Mathematik 2: Übungsblatt 4 - Funktionen mehrerer Variablen

1. Aufgabe:

Man bestimme die partiellen Ableitungen von $f(x,y) = x^2y^3 + xy^2 + 2y$, den Gradienten von f an der Stelle (x,y) und an der Stelle $(0,1)$, sowie die Tangente T an die Höhenlinie (Niveaulinie) L von f durch $(0,1)$.

2. Aufgabe:

Man bestimme die Tangentialebene in Koordinatenform an $f(x,y) = \dfrac{y}{1+x^2}$ bei $\vec{x}_0 = (1,2)$

unter Berücksichtigung, dass der Normalenvektor auf der Tangentialebene folgendermaßen definiert ist:

$\vec{n}_E = (\text{grad } f, -1) = \Big(f_x(x_0,y_0), f_y(x_0,y_0), -1\Big).$

3. Aufgabe:

Welches Rechteck hat bei gegebenem Umfang $U = 20$ cm die größte Fläche F?

4. Aufgabe:

Berechnen Sie folgendes Doppelintegral (Tipp: falls Sie nicht weiterkommen, versuchen Sie die Integrationsvariablen zu vertauschen).

$$I = \int_1^2 \int_0^1 y^3 e^{xy^2} \; \mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}x$$

5. Aufgabe:

Berechnen Sie folgende Dreifachintegrale:

a) $$\int_0^1 \int_0^1 \int_1^2 \frac{\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x}{(x+y+z)^3}$$

b) $$\int_1^2 \int_0^{\pi/2} \int_2^4 \sin(2y) 2^{z-x} \; \mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

6. Aufgabe:

Berechnen Sie folgende Doppelintegrale:

a) $$I = \int_{-1}^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 sin(y) \; \mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}x$$

b) $$I = \int_a^b \int_0^1 y^x \; \mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}x$$

c) $$I = \int_0^1 \int_0^1 xy(x+y) \; \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y$$

d) $I = \int_0^1 \int_1^3 (x + \sqrt{y} - 3xy^2)\ \mathrm{d}x{\cdot}\mathrm{d}y$

e) $I = \int_0^2 \int_0^1 xye^{xy^2}\ \mathrm{d}x{\cdot}\mathrm{d}y$

7. Aufgabe:

Berechnen Sie folgende Dreifachintegrale:

a) $\int_1^2 \int_x^{3x} \int_0^{xy} xyz\ \mathrm{d}z\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}x$

b) $\int_0^a \int_0^b \int_0^c (x - y + z)\ \mathrm{d}z\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}x$

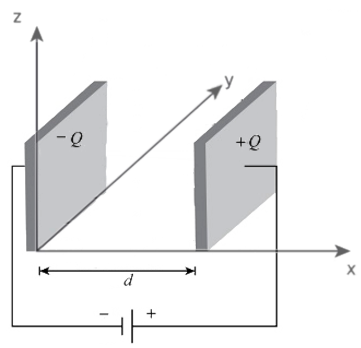
c) $\int_0^1 \int_0^x \int_0^{xy} x^2y^3z\ \mathrm{d}z\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}x$

8. Aufgabe:

Es soll das elektrische Potential Φ im Inneren eines Plattenkondensators betrachtet werden. Die beiden Platten sollen dabei die Fläche A besitzen und in der $y-z$-Ebene liegen.

Die eine Platte ist an der Stelle $x = 0$, die andere in x-Richtung verschoben. Außerdem soll der Kondensator die Ladung Q tragen. Für das elektrische Potential Φ im Inneren der Platten gilt dann:

$\Phi(x, y, z) = \dfrac{Q \cdot x}{\epsilon_0 \cdot A}$



Bestimmen Sie den Gradienten grad(Φ), also den Feldstärkevektor $\vec{E}$ und zeichnen Sie die Feldlinien ein.