Mathematik 2 - Probeklausur 3

Bearbeitungsdauer: 90 Minuten

Es dürfen der DHBW Taschenrechner und zwei DIN A4-Seiten selbstgeschriebene Formelsammlung benutzt werden.

1. Aufgabe:

   Welche Aussage ist richtig?

   - ☐ $f(x) = 1$ hat die Stammfunktion $F(x) = C$
   - ☐ $f(x) = 1$ hat die Stammfunktion $F(x) = x + C$

   (Fragetyp Einfachwahl)

   2 Punkte

2. Aufgabe:

   Welches ist die Stammfunktion von: $f(x) = 5$

   - ☐ $F(x) = 0$
   - ☐ $F(x) = 2.5x^2 + C$
   - ☐ $F(x) = 5x + C$

   (Fragetyp Einfachwahl)

   2 Punkte

3. Aufgabe:

   Welche Aussagen sind richtig? $\int_2^3 f(x)\ \mathrm{d}x$

   - ☐ Das Integral bestimmt eine positive Fläche.
   - ☐ Das Integral bestimmt einen Mittelwert.
   - ☐ Wenn f die Geschwindigkeit angibt, dann ist das Integral die Streckendifferenz von Zeit 2 nach 3.

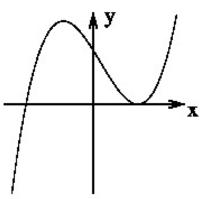
   (Fragetyp Mehrfachwahl)

   4 Punkte

4. Aufgabe:

   Welche der Funktionsgleichungen kann den Graphen darstellen?

   - ☐ $f(x) = -(x-2)^2(x+4)$
   - ☐ $f(x) = (x-2)^2(x-3)$
   - ☐ $f(x) = -(x-3)(x-2)(x+3)$
   - ☐ $f(x) = (x-2)^2(x+3)$

   (Fragetyp Einfachwahl)

   2 Punkte

5. Aufgabe:

   Kreuzen Sie das negative Integral an.

   - ☐ $\int_{-2}^{3} x\ \mathrm{d}x$
   - ☐ $\int_{-2}^{-1} x(x-4)^2\ \mathrm{d}x$
   - ☐ $\int_{-5}^{6} 1\ \mathrm{d}x$
   - ☐ $\int_{-2}^{-1} x^2\ \mathrm{d}x$

   (Fragetyp Einfachwahl)

   2 Punkte

6. Aufgabe:

Berechnen Sie folgende Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{\sin(2x)}$

b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x - 1}{\ln(x)}$

2 + 2 Punkte

7. Aufgabe:

Bestimmen Sie die erste Ableitung der logarithmischen Differentiation für $\sin(x)^{x-4}$

4 Punkte

8. Aufgabe:

Bestimmen Sie sämtliche partiellen Ableitungen bis zur 2. Ordnung von $f(x,y,z) = e^{x-y}\cos(5z)$ für $x, y, z \in \mathbb{R}$

8 Punkte

9. Aufgabe:

Bestimmen Sie den Gradienten und die Hesse-Matrix für folgende Funktionen:

a) $f(x,y) = 3x^4 - x^2y + 5xy^3$

b) $(5y - x^2)\cdot \ln y + 3xe^{-y^2}$

6 + 8 Punkte

10. Aufgabe:

Integrieren Sie mittels Substitution a) bzw. partieller Integration b):

a) $\displaystyle\int \sin(\omega t + \varphi_0)\ \mathrm{d}t$

b) $\displaystyle\int x^2 e^x\ \mathrm{d}x$

5 + 5 Punkte

11. Aufgabe:

Berechnen Sie folgendes Doppelintegral mit der Substitutionsmethode:

$$\int_{x=1}^{3} \int_{y=0}^{\pi\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}x$$

8 Punkte

12. Aufgabe:

Gegeben sind die Integrale a) und b). Sie sind hier als uneigentliche Integrale formuliert. Es ist zu bestimmen, ob tatsächlich jedes der beiden ein uneigentliches Integral ist oder nicht. Falls ja, ist es konvergent oder divergent?
Berechnen Sie jedes der beiden Integrale.:

a) **Im Intervall** $[\mathbf{0}, \infty[$

$$\mathbf{I} = \int_{0}^{\infty} \sqrt{x}\ \mathrm{d}x$$

a) **Im Intervall** $[\mathbf{0}, \infty[$

$$\mathbf{I} = \int_{0}^{\infty} \cos(x)\ \mathrm{d}x$$

5 + 5 Punkte

13. Aufgabe:

Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihe. Für welche $x \in \mathbb{R}$ **konvergiert die Reihe?**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n!}$$

5 Punkte

14. Aufgabe:

Bestimmen Sie für $f(x) = \frac{1}{x^2}$ das Taylorpolynom bis 3. Grades im Entwicklungspunkt $x_0 = -1$ und geben Sie allgemein a_n der Taylorreihe an.

