

Probeklausur 2 Mathematik 2

Bearbeitungsdauer: 90 Minuten

Es dürfen der DHBW Taschenrechner und zwei DIN A4-Seiten selbstgeschriebene Formelsammlung benutzt werden .

1. Aufgabe:

Sei f ein Polynom dritten Grades. Was stimmt?

- Die dritte Ableitung ist die Nullfunktion.
- Die fünfte Ableitung existiert nicht.
- Die Ableitung f' ist nicht differenzierbar.
- a) bis c) sind alle falsch.

(Fragetyp Einfachwahl)

2 Punkte

2. Aufgabe:

Es sei $f(x) = x^3$ und $g(x) = x + 2$.

Für welche der folgenden Funktionen h gilt $h'(1) = 10$?

- $h(x) = f(g(x))$
- $h(x) = g(f(x))$
- $h(x) = f(x) \cdot g(x)$
- $h(x) = 10x$

(Fragetyp Mehrfachwahl)

4 Punkte

3. Aufgabe:

Warum ist die Betragsfunktion, definiert durch $f(x) = |x|$, an der Stelle $x_0 = 0$ nicht differenzierbar?

- Weil sie dort nicht stetig ist.
- Weil dort der Grenzwert des Differenzenquotienten nicht existiert.
- Unsinn, die Funktion ist dort differenzierbar.

(Fragetyp Einfachwahl)

2 Punkte

4. Aufgabe:

Gesucht ist eine Funktion f mit den folgenden Eigenschaften:

$f(0) = 1$, $f'(1) = 1$, $f''(x) = 6x - 2$

- So eine Funktion kann es nicht geben.
- Es gibt genau eine Funktion mit den gesuchten Eigenschaften.
- Es gibt mehrere Funktionen mit den gesuchten Eigenschaften.

(Fragetyp Einfachwahl)

4 Punkte

5. Aufgabe:

Eine Reihe ist konvergent, wenn die zugehörige Folge eine Nullfolge ist

- Wahr
- Falsch

(Fragetyp Einfachwahl)

2 Punkte

6. Aufgabe:

Wie lautet die Lösung des Integrals $\int_{-1}^1 \frac{t^2 - 1}{t^2} x \, dx$?

- 1
- 0
- 1
- t

(Fragetyp Einfachwahl)

4 Punkte

7. Aufgabe:

Bestimmen Sie jeweils alle Stammfunktionen für die folgende Funktion:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

4 Punkte

8. Aufgabe:

Bestimmen Sie folgende Ableitung:

$$f'(x) \text{ von } f(x) = x^{\ln(x)} \text{ für } x > 0$$

8 Punkte

9. Aufgabe:

Berechnen Sie die folgenden Integrale mit Hilfe der Substitutionsmethode.

a) $\int_0^{0.5} \frac{2x}{x^4 - 2x^2 + 1} dx$

b) $\int_2^4 \frac{x}{x^2 - 1} dx$

10 (5+5) Punkte

10. Aufgabe:

Berechnen Sie die folgenden Integrale mit Hilfe der Produktregel.

a) $\int_{-1}^1 (x \cdot e^{2x}) dx$

b) $\int_1^3 (\ln(x))^2 dx$

16 (8+8) Punkte

11. Aufgabe:

Berechnen Sie folgendes Dreifachintegral:

$$\int_{x=0}^3 \int_{y=0}^2 \int_{z=0}^{3-x} \frac{1}{(x+y+z+1)^3} dz dy dx$$

10 Punkte

12. Aufgabe:

Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihe.
Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+2}}{2^n} x^n$$

14 Punkte

13. Aufgabe:

Bestimmen Sie für $f(x) = \frac{1}{2} \sin(2x)$ das Taylorpolynom 3. Grades im Entwicklungspunkt $x_0 = -1$

