Mathematik 2 - Probeklausur 1

Bearbeitungsdauer: 90 Minuten

Es dürfen der DHBW Taschenrechner und zwei DIN A4-Seiten selbstgeschriebene Formelsammlung benutzt werden.

1. Aufgabe:

   Welche Aussage ist richtig?

   - ☐ Eine differenzierbare Funkton muss auf ganz $\mathbb{R}$ definiert sein.
   - ☐ Stetige Funktionen sind immer differenzierbar.
   - ☒ Jede differenzierbare Funktion ist stetig.

   (Fragetyp Einfachwahl)

   2 Punkte

2. Aufgabe:

   Wie viele unbestimmte Integrale gibt es zu jeder stetigen Funktion?

   - ☐ genau eines
   - ☒ unendlich viele

   (Fragetyp Einfachwahl)

   2 Punkte

3. Aufgabe:

   Rechenoperationen in den Naturwissenschaften werden durch Einführung der komplexen Zahlen ....

   - ☐ sehr komplex
   - ☐ sehr unübersichtlich
   - ☒ sehr einfach

   (Fragetyp Einfachwahl)

   2 Punkte

4. Aufgabe:

   Beim potenzieren von Potenzen ist es egal, welcher Exponent innerhalb der Klammer und welcher außerhalb der Klammer steht.

   - ☐ Falsch
   - ☒ Richtig

   (Fragetyp Einfachwahl)

   2 Punkte

5. Aufgabe:

   Rationale Zahlen sind...

   - ☐ alle Zahlen
   - ☒ gebrochene Zahlen
   - ☐ imaginäre Zahlen
   - ☐ irrationale Zahlen

   (Fragetyp Einfachwahl)

   2 Punkte

6. Aufgabe:

   Wann verwendet man "dx"?

   - ☐ Bei partiellen Ableitungen
   - ☒ Für Differentiale, also infinitesimal kleine Differenzen (ungleich 0)
   - ☐ Bei konkreten Differenzen z.B. $x_1 - x_0$

   (Fragetyp Einfachwahl)

2 Punkte

7. Aufgabe:

   Nach den Rechenregeln für Logarithmen gilt für die Berechnung des folgenden Terms $\ln(xye^x) = \ln(x) + \ln(y) + x$

   - ☒ richtig
   - ☐ falsch

   (Fragetyp Einfachwahl)

2 Punkte

8. Aufgabe:

   Man bestimme für $f(x) = \begin{cases} x^2 - ax + 9, & \text{für } x < 3 \\ \dfrac{x^2 - a}{x - 2}, & \text{für } x \geq 3 \end{cases}$ $a \in \mathbb{R}$ so, dass f an der Stelle $x_0 = 3$ differenzierbar wird.

10 Punkte

Lösung:

$(x^2 - ax + 9)' = 2x - a$

$\left(\dfrac{x^2 - a}{x - 2}\right)' = \dfrac{a + (x-4)x}{(x-2)^2}$

Gleichsetzen

$2x - a = \dfrac{a + (x-4)x}{(x-2)^2}$

und Einsetzen von $x_0 = 3$ ergibt:

$2 \cdot 3 - a = \dfrac{a + (3-4) \cdot 3}{(3-2)^2}$

$6 - a = a - 3 \quad \Rightarrow \quad a = \dfrac{9}{2}$

9. Aufgabe:

   Für die folgende Exponentialgleichung ist die Lösungsmenge der Variablen x in $\mathbb{R}$ zu berechnen:

   $2^{(x^2 - 5x + 6)} = 8^2$

4 Punkte

Lösung:

$2^{x^2 - 5x + 6} = 8^2 \quad | \lg$

$x^2 - 5x + 6 = \dfrac{\lg 64}{\lg 2}$

$x^2 - 5x + 6 = 6 \quad | -6$

$x^2 - 5x = 0$

$x \cdot (x - 5) = 0$

$x_1 = 0$

$x_2 = 5$

$\underline{\underline{\mathbb{L} = \{0; 5\}}}$

10. Aufgabe:

Bestimmen Sie die Ableitung der impliziten Funktion:
$\boldsymbol{x + y(x) - \cos(x \cdot y(x)) - 0.1 = 0}$

6 Punkte

Lösung:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x + y(x) - \cos(xy) - 0.1\right) = 0$$

$1 + y' - \cos(xy)' - 0 = 0$

Kettenregel: $1 + y' + \sin(xy) \cdot (y + xy') = 0$

Auflösen nach $y'(x)$: $y' = \dfrac{-1 - y \cdot \sin(xy)}{1 + x \cdot \sin(xy)}$

11. Aufgabe:

Bestimmen Sie die folgenden Integrale mit Hilfe der Substitutionsmethode.

a) $\displaystyle\int (3x+5)^{17}\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int \frac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)}}\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_0^1 x \cdot \cos(x^2)\,\mathrm{d}x$

Lösung:

a) Ausmultiplizieren können wir hier nicht mehr, falls wir heute noch fertig werden wollen!

x^{17} könnten wir berechnen, der Term, der uns daran hindert, ist die Summe $3x+5$.

