:

$$I = \int_{-1}^{1} \left(\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x^2 sin(y) \; \mathrm{d}y \right) \; \mathrm{d}x$$

$$I = \int_{-1}^{1} \Big[-x^2 cos(y) \Big]_{y=0}^{\frac{\pi}{2}} \; \mathrm{d}x$$

$$I = \int_{-1}^{1} x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3}$$

b) $I = \int_{a}^{b} \int_{0}^{1} y^x \; \mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}x$

Lösung:

$$I = \int_{a}^{b} \left[\frac{y^{x+1}}{x+1} \right]_{y=0}^{1} \; \mathrm{d}x$$

$$I = \int_{a}^{b} \frac{\mathrm{d}x}{x+1} = \Big[\ln(x+1) \Big]_{a}^{b} = \ln \frac{b+1}{a+1}$$

c) $I = \int_{0}^{1} \int_{0}^{1} xy(x+y) \; \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y$

Lösung:

$$I = \frac{1}{3}$$

d) $I = \int_{0}^{1} \int_{1}^{3} (x + \sqrt{y} - 3xy^2) \; \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y$

Lösung:

$$I = \frac{4}{3}$$

e) $I = \int_{0}^{2} \int_{0}^{1} xye^{xy^2} \; \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y$

Lösung:

$$I = \frac{1}{2}(e^2 - 3) \approx 2.1945$$

7. Aufgabe:

Berechnen Sie folgende Dreifachintegrale:

a) $\int_1^2 \int_x^{3x} \int_0^{xy} xyz \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$

Lösung:

$$V = \int_1^2 \int_x^{3x} \left[xy\frac{z^2}{2} \right]_{z=0}^{xy} \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$$

$$V = \int_1^2 \int_x^{3x} \frac{1}{2} x^3 y^3 \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$$

$$V = \int_1^2 \left[\frac{1}{8} x^3 y^4 \right]_{y=x}^{3x} \mathrm{d}x$$

$$V = \frac{1}{8} \int_1^2 (81x^7 - x^7) \, \mathrm{d}x = 10 \int_1^2 x^7 \, \mathrm{d}x$$

$$V = \frac{5}{4}(256 - 1) = \frac{1275}{4} \approx 318.75$$

b) $\int_0^a \int_0^b \int_0^c (x - y + z) \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$

Lösung:

$$V = \frac{abc}{2}(a - b + c)$$

c) $\int_0^1 \int_0^x \int_0^{xy} x^2 y^3 z \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$

Lösung:

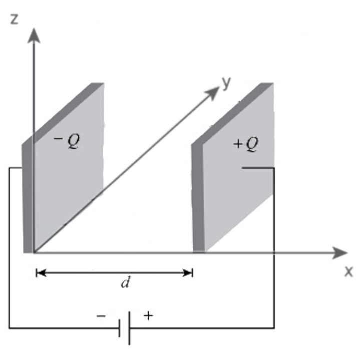
$$V = \frac{1}{132}$$

8. Aufgabe:

Es soll das elektrische Potential Φ im Inneren eines Plattenkondensators betrachtet werden. Die beiden Platten sollen dabei die Fläche A besitzen und in der $y-z$-Ebene liegen.

Die eine Platte ist an der Stelle $x = 0$, die andere in x-Richtung verschoben. Außerdem soll der Kondensator die Ladung Q tragen. Für das elektrische Potential Φ im Inneren der Platten gilt dann:

$$\Phi(x, y, z) = \frac{Q \cdot x}{\epsilon_0 \cdot A}$$



Bestimmen Sie den Gradienten grad(Φ), also den Feldstärkevektor $\vec{E}$ und zeichnen Sie die Feldlinien ein.

Lösung:

Der Gradient berechnet sich zu:

$$\text{grad}(\Phi)(x,y,z) = \vec{\nabla} \cdot \Phi(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{Q}{\epsilon_0 \cdot A} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Das bedeutet, dass das elektrische Potential des Plattenkondensators in x-Richtung am stäksten ansteigt. Da die elektrische Feldstärke $\vec{E}$ der negative Gradient des elektrischen Potentials ist:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \cdot \Phi$$

zeigt dieses im betrachteten Plattenkondensator in negative x-Richtung.