Probeklausur 2 Mathematik 2

Bearbeitungsdauer: 90 Minuten

Es dürfen der DHBW Taschenrechner und zwei DIN A4-Seiten selbstgeschriebene Formelsammlung benutzt werden .

1. Aufgabe:

   Sei f ein Polynom dritten Grades. Was stimmt?

   ☐ Die dritte Ableitung ist die Nullfunktion.
   ☐ Die fünfte Ableitung existiert nicht.
   ☐ Die Ableitung f' ist nicht differenzierbar.
   ☒ a) bis c) sind alle falsch.

   (Fragetyp Einfachwahl)

2 Punkte

2. Aufgabe:

   Es sei $f(x) = x^3$ und $g(x) = x + 2$.
   Für welche der folgenden Funktionen h gilt $h'(1) = 10$?

   ☐ $h(x) = f(g(x))$
   ☐ $h(x) = g(f(x))$
   ☒ $h(x) = f(x) \cdot g(x)$
   ☒ $h(x) = 10x$

   (Fragetyp Mehrfachwahl)

4 Punkte

3. Aufgabe:

   Warum ist die Betragsfunktion, definiert durch $f(x) = |x|$, an der Stelle $x_0 = 0$ nicht differenzierbar?

   ☐ Weil sie dort nicht stetig ist.
   ☒ Weil dort der Grenzwert des Differenzenquotienten nicht existiert.
   ☐ Unsinn, die Funktion ist dort differenzierbar.

   (Fragetyp Einfachwahl)

2 Punkte

4. Aufgabe:

   Gesucht ist eine Funktion f mit den folgenden Eigenschaften:
   $f(0) = 1,\ f'(1) = 1,\ f''(x) = 6x - 2$

   ☐ So eine Funktion kann es nicht geben.
   ☒ Es gibt genau eine Funktion mit den gesuchten Eigenschaften.
   ☐ Es gibt mehrere Funktionen mit den gesuchten Eigenschaften.

   (Fragetyp Einfachwahl)

4 Punkte

5. Aufgabe:

   Eine Reihe ist konvergent, wenn die zugehörige Folge eine Nullfolge ist

   ☐ Wahr
   ☒ Falsch

   (Fragetyp Einfachwahl)

2 Punkte

6. Aufgabe:

   Wie lautet die Lösung des Integrals $\int\limits_{-1}^{1} \frac{t^2-1}{t^2} x \, dx$**?**

   - ☐ -1
   - ☒ 0
   - ☐ 1
   - ☐ t

   (Fragetyp Einfachwahl)

4 Punkte

7. Aufgabe:

   Bestimmen Sie jeweils alle Stammfunktionen für die folgende Funktion:

   $\boldsymbol{f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0}$

4 Punkte

   Lösung:

   $$F_e(x) = \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n} x^n + ... + \frac{a_1}{2} x^2 + a_0 x + C$$

8. Aufgabe:

   Bestimmen Sie folgende Ableitung:

   $\boldsymbol{f'(x)}$ **von** $\boldsymbol{f(x) = x^{\ln(x)}}$ **für** $\boldsymbol{x > 0}$

8 Punkte

   Lösung:

   Siehe z.B. Skript S. 14

   Logarithmieren: $\ln\Big(f(x)\Big) = \ln\Big(y(x)\Big) = \ln\Big(x^{\ln(x)}\Big)$

   Logarithmenregel: $\ln\Big(y(x)\Big) = \ln(x)\ \ln(x)$

   Ableitung: $\frac{y'(x)}{y(x)} = \frac{2\ln(x)}{x}$

   Auflösen nach $y'(x)$: $y'(x) = \frac{2\ln(x) \cdot y(x)}{x}$

   Einsetzen $y'(x) = 2x^{\ln(x)-1}\ln(x)$

9. Aufgabe:

Berechnen Sie die folgenden Integrale mit Hilfe der Substitutionsmethode.

a) $$\int_0^{0.5} \frac{2x}{x^4 - 2x^2 + 1}\, dx$$

b) $$\int_2^4 \frac{x}{x^2 - 1}\, dx$$

Lösung:

a) $$\int_0^{0.5} \frac{2x}{x^4 - 2x^2 + 1}\, dx = \int_0^{0.5} \frac{2x}{(x^2-1)^2}\, dx = \left[-\frac{1}{x^2-1} \right]_0^{0.5} = \frac{1}{3}$$

b) $$\int_2^4 \frac{x}{x^2 - 1}\, \mathbf{d}x = \left[-\frac{1}{2}\ln(x^2-1) \right]_2^4 = \frac{1}{2}\ln 5$$

10 (5+5) Punkte

10. Aufgabe:

Berechnen Sie die folgenden Integrale mit Hilfe der Produktregel.

