Mathematik 2: Übungsblatt 2 - Differentialrechnung

1. Aufgabe:

Wann verwendet man Δx, dx und wann ∂x?

Lösung:

a) Δx: Verwendet man bei konkreten Differenzen, z.B. $x_1 - x_0$.

b) dx: Verwendet man für Differentiale, also infinitesimal kleine Differenzen (d$x \neq 0$)

c) ∂x: Verwendet man bei partiellen Ableitungen z.B. $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$.

2. Aufgabe:

Leiten Sie folgende Funktionen nach x ggf. nach t ab:

a) $y = 4 \cdot \sin(3x) \quad \Rightarrow \quad y'(x) = 12{\cdot}\cos(3x)$ (Kettenregel)

b) $y = (2x-7)^8 \quad \Rightarrow \quad y'(x) = 16(2x-7)^7$ (Ketten- & Potenzregel)

c) $y = e^{5x^2-2x+7} \quad \Rightarrow \quad y'(x) = e^{5x^2-2x+7}(10x-2)$ (Ketten- & Potenzregel)

d) $y = A{\cdot}\sin(\omega t - \Phi) \quad \Rightarrow \quad y'(t) = A\omega\cos(\omega t - \Phi)$ (Kettenregel)

e) $y = \sqrt[3]{(x^2-3x+7)^2} \quad \Rightarrow \quad y'(x) = \dfrac{2(2x-3)}{3\sqrt[3]{(x^2-3x+7)}}$ (Ketten- & Potenzregel)

f) $y = \ln\big(\sin(3x-1)\big) \quad \Rightarrow \quad y'(x) = 3\cot(3x-1)$ (Kettenregel)

g) $y = \sin^3(x^2+2) \quad \Rightarrow \quad y'(x) = 3\sin^2(x^2+2){\cdot}\cos(x^2+2)\cdot 2x$ (Ketten- & Potenzregel)

h) $y = \dfrac{2}{x^2 \cdot \ln(x)} \quad \Rightarrow \quad y'(x) = \dfrac{-4\cdot\ln(x)+2}{x^3\cdot\ln^2(x)}$ (Quotienten- & Produktregel)

i) $y = 2\cdot\dfrac{\ln(x)}{x^2} \quad \Rightarrow \quad y'(x) = \dfrac{2-4\ln(x)}{x^3}$ (Quotientenregel)

Lsg. für $(\sin^3(x))'$

j) $y = x^3{\cdot}e^x{\cdot}\arctan(x) \quad \Rightarrow \quad y'(x) = x^2{\cdot}e^x{\cdot}\Big[(3+x){\cdot}\arctan(x)+\dfrac{x}{1+x^2}\Big]$ (erw. Produkt- & Potenzregel)

k) $y = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} \quad \Rightarrow \quad y'(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$ (Quotientenregel & Phytagoras)

(mit $u = \sin(x)$)

$$\frac{d}{dx}(\sin^3(x)) = \frac{d}{du}u^3 \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{du}u^3 = 3u^2 = 3\left(\frac{d}{dx}\cdot\sin(x)\right)\cdot\sin^2(x)$$

$\frac{d}{du}\sin(u) = \cos(u)$

$= \cos(x)\left(\frac{d}{dx}\cdot x\right)\cdot 3\sin^2(x)$

$= 3\cos(x)\cdot\sin^2(x)$

3. Aufgabe:

Bestimmen Sie mit Hilfe der Umkehrfunktion die Ableitung folgender Funktion:

$y(x) = \log_a(x)$

Lösung:

$y = \log_a(x) \quad \Rightarrow \quad x = a^y$ Ableiten der impliziten Funktion (ausführlich):

Kettenregel für $a^{y(x)}$, bzw. Substitution und Ableitung der äußeren Funktion mal der Ableitung der inneren Funktion!

- Substitution: $u = y(x)$
- Äußere Funktion $= a^u$
- Äußere Ableitung $= (a^u)' = \left(e^{u\ln(a)}\right)' = e^{u\ln(a)} \cdot \ln(a) = a^u \cdot \ln(a)$ (Kettenregel)
- Innere Funktion $= y(x)$
- Innere Ableitung $= y'(x)$

$$\Rightarrow \quad (a^u)' = a^u \cdot \ln(a) \cdot y'(x) = a^y \cdot \ln(a) \cdot y'$$

Jetzt kann die implizite Funktion abgeleitet werden:

$x = a^y$

$\Rightarrow \quad 1 = a^y \cdot \ln(a) \cdot y'$

woraus sich nach $y'(x)$ umgestellt die Ableitung:

$y' = \dfrac{1}{\ln(a)\cdot a^y}$ und durch x ausgedrückt $(a^y = x) \;\Rightarrow\; y' = \dfrac{1}{\ln(a)\cdot x}$ ergibt

4. Aufgabe:

Bestimmen Sie die erste Ableitung $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ der in Parameterform gegebenen Funktion an den drei gegebenen Stellen.

$$x(t) = \frac{t}{1+t^2}, \quad y(t) = \frac{1-t}{1+t^2}, \quad t_1 = -2, \quad t_2 = \frac{1}{2}, \quad t_3 = 2$$

Lösung:

$$x(t) = \frac{t}{1+t^2}, \quad x_t = \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}$$

$$y(t) = \frac{1-t}{1+t^2}, \quad y_t = \frac{t^2-2t-1}{(1+t^2)^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{t^2-2t-1}{1-t^2}$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t_1=-2} = -\frac{7}{3}, \quad \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t_2=\frac{1}{2}} = -\frac{7}{3}, \quad \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t_3=2} = \frac{1}{3}$$

5. Aufgabe:

Die Funktion $f(x) = x^3$ ist auf Extremwerte zu untersuchen.