10 Punkte

Summe

90 Punkte

Mathematik 2: Formelsammlung

Trigonometrie

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x}$$

$$\sin^2 x = \frac{\tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$$

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\sin(-x) = -\sin(x)$$

$$\sin(\pi - x) = \sin(x)$$

$$\sin(\pi + x) = -\sin(x)$$

$$\cos(-x) = \cos(x)$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos(x)$$

$$\cos(\pi + x) = -\cos(x)$$

$$\tan(-x) = -\tan(x)$$

$$\tan(\pi - x) = -\tan(x)$$

$$\tan(\pi + x) = \tan(x)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot(x)$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cot(x)$$

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

$$\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$\tan(x - y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$2 \cos^2 x = 1 + \cos 2x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$2 \sin^2 x = 1 - \cos 2x$$

$$\sin 2x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x}$$

$$\cos 2x = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$$

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

$$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$$

$$\cos 3x = -3 \cos x + 4 \cos^3 x$$

$$\sin x + \sin y = 2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\tan x + \tan y = \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y}$$

$$\sin x - \sin y = 2 \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \cos\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

$$\tan x - \tan y = \frac{\sin(x-y)}{\cos x \cos y}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2} [\sin(x+y) + \sin(x-y)]$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2} [\cos(x-y) - \cos(x+y)]$$

Elementare Ableitungen

Funktionsklasse	Funktion $f(x)$	Ableitung $f(x)'$
konstante Funktion	c	0
Potenzfunktion	x^n mit $n \in \mathbb{R}$	$n \cdot x^{n-1}$
Wurzelfunktion	\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
Trigonometrische Funktionen	$\sin(x)$ $\cos(x)$ $\tan(x)$ $\cot(x)$	$\cos(x)$ $-\sin(x)$ $\frac{1}{\cos^2(x)}$ $\frac{1}{-\sin^2(x)}$
Arcusfunktionen	$\arcsin(x)$ $\arccos(x)$ $\arctan(x)$ $\operatorname{arccot}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\frac{1}{1+x^2}$ $-\frac{1}{1+x^2}$
Exponentialfunktionen	e^x a^x	e^x $\ln(a) \cdot a^x$
Logarithmusfunktionen	$\ln(x)$ $\log_a(x)$	$\frac{1}{x}$ $\frac{1}{\ln(a) \cdot x}$

Elementare Stammfunktionen

$$1) \int x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C \quad (p \neq -1)$$

$$2) \int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C$$

$$3) \int e^x dx = e^x + C$$

$$4) \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1)$$

$$5) \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$6) \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$7) \int \tan x dx = -\ln |\cos x| + C$$

$$8) \int \cot x dx = \ln |\sin x| + C$$

$$9) \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int (1 + \tan^2 x) dx = \tan x + C$$

$$10) \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int (1 + \cot^2 x) dx = -\cot x + C$$

$$11) \int \sinh x dx = \int \frac{e^x - e^{-x}}{2} dx = \cosh x + C$$

$$12) \int \cosh x dx = \int \frac{e^x + e^{-x}}{2} dx = \sinh x + C$$

$$13) \int \tanh x dx = \int \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} dx = \ln(\cosh x) + C$$

$$14) \int \coth x dx = \int \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1} dx = \ln |\sinh x| + C$$

$$15) \int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \int (1 - \tanh^2 x) dx = \tanh x + C$$

$$16) \int \frac{dx}{\sinh^2 x} = \int (-1 + \coth^2 x) dx = -\coth x + C$$

$$17) \int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \arctan x + C_1 \\ -\operatorname{arccot} x + C_2 \end{cases} \quad \arctan x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arccot} x$$

$$18) \int \frac{dx}{1-x^2} = \begin{cases} \operatorname{Artanh} x + C_1 & : |x| < 1 & \operatorname{Artanh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \\ \operatorname{Arcoth} x + C_2 & : |x| > 1 & \operatorname{Arcoth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1} \end{cases} \left. \vphantom{\int} \right\} \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right|$$