Mathematik 2: Übungsblatt 3 - Integralrechnung

1. Aufgabe:

Ermitteln Sie die Stammfunktionen:

a) $\int 3x + 4 \, \mathrm{d}x \quad = \quad \frac{3}{2}x^2 + 4x + C$

b) $\int 4x^3 + 5x^2 + 3x - 5 \, \mathrm{d}x \quad = \quad x^4 + \frac{5}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 5x + C$

c) $\int 4\sin(x) \, \mathrm{d}x \quad = \quad -4\cos(x) + C$

d) $\int 4x - 4\cos(x) \, \mathrm{d}x \quad = \quad 2x^2 - 4\sin(x) + C$

e) $\int \frac{5}{x} \, \mathrm{d}x \quad = \quad 5\ln|x| + C$

f) $\int 3e^x \, \mathrm{d}x \quad = \quad 3e^x + C$

g) $\int 3^x \, \mathrm{d}x \quad = \quad \frac{1}{\ln(3)}3^x + C$

h) $\int 0 \, \mathrm{d}x \quad = \quad c$

2. Aufgabe:

Berechnen Sie folgende Integrale (durch Substitution):

a) $\int x^4 \cdot \sin(x^5) \, \mathrm{d}x$

Lösung:

Substitution mit: $u = x^5$ ergibt $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 5x^4 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{5x^4}$ und somit:

$$\int x^4 \cdot \sin(x^5) \, \mathrm{d}x = \int x^4 \cdot \sin(u) \frac{\mathrm{d}u}{5x^4} = \int \sin(u) \cdot \frac{1}{5} \, \mathrm{d}u = \int \frac{1}{5}\sin(u) \, \mathrm{d}u = -\frac{1}{5}\cos(u) + C$$

Rücksubstitution: $u = x^5$: $\int x^4 \cdot \sin(x^5) = \boldsymbol{-\frac{1}{5}\cos(x^5) + C}$

b) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+4}\,\mathrm{d}x$

Lösung:

Substitution mit: $u = x^2+4$ ergibt $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 2x \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}u}{2x}$ und somit:

$$\int \frac{x}{x^2+4}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x}{u}\frac{\mathrm{d}u}{2x} = \int \frac{1}{2u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\cdot \ln(u) + C$$

Rücksubstitution: $u = x^2+4$: $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+4}\,\mathrm{d}x = \boldsymbol{\frac{1}{2}\ln(x^2+4) + C}$

Oder auf direktem Weg (im Zähler steht die Ableitung des Nenners (bis auf eine Konstante).

Vergleiche mit der Formel im Skript (S. 28): $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)} = \boldsymbol{\ln|f(x)| + C}$

c) $\displaystyle\int 10xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x$

Lösung:

Substitution mit: $u = -x^2$ ergibt $\mathrm{d}u = -2x\mathrm{d}x$ und somit:

$$\int 10xe^{-x^2}\mathrm{d}x = \int -5e^u\,\mathrm{d}u = -5e^u + C = \boldsymbol{-5e^{-x^2} + C}$$

d) $\displaystyle\int e^{2x+1}\,\mathrm{d}x$

Lösung:

Substitution mit: $u = 2x+1$ ergibt $\mathrm{d}u = 2\mathrm{d}x$ und somit:

$$\int e^{2x+1}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2}e^u\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}e^u + C = \boldsymbol{\frac{1}{2}e^{2x+1} + C}$$

e) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x)\ \mathrm{d}x$

Lösung:
Substitution mit: $u = 2x$ ergibt $\mathrm{d}u = 2\mathrm{d}x$ und somit:

$$\int \sin(2x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \sin(u)\ \mathrm{d}u = -\frac{1}{2}\cos(u) = -\frac{1}{2}\cos(2x) + C$$

1. Möglichkeit (Grenzen beibehalten):

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x)\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\Big[\cos(2x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2}\Big[\cos(\pi)-\cos(0)\Big] = -\frac{1}{2}\Big[-1-1\Big] = \mathbf{1}$$

