



- Skript -

Studiengang Wirtschaftsingenieurwesen

Prof. Dr.-Ing. Stephan Sauter

Q2 2025



Inhaltsverzeichnis

Vorwort	1
1 Wiederholung	2
1.1 Zahlenräume	2
1.2 Komplexe Zahlen	2
1.3 Potenzrechnung	5
1.4 Wurzelrechnen	5
1.5 Grenzwerte	6
2 Differentialrechnung für Funktionen einer Variablen	7
2.1 Definitionen	8
2.1.1 Zusammenhang mit Stetigkeit	9
2.1.2 Geometrische Deutung	9
2.2 Ableitung elementarer Funktionen	10
2.3 Ableitungsregeln	11
2.3.1 Übungsbeispiele	12
2.4 Implizite Differentiation	12
2.4.1 Definition	12
2.5 Logarithmische Ableitung	13
2.6 Ableitung der Umkehrfunktion	14
2.7 Ableitung einer in Parameterform dargestellten Funktion	16
2.8 Regel von l'Hospital	17
2.9 Höhere Ableitungen	18
2.10 Charakteristische Funktionspunkte und Eigenschaften	18
2.10.1 Monotonie	18
2.10.2 Krümmung	19
2.10.3 Extremwerte	20
2.10.4 Wendepunkte	22
2.10.5 Sattelpunkte	22
2.10.6 Kurvendiskussion	24
3 Integralrechnung für Funktionen einer Variablen	25
3.1 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	25
3.1.1 Definitionen	25
3.1.2 Hauptsatz	26
3.2 Beispiele von Stammfunktionen	26
3.3 Integrationsmethoden	28
3.3.1 Substitutionsmethode	28
3.3.2 Produktintegration / Partielle Integration	30
3.3.3 Integration gebrochen rationaler Funktionen	31
3.4 Uneigentliche Integrale	33

4	Funktionen mehrerer Variablen	34
4.1	Funktionen von zwei Variablen	34
4.2	Funktionen von n Variablen	35
4.3	Darstellungsformen von Funktionen von mehreren Variablen	35
4.3.1	Explizite Darstellung	35
4.3.2	Implizite Darstellung	35
4.3.3	Graphische Darstellung von Funktionen $z = f(x, y)$	36
4.4	Differentiation	38
4.4.1	Partielle Ableitung 1. Ordnung	38
4.4.2	Partielle Ableitung 2. Ordnung	39
4.4.3	Gradient	40
4.4.4	Richtungsableitung	42
4.4.5	Vollständiges Differential	43
4.4.6	Lokale Extremwerte von $f(x, y)$	44
4.5	Mehrfachintegrale	45
4.5.1	Doppelintegrale	45
4.5.2	Doppelintegrale in Polarkoordinaten	46
4.5.3	Flächeninhalt	48
4.5.4	Schwerpunkt einer Fläche	49
4.5.5	Dreifachintegrale	50
4.5.6	Dreifachintegral in Zylinderkoordinaten	51
4.5.7	Volumen und Masse eines Körpers	51
4.5.8	Schwerpunkt eines Körpers	52
4.5.9	Massenträgheitsmoment	52
4.6	Kurvenintegral	53
5	Potenzreihen, Taylorreihen	55
5.1	Motivation	55
5.2	Reihen	55
5.2.1	Definitionen	55
5.2.2	Geometrische Reihen	56
5.2.3	Konvergenzkriterien für Reihen	57
5.3	Potenzreihen	59
5.3.1	Definition	59
5.3.2	Konvergenzbereich	60
5.3.3	Eigenschaften	63
5.4	Taylor-Reihen	66
5.4.1	Taylorpolynome	66
5.4.2	Taylorreihen	69
6	Differentialgleichungen	70
6.1	Motivation	70
6.2	Definitionen	71
6.2.1	Ordnung einer DGL	72
6.2.2	Explizite, implizite DGL	72
6.2.3	Anfangswertproblem, Randwertproblem	72
6.3	DGL 1. Ordnung	73
6.3.1	Methode der Trennung der Veränderlichen	73
6.4	Lineare DGL	75
6.4.1	Lineare DGL 1. Ordnung	75
6.4.2	Lineare DGL 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten	77
6.4.3	Lineare DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten	78

