Mathematik 2: Übungsblatt 1 - Wiederholung

Zahlenräume:

1. **Aufgabe:**

Was versteht man unter einer irrationalen Zahl?

Lösung:

Eine irrationale Zahl ist eine reelle Zahl, die keine rationale Zahl ist.

Kennzeichen einer irrationalen Zahl ist, dass sie nicht als Quotient zweier ganzer Zahlen darstellbar ist.

In der Dezimalschreibweise werden irrationale Zahlen mit einer nicht periodischen, unendlichen Anzahl von Dezimalstellen dargestellt (z. B. 0,1011...), d.h., sie sind unendliche nichtperiodische Dezimalbrüche.

Bekannte irrationale Zahlen sind die Eulersche Zahl e, die Kreiszahl π oder auch $\sqrt{2}$.

2. **Aufgabe:**

Warum hat man die imaginären Zahlen eingeführt?

Lösung:

Die komplexen Zahlen helfen bei der Berechnung von Aufgaben in verschiedenen Naturwissenschaften. Rechenoperationen werden durch Einführung der komplexen Zahlen sehr einfach.

In der Elektrotechnik zum Beispiel gelingt mit den komplexen Zahlen die Berechnung von Phasenverschiebungen von Wechselströmen in einfacher und anschaulicher Form. Hier wird anstatt der imaginären Einheit i ein kleine j verwendet um Verwechslungen mit dem Strom i zu vermeiden.

In der Physik werden die komplexen Zahlen in der Quantentheorie sehr effektiv eingesetzt. Bei der Relativitätstheorie nutzt man z.B. als vierte Koordinate ict im sogenannten Raumzeitvektor (x, y, z, ict).

Komplexe Zahlen:

3. **Aufgabe:**

Finde Realteil $\mathrm{Re}(z)$ und Imaginäreteil $\mathrm{Im}(z)$ folgender komplexen Zahlen:

a) $z = 3 + 3i$ $\quad$ $\mathrm{Re}(z) = \mathbf{3}$ $\quad$ $\mathrm{Im}(z) = \mathbf{3}$

b) $z = -4 + 7i$ $\quad$ $\mathrm{Re}(z) = \mathbf{-4}$ $\quad$ $\mathrm{Im}(z) = \mathbf{7}$

c) $z = \sqrt{-4}$ $\quad$ $\mathrm{Re}(z) = \mathbf{0}$ $\quad$ $\mathrm{Im}(z) = \mathbf{2}$

d) $z = 7 + \sqrt{(-9)} \cdot i$ $\quad$ $\mathrm{Re}(z) = \mathbf{4}$ $\quad$ $\mathrm{Im}(z) = \mathbf{0}$

e) $z = 200$ $\quad$ $\mathrm{Re}(z) = \mathbf{200}$ $\quad$ $\mathrm{Im}(z) = \mathbf{0}$

f) $z = 3i$ $\quad$ $\mathrm{Re}(z) = \mathbf{0}$ $\quad$ $\mathrm{Im}(z) = \mathbf{3}$

4. Aufgabe:

Berechnen Sie das Produkt von z_1 und z_2.

a) $z_1 = 2 + 3i$ $\quad$ $z_2 = 4 + 5i$ $\quad$ **Lösung:** $z_1 \cdot z_2 = -7 + 22i$

b) $z_1 = 0.5 + 3i$ $\quad$ $z_2 = 8 - 10i$ $\quad$ **Lösung:** $z_1 \cdot z_2 = 34 + 19i$

c) $z_1 = i$ $\quad$ $z_2 = -2 - 3i$ $\quad$ **Lösung:** $z_1 \cdot z_2 = 3 - 2i$

5. Aufgabe:

Berechnen Sie die Quotienten z_1/z_2 und z_2/z_1.

a) $z_1 = 4 + 4i$ $\quad$ $z_2 = 12 + 12i$ $\quad$ **Lösung:** $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{3}$; $\quad \frac{z_2}{z_1} = 3$

b) $z_1 = -3 + 4i$ $\quad$ $z_2 = 5 + 7i$ $\quad$ **Lösung:** $\frac{z_1}{z_2} = \frac{13}{74} + \frac{41}{74}i$; $\quad \frac{z_2}{z_1} = \frac{13}{25} - \frac{41}{25}i$