2. Möglichkeit (neue Grenzen): $\Rightarrow$ $\boldsymbol{u = 2x}$

untere Grenze: $= 2 \cdot 0 = 0$

obere Grenze: $= 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x)\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\Big[\cos(u)\Big]_0^{\pi} = -\frac{1}{2}\Big[\cos(\pi)-\cos(0)\Big] = -\frac{1}{2}\Big[-1-1\Big] = \mathbf{1}$$

f) $\int_0^{a} \cos(x+\pi)\ \mathrm{d}x$

Lösung:
Substitution mit: $u = x + \pi$ ergibt $\mathrm{d}u = 1\mathrm{d}x$ und mit neuen Grenzen:

untere Grenze: $= 0 + \pi = \pi$

obere Grenze: $= a + \pi$

$$\int_0^{a} \cos(x+\pi)\ \mathrm{d}x = \int_{\pi}^{a+\pi} \cos(u)\ \mathrm{d}u = \Big[\sin(u)\Big]_{\pi}^{a+\pi} = \sin(a+\pi)-\sin(\pi) = \boldsymbol{\sin(a+\pi)}$$

3. Aufgabe:

Berechnen Sie folgende Integrale (durch partielle Integration):

a) $\int 9x^2 \cdot \ln|x| \mathrm{d}x$

Lösung:
Substitution mit:
$u' = 9x^2$ und $v = \ln(x)$ ergibt sich
$u = 3x^3$ und $v' = \frac{1}{x}$
$$\int 9x^2 \cdot \ln|x| \mathrm{d}x = \mathbf{3x^3 \ln|x| - \int 3x^3 \cdot \frac{1}{x} \mathrm{d}x = 3x^3 \ln|x| - x^3 + C}$$

b) $\int x \cdot \ln(x) \mathrm{d}x$

Lösung:

Substitution mit:
$u' = x$ und $v = \ln(x)$ ergibt sich
$u = \frac{1}{2}x^2$ und $v' = \frac{1}{x}$
$$\int x \cdot \ln(x) \mathrm{d}x = \mathbf{\frac{x^2}{2} \cdot \ln(x) - \frac{x^2}{4} + C}$$

c) $\int_0^1 e^x \cdot x \mathrm{d}x$

Lösung:

Substitution mit:
$u' = e^x$ und $v = x$ ergibt sich
$u = e^x$ und $v' = 1$
$$\int_0^1 e^x \cdot x \mathrm{d}x = \left[e^x \cdot x\right]_0^1 - \int_0^1 e^x \mathrm{d}x = \left[e^x \cdot x\right]_0^1 - \left[e^x\right]_0^1 =$$
$$= (e^1 \cdot 1 - e^0 \cdot 0) - (e^1 - e^0) = e - 0 - (e - 1) = \mathbf{1}$$

4. Aufgabe:

Berechnen Sie folgende Integrale (durch Partialbruchzerlegung):

a) $\displaystyle\int \frac{x-2}{x^2-6x+9}\,\mathrm{d}x$

Lösung:

Es ist $x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$ und somit

$$\frac{x-2}{x^2-6x+9} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x-3)^2}$$

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow x - 2 = A(x-3) + B \\
&\Longrightarrow x = 3: \quad B = 1 \\
&\ x = 4: \quad A = 1
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \int \frac{x-2}{x^2-6x+9}dx = \int(\frac{1}{x-3} + \frac{1}{(x-3)^2})dx = ln|x-3| - \frac{1}{x-3}$$

b) $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^3-3x^2-x+3}\,\mathrm{d}x$

Lösung:

Es ist $x^3 - 3x^2 - x + 3 = (x-1)(x-3)(x+1)$ und somit

$$\frac{x+2}{x^3-3x^2-x+3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{x+1}$$