Wir werden also $3x+5$ durch eine neue Variable ersetzen: $z = 3x+5$
Der Integrand ist nun also z^{17}.

Jetzt können wir aber nicht mehr nach x (dx) integrieren! Um nach z integrieren zu können, müssen wir dz ins Spiel bringen.

betrachten: $\boxed{z' = \dfrac{dz}{dx}}$, da z ja von x abhängt. $\Rightarrow$ $\boxed{dx = \dfrac{dz}{z'}}$.

hier: $z' = \frac{dz}{dx} = 3 \;\Rightarrow\; dx = \frac{dz}{3}$

Das Integral sieht nun so aus:

$$\int z^{17}\,\frac{dz}{3} = \frac{1}{3}\int z^{17}\,dz = \frac{1}{3}\cdot\frac{z^{18}}{18} = \frac{1}{54}\cdot(3x+5)^{18} + c$$

$\uparrow$
Rückeinsetzen, sobald Integral fertig ist

b) Wir substituieren:

$$z = \sin x \qquad z' = \frac{dz}{dx} = \cos x \quad\Rightarrow\quad dx = \frac{dz}{\cos x}$$

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{z}}\,\frac{dz}{\cos x} = \int z^{-\frac{1}{2}}\,dz = \frac{z^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = 2 \cdot z^{\frac{1}{2}} = 2 \cdot \sqrt{\sin x} + c$$

Dies geht aber nur dort, wo $\cos x \neq 0$ ist!

c) $\int x \cdot \cos(x^2)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cos(u)\ \mathrm{d}u = \frac{1}{2}\sin(u) + C = \frac{1}{2}\sin(x^2) + C$

Grenzen einsetzen:

$$\left[\frac{\sin(x^2)}{2}\right]_0^1 = \left[\frac{\sin(1)}{2}\right]_0^1 - \left[\frac{\sin(0)}{2}\right]_0^1 \approx 0.4207$$

12 Punkte
(4 + 4 + 4)

12. Aufgabe:

Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung jeweils nach der Variablen x, y und z, den Gradienten sowie Hesse-Matrix der Funktion:

$$f(x, y, z) = \frac{x \cdot z^2}{y}$$

10 Punkte

Lösung:

$$f(x,y,z) = \frac{xz^2}{y}$$

$f_x = \frac{z^2}{y}$ $\qquad f_y = -\frac{xz^2}{y^2}$ $\qquad f_z = \frac{2xz}{y}$

$f_{xx} = 0$ $\qquad f_{yy} = \frac{2xz^2}{y^3}$ $\qquad f_{zz} = \frac{2x}{y}$

$f_{xy} = -\frac{z^2}{y^2}$ $\qquad f_{xz} = \frac{2z}{y}$ $\qquad f_{yz} = -\frac{2xz}{y^2}$

$f_{yx} =$ " $\qquad f_{zx} =$ " $\qquad f_{zy} =$ "

$$\nabla f(x,y,z) = \mathrm{grad}\, f(x,y,z) = \left(\frac{z^2}{y},\ -\frac{xz^2}{y^2},\ \frac{2xz}{y}\right)$$

$$H_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{z^2}{y^2} & \frac{2z}{y} \\ -\frac{z^2}{y^2} & \frac{2xz^2}{y^3} & -\frac{2xz}{y^2} \\ \frac{2z}{y} & -\frac{2xz}{y^2} & \frac{2x}{y} \end{pmatrix}$$

13. Aufgabe:

Berechnen Sie folgendes Dreifachintegral:

$$\int_0^1 \int_x^{3x} \int_0^{xy} xyz \cdot \, dz \, dy \, dx$$

8 Punkte

Lösung:

$$V = \int_0^1 \int_x^{3x} \left[xy \frac{z^2}{2} \right]_{z=0}^{xy} dy \; dx$$

$$V = \int_0^1 \int_x^{3x} \frac{1}{2} x^3 y^3 \; dy \; dx$$

$$V = \int_0^1 \left[\frac{1}{8} x^3 y^4 \right]_{y=x}^{3x} dx$$

$$V = \frac{1}{8} \int_0^1 (81x^7 - x^7) \; dx = 10 \int_0^1 x^7 \; dx$$

$$V = \frac{5}{4} \left[x^8 \right]_0^1 = \frac{5}{4}$$

14. Aufgabe:

Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihe. Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

8 Punkte

Lösung:

Die Potenzreihe hat den Entwicklungsstelle $x_0 = \quad 0$ und den Koeffizienten $a_n = \frac{1}{n^2}$. Der Konvergenzradius R ist:

$$R = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{(n+1)^2}} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{(n+1)^2}{n^2} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{n^2 + 2n + 1}{n^2} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| 1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} \right| = 1$$

Das heißt die Reihe konvergiert für alle x ∈ $(x_0 - R, x_0 + R)$. In unserem Fall also für alle x ∈ $(1, -1)$

Schlussendlich müssen wir noch die Randpunkte des Konvergenzintervalls prüfen. Für $x = 1$ sehen wir, dass

