

## Mathematik 2 - Probeklausur 3

Bearbeitungsdauer: 90 Minuten

Es dürfen der DHBW Taschenrechner und zwei DIN A4-Seiten selbstgeschriebene Formelsammlung benutzt werden.

1. Aufgabe:

**Welche Aussage ist richtig?**

- ☐  $f(x) = 1$  hat die Stammfunktion  $F(x) = C$   
☒  $f(x) = 1$  hat die Stammfunktion  $F(x) = x + C$

(Fragetyp Einfachwahl)

2 Punkte

2. Aufgabe:

**Welches ist die Stammfunktion von:  $f(x) = 5$**

- ☐  $F(x) = 0$   
☐  $F(x) = 2.5x^2 + C$   
☒  $F(x) = 5x + C$

(Fragetyp Einfachwahl)

2 Punkte

3. Aufgabe:

**Welche Aussagen sind richtig?  $\int_2^3 f(x) \, dx$**

- ☐ Das Integral bestimmt eine positive Fläche.  
☒ Das Integral bestimmt einen Mittelwert.  
☒ Wenn  $f$  die Geschwindigkeit angibt, dann ist das Integral die Streckendifferenz von Zeit 2 nach 3.

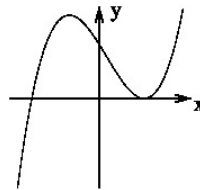
(Fragetyp Mehrfachwahl)

4 Punkte

4. Aufgabe:

**Welche der Funktionsgleichungen kann den Graphen darstellen?**

- ☐  $f(x) = -(x-2)^2(x+4)$   
☐  $f(x) = (x-2)^2(x-3)$   
☐  $f(x) = -(x-3)(x-2)(x+3)$   
☒  $f(x) = (x-2)^2(x+3)$



(Fragetyp Einfachwahl)

2 Punkte

5. Aufgabe:

**Kreuzen Sie das negative Integral an.**

- ☐  $\int_{-2}^3 x \, dx$   
☒  $\int_{-2}^{-1} x(x-4)^2 \, dx$   
☐  $\int_{-5}^6 1 \, dx$   
☐  $\int_{-2}^{-1} x^2 \, dx$

(Fragetyp Einfachwahl)

2 Punkte

6. Aufgabe:

Berechnen Sie folgende Grenzwerte:

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin(2x)}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\ln(x)}$

2 + 2 Punkte

**Lösung:**

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin(2x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{\cos(2x) \cdot 2} = \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\ln(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\frac{1}{x}} = 1$

7. Aufgabe:

Bestimmen Sie die erste Ableitung der logarithmischen Differentiation für  $\sin(x)^{x-4}$

6 Punkte

**Lösung:**

$$\ln y = (x - 4) \cdot \ln(\sin x)$$

$$\frac{1}{y'} = 1 \cdot \ln(\sin x) + (x - 4) \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x$$

$$y' = \left( \ln(\sin x) + (x - 4) \cdot \frac{\cos x}{\sin x} \right) \cdot (\sin x)^{x-4}$$

$$y' = (\sin x)^{x-4} \cdot \left( \ln(\sin x) + (x - 4) \cdot \tan^{-1} x \right)$$

8. Aufgabe:

Bestimmen Sie sämtliche partiellen Ableitungen bis zur 2. Ordnung von

$$f(x, y, z) = e^{x-y} \cos(5z) \quad \text{für } x, y, z \in \mathbb{R}$$

8 Punkte

**Lösung:**

1. Ordnung:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = e^{x-y} \cos(5z) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = -e^{x-y} \cos(5z) \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = -5e^{x-y} \sin(5z)$$

2. Ordnung:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z) = e^{x-y} \cos(5z)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y, z) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y, z) = -e^{x-y} \cos(5z)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x, y, z) = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x, y, z) = -5e^{x-y} \sin(5z)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y, z) = e^{x-y} \cos(5z)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x, y, z) = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x, y, z) = 5e^{x-y} \sin(5z)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, z) = -25e^{x-y} \cos(5z)$$