8 Punkte

15. Aufgabe:

Berechnen Sie die Lösungen folgender gewöhnlicher Differenzialgleichungen mittels Trennen der Variablen:

a) $y' = -\frac{x}{y}$ **mit** $y \neq 0$

b) $y' = b - ay$ **mit** $a, b > 0$

10 Punkte
(5 + 4)

Summe

90 Punkte

Trigonometrie

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x} \qquad \sin^2 x = \frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x} \qquad 1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\sin(-x) = -\sin(x) \qquad \sin(\pi - x) = \sin(x) \qquad \sin(\pi + x) = -\sin(x)$$
$$\cos(-x) = \cos(x) \qquad \cos(\pi - x) = -\cos(x) \qquad \cos(\pi + x) = -\cos(x)$$
$$\tan(-x) = -\tan(x) \qquad \tan(\pi - x) = -\tan(x) \qquad \tan(\pi + x) = \tan(x)$$

$$\sin\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x) \qquad \sin\left(\tfrac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$$
$$\cos\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x) \qquad \cos\left(\tfrac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$$
$$\tan\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) = \cot(x) \qquad \tan\left(\tfrac{\pi}{2} + x\right) = -\cot(x)$$

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$
$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$
$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$
$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$
$$\tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x \qquad 2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$$
$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \qquad 2\sin^2 x = 1 - \cos 2x$$

$$\sin 2x = \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x} \qquad \cos 2x = \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x} \qquad \tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$$

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x \qquad \cos 3x = -3\cos x + 4\cos^3 x$$

$$\sin x + \sin y = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\sin x - \sin y = 2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)$$
$$\cos x + \cos y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\cos x - \cos y = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\tan x + \tan y = \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y}$$
$$\tan x - \tan y = \frac{\sin(x-y)}{\cos x \cos y}$$

$$\sin x \cos y = \tfrac{1}{2}\left[\sin(x+y) + \sin(x-y)\right]$$
$$\cos x \cos y = \tfrac{1}{2}\left[\cos(x+y) + \cos(x-y)\right]$$
$$\sin x \sin y = \tfrac{1}{2}\left[\cos(x-y) - \cos(x+y)\right]$$

Elementare Ableitungen

Funktionsklasse	**Funktion $f(x)$**	**Ableitung $f(x)'$**
konstante Funktion	c	0
Potenzfunktion	x^n mit $n \in R$	$n \cdot x^{n-1}$
Wurzelfunktion	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
Trigonometrische Funktionen	$\sin(x)$ $\cos(x)$ $\tan(x)$ $\cot(x)$	$\cos(x)$ - $\sin(x)$ $\frac{1}{\cos^2(x)}$ $\frac{1}{\text{-}\sin^2(x)}$
Arcusfunktionen	$\arcsin(x)$ $\arccos(x)$ $\arctan(x)$ $\operatorname{arccot}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\frac{1}{1+x^2}$ $-\frac{1}{1+x^2}$
Exponentialfunktionen	e^x a^x	e^x $\ln(a) \cdot a^x$
Logarithmusfunktionen	$\ln(x)$ $\log_a(x)$	$\frac{1}{x}$ $\frac{1}{\ln(a) \cdot x}$

Elementare Stammfunktionen

1) $\displaystyle\int x^p\,dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C \qquad (p \neq -1)$

2) $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

3) $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x + C$

4) $\displaystyle\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \qquad (a > 0, a \neq 1)$

5) $\displaystyle\int \sin x\,dx = -\cos x + C$

6) $\displaystyle\int \cos x\,dx = \sin x + C$

7) $\displaystyle\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x| + C$

8) $\displaystyle\int \cot x\,dx = \ln|\sin x| + C$

9) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \left(1 + \tan^2 x\right) dx = \tan x + C$

10) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int \left(1 + \cot^2 x\right) dx = -\cot x + C$

11) $\displaystyle\int \sinh x\,dx = \int \frac{e^x - e^{-x}}{2}\,dx = \cosh x + C$

12) $\displaystyle\int \cosh x\,dx = \int \frac{e^x + e^{-x}}{2}\,dx = \sinh x + C$

13) $\displaystyle\int \tanh x\,dx = \int \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}\,dx = \ln(\cosh x) + C$

14) $\displaystyle\int \coth x\,dx = \int \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}\,dx = \ln|\sinh x| + C$

15) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \int \left(1 - \tanh^2 x\right) dx = \tanh x + C$

16) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sinh^2 x} = \int \left(-1 + \coth^2 x\right) dx = -\coth x + C$

17) $\displaystyle\int \frac{dx}{1 + x^2} = \begin{cases} \arctan x + C_1 \\ -\operatorname{arccot} x + C_2 \end{cases} \qquad \arctan x = \tfrac{\pi}{2} - \operatorname{arccot} x$

18) $\displaystyle\int \frac{dx}{1 - x^2} = \left.\begin{cases} \operatorname{Artanh} x + C_1 & : \quad |x| < 1 \qquad \operatorname{Artanh} x = \tfrac{1}{2}\ln\tfrac{1+x}{1-x} \\ \operatorname{Arcoth} x + C_2 & : \quad |x| > 1 \qquad \operatorname{Arcoth} x = \tfrac{1}{2}\ln\tfrac{x+1}{x-1} \end{cases}\right\} \frac{1}{2}\,\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$