

Start: 9:05

Ende: 10:35

## Probeklausur 2 Mathematik 2

Bearbeitungsdauer: 90 Minuten

Es dürfen der DHBW Taschenrechner und zwei DIN A4-Seiten selbstgeschriebene Formelsammlung benutzt werden.

Pause 10:45 - 11:00

1. Aufgabe:

Sei  $f$  ein Polynom dritten Grades. Was stimmt?

- Die dritte Ableitung ist die Nullfunktion.
- Die fünfte Ableitung existiert nicht.
- Die Ableitung  $f'$  ist nicht differenzierbar.
- a) bis c) sind alle falsch.

(Frage typ Einfachwahl)

2 Punkte

2. Aufgabe:

Es sei  $f(x) = x^3$  und  $g(x) = x + 2$ .

Für welche der folgenden Funktionen  $h$  gilt  $h'(1) = 10$ ?

- $h(x) = f(g(x))$
- $h(x) = g(f(x))$
- $h(x) = f(x) \cdot g(x)$
- $h(x) = 10x$

(Frage typ Mehrfachwahl)

4 Punkte

3. Aufgabe:

Warum ist die Betragsfunktion, definiert durch  $f(x) = |x|$ , an der Stelle  $x_0 = 0$  nicht differenzierbar?

- Weil sie dort nicht stetig ist.
- Weil dort der Grenzwert des Differenzenquotienten nicht existiert.
- Unsinn, die Funktion ist dort differenzierbar.

(Frage typ Einfachwahl)

2 Punkte

4. Aufgabe:

Gesucht ist eine Funktion  $f$  mit den folgenden Eigenschaften:

$f(0) = 1, f'(1) = 1, f''(x) = 6x - 2$

- So eine Funktion kann es nicht geben.
- Es gibt genau eine Funktion mit den gesuchten Eigenschaften.
- Es gibt mehrere Funktionen mit den gesuchten Eigenschaften.

$$f(x) = x^3 - x^2 + C$$

$$f(0) = 1$$

$$f'(1) = 1$$

(Frage typ Einfachwahl)

$$\Rightarrow f(x) = \underline{\underline{x^3 - x^2 + 1}}$$

4 Punkte

5. Aufgabe:

Eine Reihe ist konvergent, wenn die zugehörige Folge eine Nullfolge ist

- Wahr
- Falsch

Folge:  $\frac{1}{n}$   $\downarrow$

(Frage typ Einfachwahl)

Folge:  $\frac{1}{n^2}$   $\checkmark$

geht schneller gegen Null!

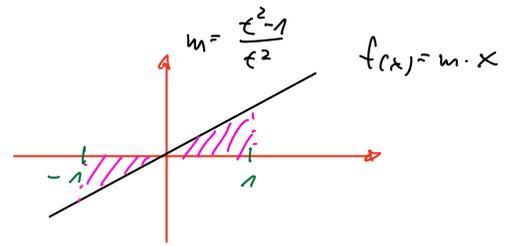
2 Punkte

6. Aufgabe:

Wie lautet die Lösung des Integrals  $\int_{-1}^1 \frac{t^2 - 1}{t^2} x \, dx$ ?

- 1
- 0
- 1
- t

(Frageart Einfachwahl)



Konstante  
≠ Steigung m

4 Punkte

7. Aufgabe:

Bestimmen Sie jeweils alle Stammfunktionen für die folgende Funktion:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

4 Punkte

**Lösung:**

$$F_e(x) = \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n} x^n + \dots + \frac{a_1}{2} x^2 + a_0 x + C$$

8. Aufgabe:

Bestimmen Sie folgende Ableitung:

$$f'(x) \text{ von } f(x) = x^{\ln(x)} \text{ für } x > 0$$

8 Punkte

**Lösung:**

Siehe z.B. Skript S. 14

$$\text{Logarithmieren: } \ln(f(x)) = \ln(y(x)) = \ln(x^{\ln(x)})$$

$$\text{Logarithmenregel: } \ln(y(x)) = \ln(x) \ln(x)$$

$$\text{Ableitung: } \frac{y'(x)}{y(x)} = \frac{2 \ln(x)}{x}$$

$$\text{Auflösen nach } y'(x): y'(x) = \frac{2 \ln(x) \cdot y(x)}{x}$$

$$\text{Einsetzen } y'(x) = 2x^{\ln(x)-1} \ln(x)$$

9. Aufgabe:

Berechnen Sie die folgenden Integrale mit Hilfe der **Substitutionsmethode**.

a)  $\int_0^{0.5} \frac{2x}{x^4 - 2x^2 + 1} dx$  *- o Binomische Formel*

b)  $\int_2^4 \frac{x}{x^2 - 1} dx$

$u = x^2 - 1$

$\frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{du}{2x} \Rightarrow$

$\int_0^{0.5} \frac{2x}{x^2 - 2x + 1} dx = \int_0^{0.5} \frac{1}{u^2} du$

**Lösung:**

a)  $\int_0^{0.5} \frac{2x}{x^4 - 2x^2 + 1} dx = \int_0^{0.5} \frac{2x}{(x^2 - 1)^2} dx = \left[ -\frac{1}{x^2 - 1} \right]_0^{0.5} = \frac{1}{3}$

b)  $\int_2^4 \frac{x}{x^2 - 1} dx = \left[ -\frac{1}{2} \ln(x^2 - 1) \right]_2^4 = \frac{1}{2} \ln 5$   
 $u = x^2 - 1$   
 $dx = \frac{du}{2x} \Rightarrow \int_2^4 \frac{x}{u \cdot 2x} du = \frac{1}{2} \int_2^4 \frac{1}{u} du$

10 (5+5) Punkte

10. Aufgabe:

Berechnen Sie die folgenden Integrale mit Hilfe der Produktregel.