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow x + 2 = A(x-3)(x+1) + B(x-1)(x+1) + C(x-1)(x-3) \\
&\Longrightarrow x = 1: \quad 3 = -4A \Longrightarrow A = -\frac{3}{4} \\
&\ x = -1: \quad 1 = 8C \Longrightarrow C = \frac{1}{8} \\
&\ x = 3: \quad 5 = 8B \Longrightarrow B = \frac{5}{8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \int \frac{x+2}{x^3-3x^2-x+3}dx &= \int(-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x-1} + \frac{5}{8}\cdot\frac{1}{x-3} + \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{x+1})dx \\
&= -\frac{3}{4}ln|x-1| + \frac{5}{8}ln|x-3| + \frac{1}{8}ln|x+1|
\end{aligned}$$

5. Aufgabe:

Existieren die folgenden uneigentlichen Integrale? Berechnen Sie gegebenenfalls ihren Wert.

a) $\int\limits_0^\infty e^{-kx}\,\mathrm{d}x$, ($k > 0$ konstant)

Lösung:

$$\int\limits_0^\infty e^{-kx}\mathrm{d}x = \lim_{N\to+\infty}\int\limits_0^N e^{-kx}\mathrm{d}x = \lim_{N\to+\infty} -\frac{1}{k}e^{-kx}\Big|_0^N = \lim_{N\to+\infty} -\frac{1}{k}e^{-kN} + \frac{1}{k} = \frac{1}{k}.$$

b) $\int\limits_0^\infty \sin(x)\mathrm{d}x$

Lösung:

$$\int\limits_0^\infty \sin(x)\mathrm{d}x = \lim_{N\to+\infty}\int\limits_0^N \sin(x)\mathrm{d}x = \lim_{N\to+\infty} -\cos(x)\Big|_0^N = \lim_{N\to+\infty} -\cos(N) + \cos(0).$$

Da der Grenzwert

$$\lim_{N\to+\infty} -\cos(N),$$

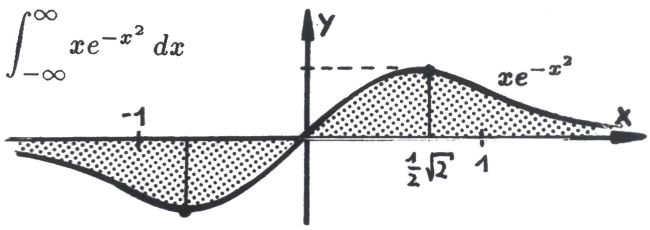
unbestimmt divergiert, divergiert auch das Integral.

c) $\int\limits_0^2 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

Lösung:

$$\int\limits_0^2 \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \lim_{N\to 0+}\int\limits_N^2 \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \lim_{N\to 0+} 2\sqrt{x}\Big|_N^2 = \lim_{N\to 0+} 2\sqrt{2} - 2\sqrt{N} = 2\sqrt{2}.$$

d) $\int\limits_{-\infty}^\infty xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ und $\int\limits_{-\infty}^\infty |xe^{-x^2}|\,\mathrm{d}x$



Lösung:

$$\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2}\,dx \;=^{1}\; \int_{-\infty}^{0} xe^{-x^2}\,dx \;+\; \int_{0}^{\infty} xe^{-x^2}\,dx$$
$$= \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} xe^{-x^2}\,dx + \lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b} xe^{-x^2}\,dx.$$

Berechnung der Grenzwerte:

$$\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} xe^{-x^2}\,dx = \lim_{a\to-\infty}\left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_a^0 = \lim_{a\to-\infty}\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{-a^2}\right) = \underline{\underline{-\frac{1}{2}}},$$
$$\lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b} xe^{-x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_0^b = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{2}e^{-b^2}+\frac{1}{2}\right) = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}.$$

Also erhält man: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}+\frac{1}{2} = \underline{\underline{0}}$

$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ heißt **absolut konvergent**, wenn $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx$ konvergiert.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |xe^{-x^2}|\,dx = \int_{-\infty}^{0} -xe^{-x^2}\,dx + \int_{0}^{\infty} xe^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = \underline{\underline{1}}.$$

Die Fläche zwischen der Kurve $|xe^{-x^2}|$ und der x–Achse ist 1.

$|xe^{-x^2}|$ ist eine gerade Funktion, also: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |xe^{-x^2}|\,dx = 2\int_{0}^{\infty} |xe^{-x^2}|\,dx = 1$