Mathematik 2 - Probeklausur 3

Bearbeitungsdauer: 90 Minuten

Es dürfen der DHBW Taschenrechner und zwei DIN A4-Seiten selbstgeschriebene Formelsammlung benutzt werden.

1. Aufgabe:

   Welche Aussage ist richtig?

   - ☐ $f(x) = 1$ hat die Stammfunktion $F(x) = C$
   - ☒ $f(x) = 1$ hat die Stammfunktion $F(x) = x + C$

   (Fragetyp Einfachwahl)

   2 Punkte

2. Aufgabe:

   Welches ist die Stammfunktion von: $f(x) = 5$

   - ☐ $F(x) = 0$
   - ☐ $F(x) = 2.5x^2 + C$
   - ☒ $F(x) = 5x + C$

   (Fragetyp Einfachwahl)

   2 Punkte

3. Aufgabe:

   Welche Aussagen sind richtig? $\int_2^3 f(x)\ \mathrm{d}x$

   - ☐ Das Integral bestimmt eine positive Fläche.
   - ☒ Das Integral bestimmt einen Mittelwert.
   - ☒ Wenn f die Geschwindigkeit angibt, dann ist das Integral die Streckendifferenz von Zeit 2 nach 3.

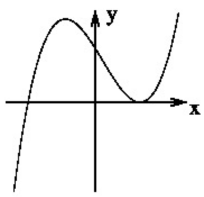
   (Fragetyp Mehrfachwahl)

   4 Punkte

4. Aufgabe:

   Welche der Funktionsgleichungen kann den Graphen darstellen?

   - ☐ $f(x) = -(x-2)^2(x+4)$
   - ☐ $f(x) = (x-2)^2(x-3)$
   - ☐ $f(x) = -(x-3)(x-2)(x+3)$
   - ☒ $f(x) = (x-2)^2(x+3)$

   (Fragetyp Einfachwahl)

   2 Punkte

5. Aufgabe:

   Kreuzen Sie das negative Integral an.

   - ☐ $\int_{-2}^{3} x\ \mathrm{d}x$
   - ☒ $\int_{-2}^{-1} x(x-4)^2\ \mathrm{d}x$
   - ☐ $\int_{-5}^{6} 1\ \mathrm{d}x$
   - ☐ $\int_{-2}^{-1} x^2\ \mathrm{d}x$

   (Fragetyp Einfachwahl)

   2 Punkte

6. Aufgabe:

Berechnen Sie folgende Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{\sin(2x)}$

b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x - 1}{\ln(x)}$

2 + 2 Punkte

Lösung:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{\sin(2x)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x}{\cos(2x) \cdot 2} = \dfrac{1}{1 \cdot 2} = \boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$

b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x - 1}{\ln(x)} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{\frac{1}{x}} = \mathbf{1}$

7. Aufgabe:

Bestimmen Sie die erste Ableitung der logarithmischen Differentiation für $\sin(x)^{x-4}$

4 Punkte

Lösung:

$\ln y = (x-4) \cdot \ln(\sin x)$

$\dfrac{1}{y'} = 1 \cdot \ln(\sin x) + (x-4) \cdot \dfrac{1}{\sin x} \cdot \cos x$

$y' = \left(\ln(\sin x) + (x-4) \cdot \dfrac{\cos x}{\sin x} \right) \cdot (\sin x)^{x-4}$

$y' = \boldsymbol{(\sin x)^{x-4} \cdot \left(\ln(\sin x) + (x-4) \cdot \tan^{-1} x \right)}$

8. Aufgabe:

Bestimmen Sie sämtliche partiellen Ableitungen bis zur 2. Ordnung von $f(x, y, z) = e^{x-y} \cos(5z)$ für $x, y, z \in \mathbb{R}$

8 Punkte

Lösung:

1. Ordnung:

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = e^{x-y}\cos(5z) \quad \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = -e^{x-y}\cos(5z) \quad \dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = -5e^{x-y}\sin(5z)$

2. Ordnung:

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) = e^{x-y}\cos(5z)$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y,z) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y,z) = -e^{x-y}\cos(5z)$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x,y,z) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x,y,z) = -5e^{x-y}\sin(5z)$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) = e^{x-y}\cos(5z)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y,z) = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x,y,z) = 5e^{x-y}\sin(5z)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z) = -25e^{x-y}\cos(5z)$$