7	Fourier-Reihen	83
7.1	Motivation	83
7.2	Periodische Funktionen	83
7.2.1	Definition: periodische Funktion	83
7.2.2	Beispiele periodischer Funktionen	83
7.3	Definition der Fourierreihe	85
7.3.1	Fragestellung	85
7.3.2	Satz von Fourier	86
7.3.3	Hilfsmittel	88
7.3.4	Herleitung der Fourier-Koeffizienten	89
7.3.5	Bemerkungen	92
7.4	Komplexe Darstellung der Fourierreihe	93
7.5	Fourier-Transformation	94
7.5.1	Fourierintegral	94
7.5.2	Definition der Fourier-Transformation	95
7.5.3	Regeln für die Fourier-Transformation	97
7.6	Anwendungen	98
8	Hyperbelfunktionen	99
8.1	Motivation	99
8.2	Allgemeine Hyperbelfunktion	100
8.3	Kosinus Hyperbolicus	100
8.4	Sinus Hyperbolicus	101
8.5	Tangens Hyperbolicus	102
8.6	Cotangens Hyperbolicus	102
8.7	Ableitungen	103
8.8	Zusammenhang zu trigonometrischen Funktionen	103
8.9	Umkehrfunktionen	104
8.10	Geometrische Deutung	105
8.11	Erweiterung auf komplexe Zahlen	105

Vorwort

Das vorliegende Skript soll vorlesungsbegleitend dem Hörer das Abzeichnen bzw. Abschreiben der Inhalte ersparen. Falls eine Vorlesungsstunde versäumt wurde, kann der Hörer anhand des Skriptes erkennen, welcher Stoff z.B. mit einem Buch nachgeholt werden sollte.

Bei allen Betrachtungen steht eine anschauliche Darstellung im Vordergrund. Es soll versucht werden, dem Leser Hinweise zu geben, die ihm bei der Lösung der anstehenden Problemstellungen nützlich sind.

Insbesondere wird darauf hingewiesen, dass für die Prüfung das selbständige Lösen der Übungsaufgaben nicht nur empfohlen, sondern vorausgesetzt wird!

Vorlesungsinhalt:

- L. Papula: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Band 2, Verlag Vieweg



- Bronstein u.a.: Taschenbuch der Mathematik, Edition Harri Deutsch



- Wilhelm Leupold u.a. : Mathematik - ein Studienbuch für Ingenieure, Band 2, Carl Hanser Verlag
- Fetzner, Fränkel: Mathematik 2, Springer Verlag
- B. Neumayer, S. Kaup: Mathematik für Ingenieure 2, Shaker Verlag Aachen

Links:

- www.wolframalpha.com

Musterlösungen für die Übungsaufgaben, Formelsammlungen und Skript:

- www.Freiwilligschlauwerden.de



KAPITEL 1

Wiederholung

1.1 Zahlenräume

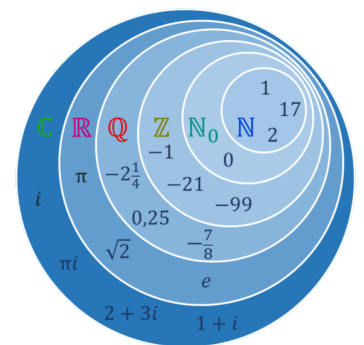
Als Zahlenbereiche sieht man Zahlenmengen an, deren Elemente gemeinsame Eigenschaften haben. Dabei beziehen sich diese Eigenschaften meist auf die Durchführbarkeit gewisser (arithmetischer) Operationen innerhalb des Zahlenbereiches.

Im Laufe der Geschichte der Mathematik wurden immer weitere Zahlbereiche eingeführt, um gegenüber bisherigen Zahlbereichen bestimmte Probleme allgemeiner behandeln zu können.

Insbesondere wurden bestehende Zahlbereiche durch Hinzufügen zusätzlicher Elemente zu neuen Zahlbereichen erweitert, um die beschränkte Ausführbarkeit von Operationen zu überwinden.

Die wichtigsten Zahlbereiche:

$\mathbb{N}$	Natürliche Zahlen	ganze positive Zahlen
$\mathbb{N}_0$	Natürliche Zahlen	ganze positive Zahlen inklusive 0
$\mathbb{Z}$	Ganze Zahlen	alle ganzen Zahlen
$\mathbb{Q}$	Rationale Zahlen	gebrochene Zahlen und ganze Zahlen gemeinsam
$\mathbb{R}$	Reelle Zahlen	irrationale und rationale Zahlen gemeinsam
$\mathbb{C}$	Komplexe Zahlen	erweitern den Zahlenbereich von $\mathbb{R}$ derart, dass die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ lösbar wird ($i^2 = -1$).