9. Aufgabe:

Bestimmen Sie den Gradienten und die Hesse-Matrix für folgende Funktionen:

a)  $f(x, y) = 3x^4 - x^2y + 5xy^3$

b)  $(5y - x^2) \cdot \ln y + 3xe^{-y^2}$

6 + 8 Punkte

**Lösung:**

a)

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 3x^4 - x^2y + 5xy^3 \\ \Rightarrow &\begin{cases} f_x(x, y) = 12x^3 - 2xy + 5y^3 \\ f_y(x, y) = -x^2 + 15xy^2 \end{cases} \\ \Rightarrow &\text{grad } f(x, y) = (12x^3 - 2xy + 5y^3, -x^2 + 15xy^2)^T \\ \Rightarrow &\begin{cases} f_{xx}(x, y) = 36x^2 - 2y \\ f_{xy}(x, y) = -2x + 15y^2 \\ f_{yx}(x, y) = f_{xy}(x, y) \\ f_{yy}(x, y) = 30xy \end{cases} \\ \Rightarrow &\text{Hesse } f(x, y) = \begin{pmatrix} 36x^2 - 2y & -2x + 15y^2 \\ -2x + 15y^2 & 30xy \end{pmatrix} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} f(x, y) &= (5y - x^2) \cdot \ln y + 3xe^{-y^2} \\ \text{grad } f(x, y) &= (-2x \ln y + 3e^{-y^2}, 5 \ln y + \frac{5y - x^2}{y} - 6yxe^{-y^2})^T \\ \text{Hesse } f(x, y) &= \begin{pmatrix} -2 \ln y & -2\frac{x}{y} - 6ye^{-y^2} \\ -2\frac{x}{y} - 6ye^{-y^2} & \frac{5}{y} + \frac{x^2}{y^2} + 12y^2xe^{-y^2} - 6xe^{-y^2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

10. Aufgabe:

Integrieren Sie mittels Substitution a) bzw. partieller Integration b):

a)  $\int \sin(\omega t + \varphi_0) \, dt$

b)  $\int x^2 e^x \, dx$

5 + 5 Punkte

**Lösung:**

a)  $\int \sin(\omega t + \varphi_0) \, dt$  Substitution:  $u = \omega t + \varphi_0, \quad \frac{du}{dt} = \omega \Rightarrow dt = \frac{du}{\omega}$

$$\int \sin(u) \frac{du}{\omega} = \frac{1}{\omega} \int \sin(u) \, du = \frac{1}{\omega} (-\cos(u)) + C$$

$$\text{Rücksubstitution: } \int \sin(\omega t + \varphi_0) \, dt = -\frac{1}{\omega} \cos(\omega t + \varphi_0) + C$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \int x^2 e^x \, dx &\Rightarrow u = x^2 & v' &= e^x \\ &u' = 2x & v &= e^x \end{aligned}$$

$$\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - \int 2x \cdot e^x \, dx = x^2 e^x - \left( 2x e^x - \int 2e^x \, dx \right) = (x^2 - 2x + 2)e^x + C$$

11. Aufgabe:

Berechnen Sie folgendes Doppelintegral mit der Substitutionsmethode:

$$\int_{x=1}^3 \int_{y=0}^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(\frac{y}{x}\right) \cdot dy \, dx$$

8 Punkte

**Lösung:**

Inneres Integral (nach der Variablen  $y$ ):

$$\int_{y=0}^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(\frac{y}{x}\right) \cdot dy \quad \text{Substitution: } u = \frac{1}{x}y, \quad \frac{du}{dy} = \frac{1}{x} \Rightarrow dy = x \cdot du$$

$$\int_{y=0}^{\frac{\pi}{2}} \cos(u) \cdot x \, du = x \cdot \int_{y=0}^{\frac{\pi}{2}} \cos(u) \, du = x \cdot \left[ \sin(u) \right]_{y=0}^{\frac{\pi}{2}} \quad (\text{Rücks. mit } u = \frac{y}{x}) = x \cdot \left[ \sin\left(\frac{y}{x}\right) \right]_{y=0}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= x \left( \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(0) \right) = x(1 - 0) = x$$

Äußeres Integral (nach der Variablen  $x$ ):

$$\int_{x=1}^3 x \, dx = \left[ \frac{1}{2}x^2 \right]_1^3 = \frac{1}{2} \left[ x^2 \right]_1^3 = \frac{1}{2}(9 - 1) = 4$$

12. Aufgabe:

Gegeben sind die Integrale a) und b). Sie sind hier als uneigentliche Integrale formuliert. Es ist zu bestimmen, ob tatsächlich jedes der beiden ein uneigentliches Integral ist oder nicht. Falls ja, ist es konvergent oder divergent?