9. Aufgabe:

Bestimmen Sie den Gradienten und die Hesse-Matrix für folgende Funktionen:

a) $\boldsymbol{f(x,y) = 3x^4 - x^2y + 5xy^3}$

b) $\boldsymbol{(5y - x^2) \cdot \ln y + 3xe^{-y^2}}$

6 + 8 Punkte

Lösung:

a)

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= 3x^4 - x^2y + 5xy^3 \\
\Rightarrow &\quad \begin{cases} f_x(x,y) = 12x^3 - 2xy + 5y^3 \\ f_y(x,y) = -x^2 + 15xy^2 \end{cases} \\
\Rightarrow &\quad grad\, f(x,y) = (12x^3 - 2xy + 5y^3,\ -x^2 + 15xy^2)^T \\
\Rightarrow &\quad \begin{cases} f_{xx}(x,y) = 36x^2 - 2y \\ f_{xy}(x,y) = -2x + 15y^2 \\ f_{yx}(x,y) = f_{xy}(x,y) \\ f_{yy}(x,y) = 30xy \end{cases} \\
\Rightarrow &\quad Hesse\, f(x,y) = \begin{pmatrix} 36x^2 - 2y & -2x + 15y^2 \\ -2x + 15y^2 & 30xy \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

b)

$$f(x,y) = (5y - x^2) \cdot ln\, y + 3xe^{-y^2}$$

$$grad\, f(x,y) = (-2xln\, y + 3e^{-y^2},\ 5ln\, y + \frac{5y - x^2}{y} - 6yxe^{-y^2})^T$$

$$Hesse\, f(x,y) = \begin{pmatrix} -2ln\, y & -2\frac{x}{y} - 6ye^{-y^2} \\ -2\frac{x}{y} - 6ye^{-y^2} & \frac{5}{y} + \frac{x^2}{y^2} + 12y^2xe^{-y^2} - 6xe^{-y^2} \end{pmatrix}$$

10. Aufgabe:

Integrieren Sie mittels Substitution a) bzw. partieller Integration b):

a) $\boldsymbol{\int \sin(\omega t + \varphi_0)\ \mathrm{d}t}$

b) $\boldsymbol{\int x^2 e^x\ \mathrm{d}x}$

5 + 5 Punkte

Lösung:

a) $\int \sin(\omega t + \varphi_0)\ \mathrm{d}t$ Substitution: $u = \omega t + \varphi_0, \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \omega \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}u}{\omega}$

$$\int \sin(u)\frac{\mathrm{d}u}{\omega} = \frac{1}{\omega}\int \sin(u)\ \mathrm{d}u = \frac{1}{\omega}(\text{-}\cos(u)) + C$$

Rücksubstitution: $\int \sin(\omega t + \varphi_0)\ \mathrm{d}t = \boldsymbol{-\frac{1}{\omega}\cos(\omega t + \varphi_0) + C}$

b) $\int x^2 e^x \,\mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ll} u = x^2 & v' = e^x \\ u' = 2x & v = e^x \end{array}$

$$\int x^2 e^x \,\mathrm{d}x = x^2 e^x - \int 2x \cdot e^x \mathrm{d}x = x^2 e^x - \left(2xe^x - \int 2e^x \mathrm{d}x\right) = \boldsymbol{(x^2 - 2x + 2)e^x + C}$$

11. Aufgabe:

Berechnen Sie folgendes Doppelintegral mit der Substitutionsmethode:

$$\boldsymbol{\int_{x=1}^{3} \int_{y=0}^{\pi\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \mathrm{d}y \;\mathrm{d}x}$$

8 Punkte

Lösung:

Inneres Integral (nach der Variablen y):

$$\int_{y=0}^{\pi\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \mathrm{d}y \qquad \text{Substitution:} \quad u = \frac{1}{x}y, \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}y = x \cdot \mathrm{d}u$$

$$\int_{y=0}^{\pi\frac{x}{2}} \cos(u) \cdot x \,\mathrm{d}u = x \cdot \int_{y=0}^{\pi\frac{x}{2}} \cos(u) \,\mathrm{d}u = x \cdot \Big[\sin(u)\Big]_{y=0}^{\pi\frac{x}{2}} \quad (\text{Rücks. mit } u = \tfrac{y}{x}) \quad = x \cdot \left[\sin\left(\frac{y}{x}\right)\right]_{y=0}^{\pi\frac{x}{2}}$$

$$= x\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(0)\right) = x(1-0) = x$$

Äußeres Integral (nach der Variablen x):

$$\int_{x=1}^{3} x \,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^3 = \frac{1}{2}\left[x^2\right]_1^3 = \frac{1}{2}(9-1) = \mathbf{4}$$