1.2 Komplexe Zahlen

Bereits 1545 erkannte der italienische Mathematiker Gerolamo Cardano beim Lösen von Gleichungen 2. Grades, dass es beim Radizieren Probleme in unserem Zahlensystem gibt. In einigen Fällen traten Lösungen auf, die es in Cardanos Augen nicht geben konnte. Sie konnten also nur imaginär (eingebildet) sein.

Andere Quellen sehen den Ursprung der Theorie der komplexen Zahlen mit dem 1572 erschienenen Werk „L'Algebra“ des Italieners Raffaele Bombelli.

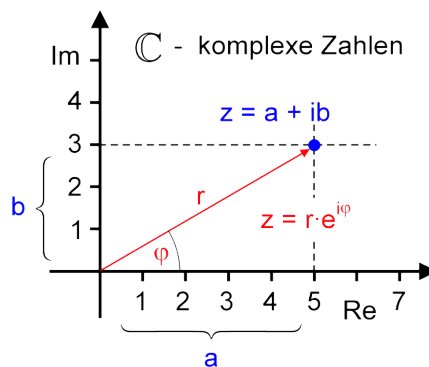
Wer auch immer - letztendlich ging es darum, den Zahlenbereich derart zu erweitern, dass auch Wurzeln negativer Zahlen berechnet werden können. Dies gelang durch Einführung einer Zahl i als Lösung der Gleichung $x^2 = -1$.

Die Zahl i wurde von Euler vorgeschlagen und wird als **imaginäre Einheit** bezeichnet.

Wo aber bringt man diese Zahlen in der grafischen Darstellung unter?

Unsere Zahlengerade war ja bereits voll! Die nahe liegende Möglichkeit ist ein Ausweichen von der eindimensionalen Geraden zur zweidimensionalen Fläche.

Dort gibt es neben der Abszisse, die man für die reellen Zahlen verwenden kann, auch noch die Ordinate, auf der sich die imaginären Zahlen unterbringen lassen.



Komplexe Zahlen werden üblicherweise in der Form $a + bi$ dargestellt, wobei a und b reelle Zahlen sind und i die imaginäre Einheit.

Mit derart dargestellten komplexen Zahlen lässt es sich ähnlich wie mit Vektoren rechnen. Die Komponenten liegen entlang der reellen bzw. der imaginären Achse. Man nennt a den Realteil und b den Imaginärteil von $a + bi$.

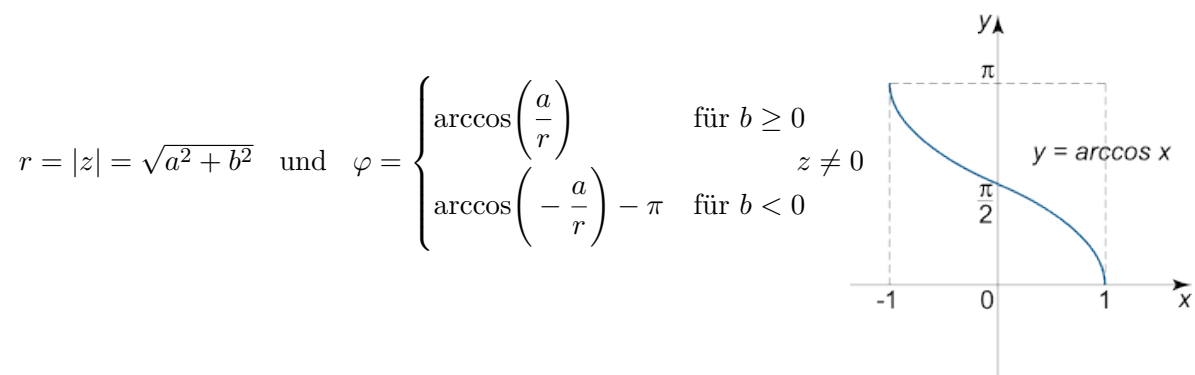
Notation komplexer Zahlen:

Es existieren zwei verschiedene Darstellungsvarianten komplexer Zahlen:

- Kartesische oder algebraische Form: $z = a + bi$
- Polarform (trigonometrische Form) und Exponentialform: $z = r \cdot e^{i\varphi} = r \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)$

Eine Umrechnung in die kartesische Form ergibt: $a = r \cdot \cos\varphi$ und $b = r \cdot \sin\varphi$.