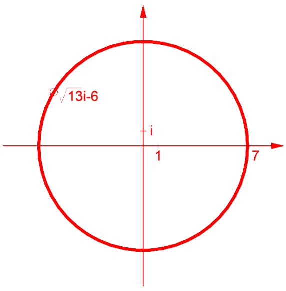
c) $z_1 = 10i$ $\quad$ $z_2 = 10 + 5i$ $\quad$ **Lösung:** $\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{5} + \frac{4}{5}i$; $\quad \frac{z_2}{z_1} = \frac{1}{2} - i$

6. Aufgabe:

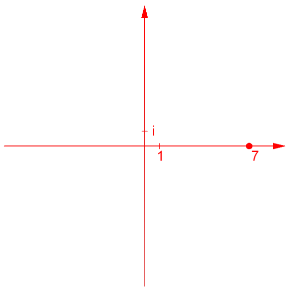
Stellen Sie die Mengen aller komplexen Zahlen, für die
a) $|z| = |\sqrt{13}i - 6|$ bzw. b) $z = |\sqrt{13}i - 6|$
gilt, grafisch dar!

Lösung:

a) $|z| = 7$, d.h. Menge aller komplexen Zahlen mit Betrag 7 (Abstand 7 vom Koordinatenursprung)



b) $z = 7$, d.h. nur die Zahl 7



Potenzrechnen:

7. Aufgabe:

Berechnen Sie:

a) $\left(\frac{1}{10}\right)^2 = \frac{1^2}{10^2} = \frac{1}{100}$

b) $\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64}$

c) $1^{-10} = \frac{1}{1^{10}} = 1$

d) $(-2)^6 = 64$

e) $-2^6 = -64$

f) $-2^{-6} = -\frac{1}{2^6} = -\frac{1}{64}$

g) $3x^3 + 3x^2 =$ Addition nicht möglich

h) $x^m - 2x^m = -x^m$

i) $a^n \cdot a = a^{n+1}$

j) $a^{n-3} \cdot a^{3-n} = a^{(n-3)+(3-n)} = a^0 = 1$

k) $\left(\frac{3a}{4}\right)^n \cdot \left(\frac{9a}{2}\right)^{-n} = = \left(\frac{3a}{4}\right)^n \cdot \left(\frac{2}{9a}\right)^n = \frac{3a \cdot 2}{4 \cdot 9a} = \left(\frac{1}{6}\right)^n$

l) $\frac{a^{n+1}}{a^{n-1}} = = a^{(n+1)-(n-1)} = a^2$

m) $\frac{1-a^2}{a^6} + \frac{1+a}{a^4} - \frac{1}{a^3} = \frac{1-a^2}{a^6} + \frac{(1+a) \cdot a^2}{a^4 \cdot a^2} - \frac{1 \cdot a^3}{a^3 \cdot a^3} = \frac{1-a^2}{a^6} + \frac{a^2+a^3}{a^6} - \frac{a^3}{a^6} = \frac{1}{a^6}$

Wurzelrechnung:

8. Aufgabe:

Verwandeln Sie von Potenzen mit gebrochenen Exponenten in Wurzelausdrücke:

a) $5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25}$

b) $16^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{16^1} = \sqrt[4]{16} = 2$

c) $q^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{q^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt[2]{q}} = \frac{1}{\sqrt{q}}$

9. Aufgabe:

Verwandeln Sie von Wurzeln in Potenzen mit gebrochenen Exponenten:

a) $\sqrt[5]{x^2} = \left(x^{\frac{1}{5}}\right)^2 = x^{\frac{2}{5}}$

b) $\frac{1}{\sqrt[n]{z^m}} = z^{-\frac{m}{n}}$

Grenzwerte:

10. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2+x+1}{3x^2+x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2(2+\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2})}{x^2(3+\frac{x}{x^2})} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}{(3+\frac{1}{x})} = \dfrac{2}{3}$

11. $\lim\limits_{x\to-5} \dfrac{x^2+3x-10}{x+5} = \lim\limits_{x\to-5} \dfrac{(x+5)(x-2)}{x+5} = \lim\limits_{x\to-5} x-2 = -5-2 = -7$