a)  $\int_{-1}^1 (x \cdot e^{2x}) dx$

b)  $\int_1^3 (\ln(x))^2 dx$

$u = \ln(x) \quad v = x \ln(x) - x$   
 $u' = \frac{1}{x} \quad v' = \ln(x)$

**NR:**  $\int \ln(x) \cdot 1 dx \quad u = \ln(x) \quad v = x$   
 $u' = \frac{1}{x} \quad v' = 1$

$\int \ln(x) dx = x \ln(x) - \int \frac{1}{x} \cdot x dx$

**Lösung:**

a)  $\int_{-1}^1 (x \cdot e^{2x}) dx = \left[ x \cdot \frac{1}{2} e^{2x} \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 (1 \cdot \frac{1}{2} e^{2x}) dx = \left[ x \cdot \frac{1}{2} e^{2x} \right]_{-1}^1 - \left[ \frac{1}{4} e^{2x} \right]_{-1}^1 = \left[ \left( \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \right) \cdot e^x \right]_{-1}^1 = \frac{1}{4} e^2 + \frac{3}{4} e^{-2} \approx 1,90$

b)  $\int_1^3 (\ln(x))^2 dx = \left[ (x \ln(x) - x) \cdot \ln(x) \right]_1^3 - \int_1^3 (x \ln(x) - x) \cdot \frac{1}{x} dx = \left[ x(\ln(x))^2 - x \ln(x) \right]_1^3 - \int_1^3 (\ln(x) - 1) dx = \left[ x(\ln(x))^2 - x \ln(x) \right]_1^3 - \left[ (x \ln(x) - x) - x \right]_1^3 = \left[ x(\ln(x))^2 - 2x \ln(x) + 2x \right]_1^3 = 3 \cdot (\ln(3))^2 - 6 \cdot \ln(3) + 6 - 2 \approx 1,03$

16 (8+8) Punkte

11. Aufgabe:

Berechnen Sie folgendes Dreifachintegral:

$\int_{x=0}^3 \int_{y=0}^2 \int_{z=0}^{3-x} \frac{1}{(x+y+z+1)^3} dz dy dx$

**Lösung:**

$V = -\frac{1}{2} \int_0^3 \int_0^2 \left[ (x+y+z+1)^{-2} \right]_0^{3-x} dy dx$

$V = \frac{1}{2} \int_0^3 \int_0^2 \left[ (x+y+z+1)^{-2} - (y+4)^{-2} \right] dy dx$

$V = \frac{1}{2} \int_0^3 \left[ \frac{1}{y+4} - \frac{1}{x+y+1} \right]_0^2 dx$

$V = \frac{1}{2} \left[ \ln \left| \frac{x+1}{x+3} \right| - \frac{x}{12} \right]_0^3 = \frac{1}{8} (\ln(16) - 1) = \frac{1}{8} (4 \ln(2) - 1) \approx 0.2216$

12. Aufgabe:

Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihe.  
Für welche  $x \in \mathbb{R}$  konvergiert die Reihe?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+2}}{2^n} x^n$$

**Lösung:**

Die Potenzreihe hat den Entwicklungsort  $x_0 = 0$  und den Koeffizienten  $a_n = \frac{3^{n+2}}{2^n}$ . Der Konvergenzradius  $R$  ist:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{3^{n+2}}{2^n}}{\frac{3^{n+3}}{2^{n+1}}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{3^{n+2} 2^{n+1}}{2^n 3^{n+3}} \right| = \frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 3} = \frac{2}{3}$$

Das heißt die Reihe konvergiert für alle  $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ . In unserem Fall also für alle  $x \in \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ .

Schlussendlich müssen wir noch die Randpunkte des Konvergenzintervalls prüfen.

Für  $x = \frac{2}{3}$ :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+2}}{2^n} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+2}}{2^n} \cdot \frac{2^n}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 3^2 = \sum_{n=1}^{\infty} 9 = \infty \quad \left( = \sum_{n=1}^m 9_m \right)$$

ist die Reihe divergent. Für  $x = -\frac{2}{3}$ :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+2}}{2^n} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+2}}{2^n} \cdot \frac{2^n}{3^n} \cdot (-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} 3^2 (-1)^n = 9(-1)^n$$

ist die Reihe divergent.

Damit ergibt sich abschließend, dass die Reihe konvergiert, wenn  $x \in \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ .

13. Aufgabe:

Bestimmen Sie für  $f(x) = \frac{1}{2} \sin(2x)$  das Taylorpolynom 3. Grades im Entwicklungspunkt  $x_0 = -1$

**Lösung:**

Für das Taylorpolynom 3. Grades betrachten wir also die Taylorreihe von  $f$  bis  $n = 3$ .

$$f(x) = \frac{\sin(2x)}{2}$$

$$f'(x) = \cos(2x)$$

$$f''(x) = -2\sin(2x)$$

$$f'''(x) = -4\cos(2x)$$

Durch Einsetzen in die Darstellung des Taylorpolynom erhalten wir nun

$$T_{1,3} = \sum_{n=0}^3 \frac{f^{(n)}(1)}{n!}$$

Wichtig zur Bestimmung von  $f^{(n)}(a)$  den Taschenrechner auf Radian umstellen.

$$= \frac{-0,455}{1} \cdot 1 + \frac{(-0,416)}{1} \cdot (x+1)^1 + \frac{1,819}{2} \cdot (x+1)^2 + \frac{1,665}{6} \cdot (x+1)^3$$

$$= -0,455 - 0,416 \cdot (x+1)^1 + 0,91 \cdot (x+1)^2 + 0,278 \cdot (x+1)^3$$

10 Punkte

Summe

90 Punkte