Eine Umrechnung der kartesischen in die Polarform ergibt:



Rechenregeln:• **Addition / Subtraktion:**

$$(a + bi) \pm (c + di) = (a \pm c) + (b \pm d)i$$

• **Multiplikation:**

$$(a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + cbi + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

$$(r_1 \cdot e^{i\varphi_1}) \cdot (r_2 \cdot e^{i\varphi_2}) = (r_1 \cdot r_2) \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

• **Division:**

mit $(c + di)(c - di) = c^2 - i^2 d^2 = c^2 + d^2$ folgt:

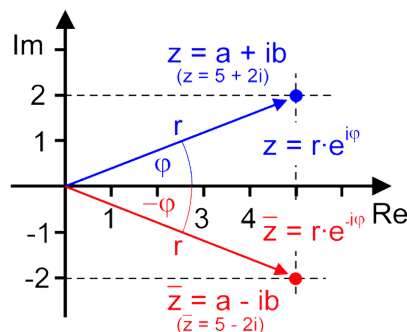
$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \cdot i$$

$$\frac{r_1 \cdot e^{i\varphi_1}}{r_2 \cdot e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

• **Komplexe Konjugation:**

Man nennt die Zahl $\bar{z} = a - ib$ **konjugiert komplex** zur Zahl $z = a + ib$.

In der Polarform hat die komplex konjugierte Zahl $\bar{z}$ bei gleichem Betrag r gerade den negativen Winkel von z

• **Reziprokwert einer komplexen Zahl:**

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{a + bi} = \frac{a - bi}{(a + bi)(a - bi)} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i$$

• **Potenzieren:**

$$z^n = r^n \cdot e^{in\varphi} = r^n \cdot (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

$$(e^{i\varphi})^n = e^{ni\varphi}$$

Komplexe Zahlen und ihre Anwendung:

Es hat sich gezeigt, dass komplexe Zahlen tiefer in der Natur und auch in der Mathematik verankert sind, als man zur Zeit ihrer Entdeckung ahnen konnte. Das Rechnen mit diesen „eingebildeten“ Zahlen liefert sehr häufig Ergebnisse, die anders nicht zu erreichen sind.

nicht sichtbar

Der Begriff „imaginär“ oder „eingebildet“ für den Zahlenbereich hat sich damit eigentlich als falsch erwiesen, wird aber historisch bedingt beibehalten.

1.3 Potenzrechnung

Definition:

a^n heißt **Potenz** und bedeutet, dass die Basis a n -mal mit sich selbst multipliziert wird. n heißt Exponent.

Regel: Potenzrechnung vor Punktrechnung vor Strichrechnung

Rechenregeln:

Addition und Subtraktion:

Es können nur Potenzen mit gleicher Basis und gleichem Exponenten addiert bzw. subtrahiert werden.

Multiplikation und Division von Potenzen mit gleicher Basis:

1. Potenzgesetz: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
2. Potenzgesetz: $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

Multiplikation und Division von Potenzen mit gleichem Exponenten:

3. Potenzgesetz: $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$
4. Potenzgesetz: $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

Potenzieren von Potenzen:

5. Potenzgesetz: $(a^m)^n = a^{m \cdot n} = (a^n)^m$

1.4 Wurzelrechnung

Alle Wurzeln lassen sich als Potenzen mit gebrochenen Exponenten schreiben. Dabei stimmt der Zähler des Exponenten mit dem Exponenten des Radikanden und der Nenner des Exponenten mit dem Wurzelexponenten überein.

Umgekehrt lässt sich auch jede Potenz mit gebrochenem Exponenten als Wurzel schreiben:

$$b^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{b^m} = \left(\sqrt[n]{b}\right)^m \quad b \geq 0$$

Für die Wurzelrechnung sind keine neuen Rechengesetze erforderlich, weil sich jede Wurzel als Potenz mit einem gebrochenen Exponenten schreiben lässt und damit die Potenzgesetze auch für Wurzeln gelten.