a) $$\int_{-1}^{1} \left(x \cdot e^{2x}\right)\, dx$$

b) $$\int_1^3 \left(\ln(x)\right)^2\, dx$$

Lösung:

a) $$\int_{-1}^{1} (x \cdot e^{2x})dx = \left[x \cdot \frac{1}{2}e^{2x} \right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} (1 \cdot \frac{1}{2}e^{2x})dx = \left[x \cdot \frac{1}{2}e^{2x} \right]_{-1}^{1} - \left[\frac{1}{4}e^{2x} \right]_{-1}^{1} = \left[(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}) \cdot e^{x} \right]_{-1}^{1} = \frac{1}{4}e^2 + \frac{3}{4}e^{-2} \approx 1{,}90$$

b) $$\int_1^3 (\ln(x))^2\ dx = \left[(x\ln(x) - x) \cdot \ln(x) \right]_1^3 - \int_1^3 (x \cdot \ln(x) - x) \cdot \frac{1}{x}\ dx = \left[x(\ln(x))^2 - x\ln(x) \right]_1^3 - \int_1^3 (\ln(x) - 1)\ dx =$$

$$\left[x(\ln(x))^2 - x\ln x \right]_1^3 - \left[(x\ln(x) - x) - x \right]_1^3 = \left[x(\ln(x))^2 - 2x\ln(x) + 2x \right]_1^3 = 3 \cdot (\ln(3))^2 - 6 \cdot \ln(3) + 6 - 2 \approx 1{,}03$$

16 (8+8) Punkte

11. Aufgabe:

Berechnen Sie folgendes Dreifachintegral:

$$\int_{x=0}^{3} \int_{y=0}^{2} \int_{z=0}^{3-x} \frac{1}{(x+y+z+1)^3}\, dz\, dy\, dx$$

Lösung:

$$V = -\frac{1}{2} \int_0^3 \int_0^2 \left[(x+y+z+1)^{-2} \right]_0^{3-x} dy\ dx$$

$$V = \frac{1}{2} \int_0^3 \int_0^2 \left[(x+y+1)^{-2} - (y+4)^{-2} \right] dy\ dx$$

$$V = \frac{1}{2} \int_0^3 \left[\frac{1}{y+4} - \frac{1}{x+y+1} \right]_0^2 dx$$

$$V = \frac{1}{2} \left[\ln\left| \frac{x+1}{x+3} \right| - \frac{x}{12} \right]_0^3 = \frac{1}{8}\Big(\ln(16) - 1\Big) = \frac{1}{8}\Big(4\ln(2) - 1\Big) \approx 0.2216$$

10 Punkte

12. Aufgabe:

Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihe.
Für welche $x \in R$ konvergiert die Reihe?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+2}}{2^n} x^n$$

Lösung:

Die Potenzreihe hat den Entwicklungsstelle $x_0 = 0$ und den Koeffizienten $a_n = \frac{3^{n+2}}{2^n}$. Der Konvergenzradius R ist:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{3^{n+2}}{2^n}}{\frac{3^{n+3}}{2^{n+1}}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{3^{n+2}2^{n+1}}{2^n 3^{n+3}} \right| = \frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 3} = \frac{2}{3}$$

Das heißt die Reihe konvergiert für alle x ∈ $(x_0 - R, x_0 + R)$. In unserem Fall also für alle x ∈ $(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$

Schlussendlich müssen wir noch die Randpunkte des Konvergenzintervalls prüfen.

Für $x = \frac{2}{3}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+2}}{2^n} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+2}}{2^n} \cdot \frac{2^n}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 3^2 = \sum_{n=1}^{\infty} 9 = \infty \qquad \left(= \sum_{n=1}^{m} 9m \right)$$

ist die Reihe divergent. Für $x = -\frac{2}{3}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+2}}{2^n} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+2}}{2^n} \cdot \frac{2^n}{3^n} \cdot (-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} 3^2(-1)^n = 9(-1)^n$$

ist die Reihe divergent.

Damit ergibt sich abschließend, dass die Reihe konvergiert, wenn $x \in (\frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$.

14 Punkte

13. Aufgabe:

Bestimmen Sie für $f(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$ das Taylorpolynom 3. Grades im Entwicklungspunkt $x_0 = -1$

Lösung:

Für das Taylorpolynom 3. Grades betrachten wir also die Taylorreihe von f bis $n = 3$.

$$f(x) = \frac{\sin(2x)}{2}$$
$$f'(x) = cos(2x)$$
$$f''(x) = -2sin(2x)$$
$$f'''(x) = -4cos(2x)$$

Durch Einsetzen in die Darstellung des Taylorpolynom erhalten wir nun

$$T_{1,3} = \sum_{n=0}^{3} \frac{f^{(n)}(1)}{n!}$$

Wichtig zur Bestimmung von $f^n(a)$ den Taschenrechner auf Radian umstellen.

$$= \frac{-0{,}455}{1} \cdot 1 + \frac{(-0{,}416)}{1} \cdot (x+1)^1 + \frac{1{,}819}{2} \cdot (x+1)^2 + \frac{1{,}665}{6} \cdot (x+1)^3$$

$$= -0{,}455 - 0{,}416 \cdot (x+1)^1 + 0{,}91 \cdot (x+1)^2 + 0{,}278 \cdot (x+1)^3$$

10 Punkte

Summe **90 Punkte**