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Die Reihe konvergent ist, da der Exponent größer als eins ist. Für $x = -1$ gilt

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

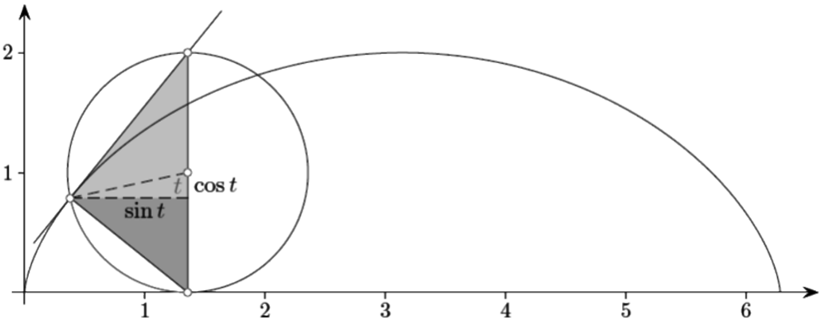
Die Reihe ist ebenso nach dem Leibnitz Kriterium konvergent.

Damit ergibt sich abschließend, dass die Reihe konvergiert, wenn $x \in [1, -1]$.

15. Aufgabe:

Gegeben ist eine Zykloide (Rollkurve eines Kreises) als Funktion in Parameterform mit $r = 1$

$$x = x(t) = r(t - \sin t)$$
$$y = y(t) = r(1 - \cos t)$$



Bestimmen Sie

a) die Ableitung allgemein $y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$

b) die Steigung der Tangenten im Punkt $t = \frac{2\pi}{3}$

6 Punkte (4+2)

Lösung:

a) $x(t) = r(t - \sin t)$ $\quad$ $y(t) = r \cdot (1 - \cos(t))$

$\dot{x}(t) = r(1 - \cos(t))$ $\quad$ $\dot{y}(t) = r \cdot \sin(t)$

b) $$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{r \cdot \sin(t)}{r \cdot (1 - \cos(t))} = \frac{\sin(\frac{2\pi}{3})}{1 - \cos(\frac{2\pi}{3})} = \frac{\sin(120°)}{1 - \cos(120°)} = \frac{\sqrt{3}/2}{3/2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

16. Aufgabe:

Gegeben ist $f(x) = \sqrt[3]{2x + 2}$, $x \geq -1$

Stellen Sie das Taylorpolynom 2. Grades von f mit Entwicklungspunkt $x_0 = 3$ auf.

12 Punkte

Lösung:

Wir benötigen in dieser Aufgabe die folgenden Ableitungen von f:

$$\begin{aligned}
f(x) &= (2x + 2)^{1/3} \\
f'(x) &= \frac{1}{3}(2x + 2)^{-2/3} \cdot 2 = \frac{2}{3}(2x + 2)^{-2/3} \\
f''(x) &= \frac{2}{3}(-\frac{2}{3})(2x + 2)^{-5/3} \cdot 2 = -\frac{8}{9}(2x + 2)^{-5/3} \\
f'''(x) &= -\frac{8}{9}(-\frac{5}{3})(2x + 2)^{-8/3} \cdot 2 = \frac{80}{27}(2x + 2)^{-8/3}
\end{aligned}$$

(a) Das Taylorpolynom zweiten Grades an $x_0 = 3$ wird angegeben durch

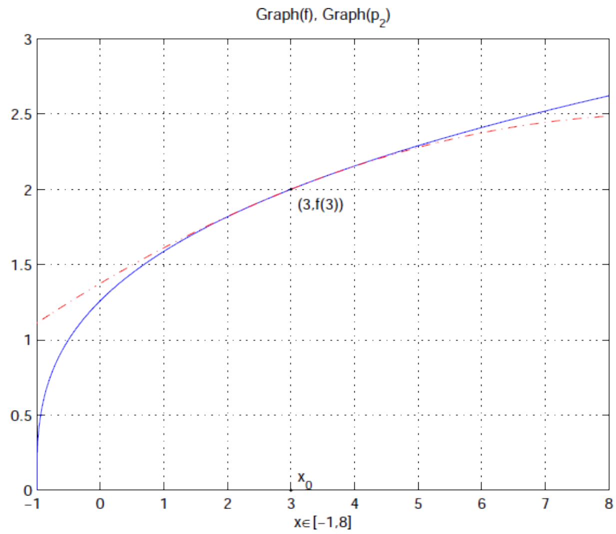
$$p_2(x) = \sum_{k=0}^{2} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2$$

Wir werten die Funktion und die benötigten Ableitungen an $x_0 = 3$ aus:

$$f(3) = \sqrt[3]{8} = 2 \qquad f'(3) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{8}}\right)^2 = \frac{2}{3 \cdot 4} = \frac{1}{6} \qquad f''(3) = -\frac{8}{9}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{8}}\right)^5 = -\frac{8}{9 \cdot 32} = -\frac{1}{36}$$

Damit erhalten wir das Polynom

$$p_2(x) = 2 + \frac{1}{6}(x - 3) - \frac{1}{72}(x - 3)^2 .$$



Summe **90 Punkte**