Pause bis 10:00

1.5 Grenzwerte

Es seien f, g Funktionen mit $D_f = D_g \subset \mathbb{R}$, so dass $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ und $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ existieren und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

1. Faktorregel

$$\lim_{x \rightarrow a} (\alpha \cdot f(x)) = \alpha \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

2. Summenregel

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

3. Produktregel

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

4. Quotientenregel

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}, \text{ falls } \lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$$

Aufgaben:

Bestimmen Sie, falls möglich, die folgenden Grenzwerte:

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 5}{2x^2 + 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cancel{x^2}(3 - \frac{5}{x^2})}{\cancel{x^2}(2 + \frac{4}{x^2})} = \frac{3}{2}$$

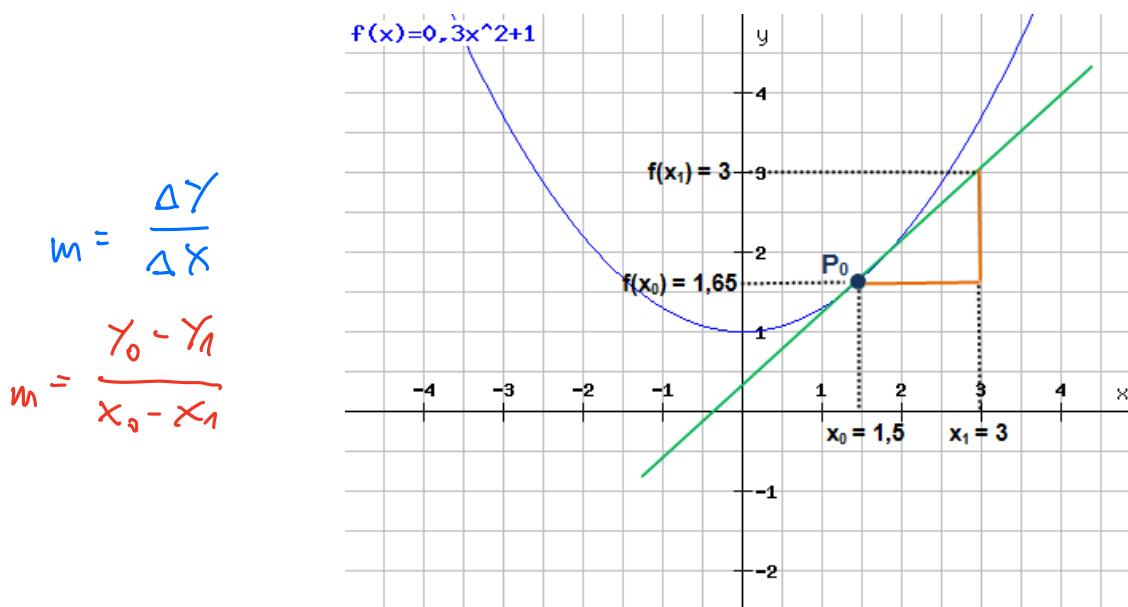
$$2. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+1)\cancel{(x-3)}}{\cancel{x-3}} = \lim_{x \rightarrow 3} x + 1 = 3 + 1 = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x - 2}{1} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{6 - 2}{1} = 4$$

KAPITEL 2

Differentialrechnung für Funktionen einer Variablen

Problemstellung: Tangente an einen Funktionsgraphen



Tangente an die Funktion $y = 0.3 \cdot x^2 + 1$ im Punkt (P_0)