Lösung:

a) 1. und 2. Ableitung berechnen

$f'(x) = 3x^2$

$f''(x) = 6x$

b) Für welche x-Werte wird die 2. Ableitung gleich Null?

Ansatz:

$f''(x) = 0$

$f''(x) = 6x = 0 \quad \Rightarrow x = 0$

c) 3. Ableitung berechnen

$f'''(x) = 6$

d) Den in Schritt 2 berechneten x-Wert in die 3. Ableitung einsetzen

Da in der dritten Ableitung kein x vorkommt, sind wir bereits fertig!

Die dritte Ableitung ist immer ungleich Null:

$f'''(x) = 6 \neq 0.$

...aus diesem Grund liegt an der Stelle $x = 0$ ein Wendepunkt vor.

Außerdem ist $f'(0) = 0$ (waagrechte Tangente), aus diesem Grund liegt an der Stelle $x = 0$ sogar ein Sattelpunkt vor.

e) x-Wert in die Funktion $f(x)$ einsetzen, um die y-Koordinate des Wende/Sattelpunktes zu berechnen

$y = f(0) = 0^3 = 0$

Zusammenfassung

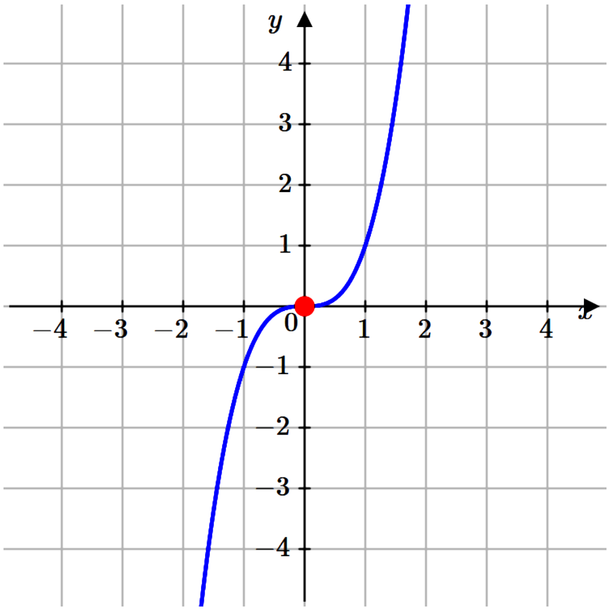
Die Funktion besitzt an der Stelle $(0|0)$ einen Wendepunkt bzw. Sattelpunkt.

Im Koordinatensystem ist die Funktion $f(x) = x^3$ eingezeichnet. Außerdem ist der Sattelpunkt der Funktion rot markiert.

Für $x < 0$ ist die Funktion rechtsgekrümmt.

Für $x > 0$ ist die Funktion linksgekrümmt.

Es wird deutlich, dass der Wendepunkt $x = 0$ der Punkt ist, an dem sich das Krümmungsverhalten ändert.



Schnelle Lösung:

a) $f'(x) = 3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

b) $f''(x) = 6x$

c) $f''(0) = 0$

d) $f^{(3)} = 6$

e) $\Rightarrow n = 3 =$ ungerade $\quad \Rightarrow$ Sattelpunkt

6. Aufgabe:

Die Funktion $f(x) = \frac{2}{3}x^3 + 3x^2 + 4x$ ist auf Extremwerte zu untersuchen.

Lösung:

a) Erste Ableitung berechnen

$f'(x) = 2x^2 + 6^x + 4$

b) Nullstellen der ersten Ableitung berechnen

Ansatz: $f'(x) = 0 \quad f'(x) = 2x^2 + 6x + 4 = 0$

Es handelt sich um eine quadratische Gleichung, die wir z.B. mit Hilfe der Mitternachtsformel lösen.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 2 \cdot 4}}{2 \cdot 2} = \frac{-6 \pm 2}{4}$$

$$x_1 = \frac{-6 - 2}{4} = -2$$

$$x_2 = \frac{-6 + 2}{4} = -1$$

c) 2. Ableitung berechen:

$f''(x) = 4x + 6$

d) Nullstellen der ersten Ableitung in die zweite Ableitung einsetzen

$f''(-2) = 4 \cdot (-2) + 6 = -2 < 0$ an der Stelle $x = -2$ ist ein Hochpunkt

$f''(-1) = 4 \cdot (-1) + 6 = 2 > 0$ an der Stelle $x = -1$ ist ein Tiefpunkt

e) y-Koordinate des Hochpunktes/Tiefpunktes berechnen

$y = f(-2) = 23 \cdot (-2)3 + 3 \cdot (-2)2 + 4 \cdot (-2) = -\frac{4}{3}$

$y = f(-1) = 23 \cdot (-1)3 + 3 \cdot (-1)2 + 4 \cdot (-1) = -\frac{5}{3}$

Zusammenfassung:

Die Funktion besitzt einen Hochpunkt an der Stelle $\left(-2 \middle| -\frac{4}{3}\right)$.

Die Funktion besitzt einen Tiefpunkt an der Stelle $\left(-1 \middle| -\frac{5}{3}\right)$.