12. Aufgabe:

Gegeben sind die Integrale a) und b). Sie sind hier als uneigentliche Integrale formuliert. Es ist zu bestimmen, ob tatsächlich jedes der beiden ein uneigentliches Integral ist oder nicht. Falls ja, ist es konvergent oder divergent?
Berechnen Sie jedes der beiden Integrale.:

a) **Im Intervall $[0, \infty[$**

$$\mathbf{I} = \int_0^\infty \sqrt{x}\, \mathrm{d}x$$

a) **Im Intervall $[0, \infty[$**

$$\mathbf{I} = \int_0^\infty \cos(x)\, \mathrm{d}x$$

5 + 5 Punkte

Lösung:

a) $$\mathrm{I} = \int_0^\infty \sqrt{x}\, \mathrm{d}x = \int_0^\infty x^{\frac{1}{2}}\, \mathrm{d}x = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^\infty = \infty$$

Dieses uneigentliche Integral ist divergent.

b) $$\mathrm{I} = \int_0^\infty \cos(x)\, \mathrm{d}x = \Big[\sin(x)\Big]_0^\infty$$

Der Grenzwert exisiert nicht. Die Sinusfunktion oszilliert für sehr große Argumente und nähert sich keinem festen Wert. Deswegen existiert auch das uneigentliche Integral nicht.

13. Aufgabe:

Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihe. Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n!}$$

5 Punkte

Lösung:

$a_n = \dfrac{1}{n!}$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{(n+1)!}$ und wir erhalten den Konvergenzradius:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!(n+1)}{n!} = \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty$$

Die Potenzreihe konvergiert daher beständig, d.h. für jedes reele x.

14. Aufgabe:

Bestimmen Sie für $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ das Taylorpolynom bis 3. Grades im Entwicklungspunkt $x_0 = -1$ und geben Sie allgemein a_n der Taylorreihe an.

8 Punkte

Lösung:

$$f(x) = \frac{1}{x^2}, \qquad x_0 = -1$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2}, \qquad f(-1) = \frac{1}{(-1)^2} = 1$$

$$f'(x) = -\frac{2}{x^3}, \qquad f'(-1) = -\frac{2}{(-1)^3} = 2$$

$$f''(x) = \frac{2 \cdot 3}{x^4} = \frac{3!}{x^4}, \qquad f''(-1) = \frac{3!}{(-1)^4} = 3!$$

$$f'''(x) = -\frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{x^5} = -\frac{4!}{x^5}, \qquad f'''(-1) = -\frac{4!}{(-1)^5} = 4!$$

$$\boldsymbol{f(x) = 1 + 2(x+1) + 3(x+1)^2 + 4(x+1)^3 + \ldots}$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{(n+1)!}{x^{n+2}}, \qquad f^{(n)}(-1) = (-1)^n \frac{(n+1)!}{(-1)^{n+2}} = (n+1)!$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n!} (x+1)^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(x+1)^n$$

$\boldsymbol{a_n = (n+1)}$ an der Stelle $x_0 = -1$

15. Aufgabe:

Berechnen Sie die Lösungen folgender gewöhnlicher Differenzialgleichungen mittels Trennen der Variablen:

a) $y' = -\frac{x}{y}$ **mit** $y \neq 0$

b) $y' = b - ay$ **mit** $a, b > 0$

Lösung:

a)

$$y' = -\frac{x}{y} \qquad y \neq 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \qquad \text{explizite Form}$$

$$y\,dy = -x\,dx \qquad \text{Trennung d. Variablen}$$

$$\int y\,dy = \int -x\,dx \qquad \text{Integration}$$

$$\frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + C$$

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C \qquad | \cdot 2$$

$$x^2 + y^2 = 2C \qquad \text{mit } 2C = r^2 \text{ folgt die Kreisgleichung mit Mittelpkt im Ursprung}$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = r^2$$

b)

$$y' = b - ay \quad \text{mit } a, b > 0$$

$$\frac{dy}{dx} = b - ay \Rightarrow \frac{dy}{b-ay} = dx \Rightarrow \int \frac{1}{b-ay}\,dy = \int dx = -\frac{1}{a}\ln\left(1 - \frac{a}{b}y\right) = x + C$$

$$= \ln\left(1 - \frac{a}{b}y\right) = -a(x+C) \Rightarrow 1 - \frac{a}{b}y = e^{-a(x+C)}$$

$$\Rightarrow y = \frac{b}{a}\left(1 - e^{-a(x+C)}\right)$$

10 Punkte
(5 + 4)

Summe **90 Punkte**