Bei einer linearen Funktion bzw. einer Geraden

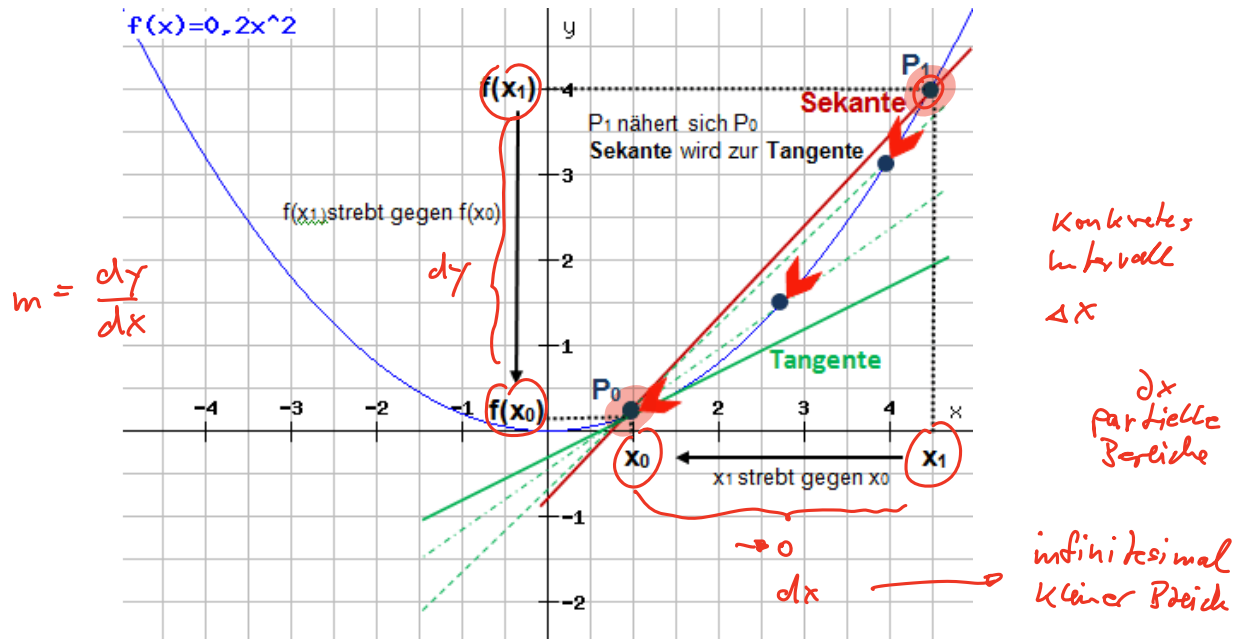
$$g(x) = mx + c \quad (2.1)$$

heißt m die Steigung und c der y -Achsen-Abschnitt oder Ordinatenabschnitt der Geraden. Hat man nur 2 Punkte (x_0, y_0) und (x_1, y_1) auf einer Geraden, so kann die Steigung berechnet werden durch

$$m = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1} \quad (2.2)$$

Bei nicht linearen Funktionen wie z.B. $f(x) = x^2$ kann die Steigung so nicht mehr berechnet werden, da diese eine Kurve beschreiben und somit keine Gerade ist. Jedoch kann man an einen Punkt $(x_0, f(x_0))$ eine Tangente legen, die wieder eine Gerade darstellt.

Die Frage ist nun, wie man die Steigung einer solchen Tangente an einer Stelle x_0 berechnen kann. Wählt man jetzt eine Stelle x_1 ganz nahe bei x_0 und legt eine Gerade durch die Punkte $(x_0, f(x_0))$ und $(x_1, f(x_1))$, so ist die Steigung dieser Sekante nahezu die Steigung der Tangente.



Die Sekante schmiegt sich immer weiter an den Funktionsgraphen an, bis der Punkt P_1 auf P_0 trifft. x_1 strebt gegen x_0 und $f(x_1)$ gegen $f(x_0)$. Dann gibt es keine Sekante mehr (die durch zwei Punkte geht). Die Sekante ist zur Tangente geworden.

2.1 Definitionen

Definition Differenzenquotient:

Der Differenzenquotient einer Funktion f an der Stelle x_0 ist

$$m = \frac{dy}{dx} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0 \rightarrow x_1} \quad (2.3)$$

Definition Differenzierbarkeit:

f sei eine Funktion, die auf einem offenen Intervall $\mathbb{D} =]a; b[$ definiert ist. f heißt dann an der Stelle $x_0 \in \mathbb{D}$ differenzierbar, wenn der Grenzwert des Differenzenquotienten

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad (2.4)$$

existiert. Man bezeichnet ihn als die (erste) Ableitung von f an der Stelle x_0 , gekennzeichnet durch das Symbol $f'(x_0)$

Definition differenzierbare Funktion:

Eine Funktion $y = f(x)$ heißt differenzierbar, wenn sie an jeder Stelle ihres Definitionsbereiches differenzierbar ist.

$$y = f(x)$$

$$y(x) = f(x)$$

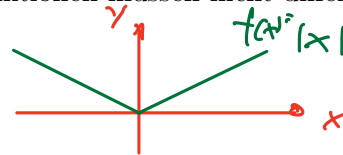
Die Ableitung von f an **jeder** Stelle von $\mathbb{D}$ heißt Ableitungsfunktion oder kurz **Ableitung** von f :

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy(x)}{dx} \quad (2.5)$$

mit $\frac{d}{dx}$ dem sogenannten **Differentialoperator** (gesprochen: "d nach dx").

