Totales Differential

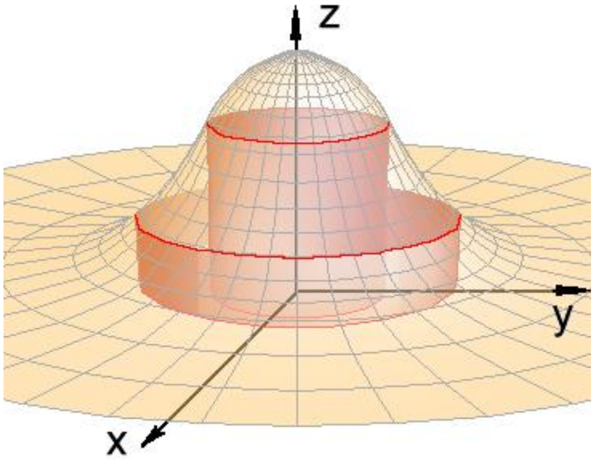
Gegeben: Funktion zweier Variabler. **Beispiel:** $z = \frac{1}{1+x^2+y^2}$

Diese Funktion stellt eine Fläche im Raum dar.

Gesucht seien Linien gleicher Höhe sowie deren Projektionen auf die x-y-Ebene (Höhenlinien)

Linien gleicher Höhe werden beschrieben mit:

$$z_i = \frac{1}{1+x^2+y^2} = const.$$



Die Projektion dieser **Linien gleicher Höhe** sind die **Höhenlinien**, wie sie z.B. aus Landkarten bekannt sind.

Die Beschreibung der Höhenlinien in der x-y-Ebene erfolgt durch Umstellen der Ausgangsgleichung für konstante z_i.

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{z_i} - 1$$

Betrachten wir identische Höhendifferenzen, dann liegen die dazugehörigen Höhenlinien dort am dichtesten, wo der Funktions-„Berg“ am steilsten ist.

Suchen wir nun die **Richtung des steilsten Abfalls** unserer Fläche $z = \frac{1}{1+x^2+y^2}$

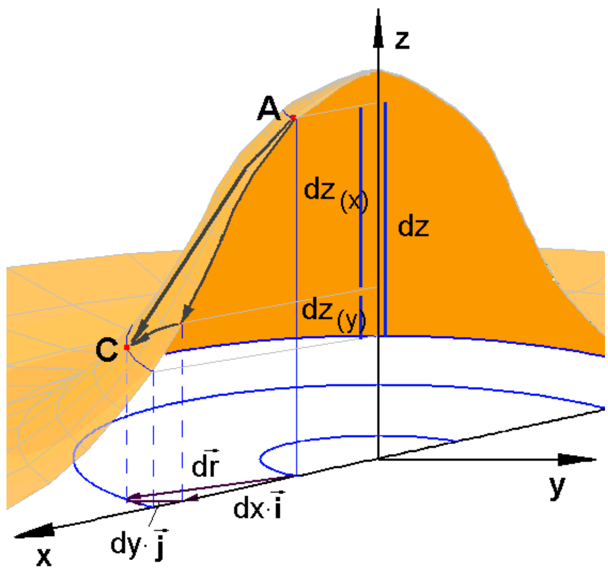
Betrachten wir dazu einen beliebigen Schritt $d\vec{r}$, in der $x - y$-Ebene.

Wie verändert sich $z = f(x, y)$ beim Voranschreiten um

$$d\vec{r} = (dx, dy) = dx \cdot \vec{i} + dy \cdot \vec{j} \ ?$$

Dazu zerlegen wir den Schritt in 2 Teile:

Teilschritt 1 - entlang x,
Teilschritt 2 - entlang y.



Teilschritt 1:

Beim Voranschreiten in x-Richtung um den Betrag dx bewegen wir uns in einer Schnittfläche der Funktion mit $y = y_0$
(siehe auch Script „Partielle Ableitung"). Im Bild wurde $y_0 = 0$ gewählt.

Bei kleinen Schritten lässt sich die Änderung der Funktion näherungsweise durch das Differential beschreiben: $dz_{(x)} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} dx$

Da wir bei der Betrachtung von einem <u>konstanten</u> y ausgegangen sind, wird die Änderung der Funktion bei einem Fortschreiten in x-Richtung mittels der partiellen Ableitung nach x beschrieben!

Teilschritt 2:

Beim Voranschreiten in y-Richtung um den Betrag dy bewegen wir uns in einer Schnittfläche der Funktion mit $x = x_0$ parallel zur y-Achse.

Bei kleinen Schritten lässt sich die Änderung der Funktion näherungsweise durch das Differential beschreiben: $dz_{(y)} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} dy$

Da wir bei der Betrachtung von einem <u>konstanten</u> x ausgegangen sind, wird die Änderung der Funktion bei einem Fortschreiten in y Richtung mittels der partiellen Ableitung nach y beschrieben!

Die **Gesamtänderung** von z ergibt sich als Summe der beiden Teiländerungen.

Sie heißt ***totales Differential*** $dz = dz_{(x)} + dz_{(y)} = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$

und ist ein Maß für die Änderung von z beim Voranschreiten um $d\vec{r}$.

Das **totale Differential** der Funktion $z = f(x, y)$ ist die Größe $dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$.

Das totale Differential ist ein Maß für die Veränderung der Funktion $z = f(x, y)$, wenn wir im Punkt $A = (x, y)$ ein Stück in die Richtung $d\vec{r} = (dx, dy)$ gehen.

Beispiel: Funktion: $z = x^2 + y^2$

totales Differential: $dz = 2xdx + 2ydy$

Beispiel: Funktion: $f(x,y) = \dfrac{1}{1 + x^2 + y^2}$

totales Differential: $dz = \dfrac{-2x}{(1 + x^2 + y^2)^2} dx + \dfrac{-2y}{(1 + x^2 + y^2)^2} dy$

Verallgemeinerung auf Funktionen dreier Variablen:

Im Falle einer Funktion $f = f(x,y,z)$ wird das totale Differential ausgedrückt durch:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

Auch hier ist das totale Differential ein Maß für die Änderung der Funktion $f(x,y,z)$.
Bewegt man sich um $d\vec{r} = (dx, dy, dz)$ ändert sich die Funktion um den durch das totale Differential gegebenen Wert.

Beispiel: Funktion: $f(x,y,z) = x \cdot y \cdot z$

totales Differential: $df = yz \cdot dx + xz \cdot dy + xy \cdot dz$