Berechnen Sie jedes der beiden Integrale.:

a) Im Intervall  $[0, \infty[$

$$I = \int_0^{\infty} \sqrt{x} \, dx$$

a) Im Intervall  $[0, \infty[$

$$I = \int_0^{\infty} \cos(x) \, dx$$

5 + 5 Punkte

**Lösung:**

$$a) \, I = \int_0^{\infty} \sqrt{x} \, dx = \int_0^{\infty} x^{\frac{1}{2}} \, dx = \left[ \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_0^{\infty} = \infty$$

Dieses uneigentliche Integral ist divergent.

$$b) \, I = \int_0^{\infty} \cos(x) \, dx = \left[ \sin(x) \right]_0^{\infty}$$

Der Grenzwert existiert nicht. Die Sinusfunktion oszilliert für sehr große Argumente und nähert sich keinem festen Wert. Deswegen existiert auch das uneigentliche Integral nicht.

13. Aufgabe:

Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihe. Für welche  $x \in \mathbb{R}$  konvergiert die Reihe?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n!}$$

5 Punkte

**Lösung:**

$$a_n = \frac{1}{n!}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} \quad \text{und wir erhalten den Konvergenzradius:}$$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!(n+1)}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty$$

Die Potenzreihe konvergiert daher beständig, d.h. für jedes reelle  $x$ .

14. Aufgabe:

Bestimmen Sie für  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  das Taylorpolynom bis 3. Grades im Entwicklungspunkt  $x_0 = -1$  und geben Sie allgemein  $a_n$  der Taylorreihe an.

10 Punkte

**Lösung:**

$$f(x) = \frac{1}{x^2}, \quad x_0 = -1$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2}, \quad f(-1) = \frac{1}{(-1)^2} = 1$$

$$f'(x) = -\frac{2}{x^3}, \quad f'(-1) = -\frac{2}{(-1)^3} = 2$$

$$f''(x) = \frac{2 \cdot 3}{x^4} = \frac{3!}{x^4}, \quad f''(-1) = \frac{3!}{(-1)^4} = 3!$$

$$f'''(x) = -\frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{x^5} = -\frac{4!}{x^5}, \quad f'''(-1) = -\frac{4!}{(-1)^5} = 4!$$

$$f(x) = 1 + 2(x + 1) + 3(x + 1)^2 + 4(x + 1)^3 + \dots$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{(n+1)!}{x^{n+2}}, \quad f^{(n)}(-1) = (-1)^n \frac{(n+1)!}{(-1)^{n+2}} = (n+1)!$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n!} (x + 1)^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) (x + 1)^n$$

$$a_n = (n+1) \quad \text{an der Stelle } x_0 = -1$$

15. Aufgabe:

Berechnen Sie die Lösungen folgender gewöhnlicher Differenzialgleichung mittels Trennen der Variablen:

$$y' = b - ay \quad \text{mit } a, b > 0$$

Lösung:

$$\begin{aligned} y' &= b - ay \quad \text{mit } a, b > 0 \\ \frac{dy}{dx} &= b - ay \Rightarrow \frac{dy}{b - ay} = dx \Rightarrow \int \frac{1}{b - ay} dy = \int dx = x + C \\ &= \ln\left(1 - \frac{a}{b}y\right) = -a(x + C) \Rightarrow 1 - \frac{a}{b}y = e^{-a(x+C)} \\ &\Rightarrow y = \frac{b}{a}(1 - e^{-a(x+C)}) \end{aligned}$$

5 Punkte

Summe

90 Punkte