2.1.1 Zusammenhang mit Stetigkeit

Jede differenzierbare Funktion ist stetig. Stetige Funktionen müssen nicht differenzierbar sein, vgl. $f(x) = |x|$

**2.1.2 Geometrische Deutung**

Eine differenzierbare Funktion zeichnet sich dadurch aus, dass ihr Graph keinen "Knick" aufweist.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x$$

Beispiele:

1. Ableitung der Funktion $y = x^2 = f(x) = x^2$

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f'(x) = 2x$$

2. Ableitung der Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ für $x > 0$

$$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

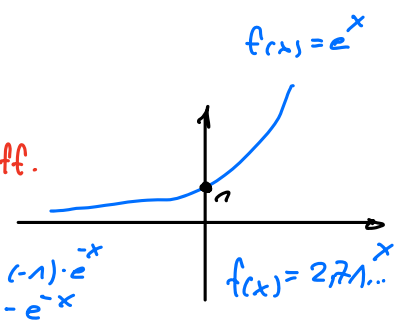
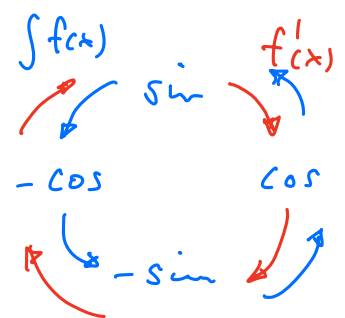
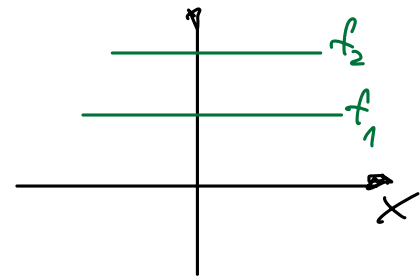
vgl. „konjugiert komplex“
bei imaginären
Zahlen....

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x})(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})}{\Delta x(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ \Rightarrow f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$f(x) = 2 \Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{2 - 2}{\Delta x} = 0$$

2.2 Ableitung elementarer Funktionen

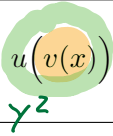
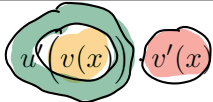
Funktionsklasse	Funktion $f(x)$	Ableitung $f'(x)$
konstante Funktion	c	0
Potenzfunktion	x^n mit $n \in \mathbb{R}$	$n \cdot x^{n-1}$
Wurzelfunktion	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
Trigonometrische Funktionen	$\sin(x)$	$\cos(x)$
	$\cos(x)$	$-\sin(x)$
	$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$
	$\cot(x)$	$-\frac{1}{\sin^2(x)}$
Arcusfunktionen (Umkehrfunktion)	$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
	$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
	$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
	$\operatorname{arccot}(x)$	$-\frac{1}{1+x^2}$
Exponentialfunktionen	e^x	e^x
	a^x	$\ln(a) \cdot a^x$
Logarithmusfunktionen	$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
	$\log_a(x)$	$\frac{1}{\ln(a) \cdot x}$
Hyperbelfunktionen	$\sinh(x)$	$\cosh(x)$
	$\cosh(x)$	$\sinh(x)$
	$\tanh(x)$	$\frac{1}{\cosh^2(x)}$
	$\coth(x)$	$-\frac{1}{\sinh^2(x)}$



Funktionsklasse	Funktion $f(x)$	Ableitung $f'(x)$
Areafunktionen (Umkehrfunktion)	$\operatorname{arsinh}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$
	$\operatorname{arcosh}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$
	$\operatorname{artanh}(x)$	$\frac{1}{1 - x^2}$ für $ x < 1$
	$\operatorname{arcoth}(x)$	$\frac{1}{1 - x^2}$ für $ x > 1$

2.3 Ableitungsregeln

Pause bis 10:15

Name	Voraussetzung	Funktion $f(x)$	Ableitung $f'(x)'$
Potenzregel		x^n	$n \cdot x^{n-1}$
Faktorregel	C konstant $f(x)$ diff.bar	$C \bullet f(x)$	$C \bullet f'(x)$
Summenregel	$f_1 \dots f_n$ diff.bar	$f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)$	$f'_1(x) + f'_2(x) + \dots + f'_n(x)$
Produktregel	u, v diff.bar	$u(x) \cdot v(x)$	$u'(x) \cdot v(x) + v'(x) \cdot u(x)$
erw. Produktregel	u, v, w diff.bar	$u(x) \cdot v(x) \cdot w(x)$	$u'vw + uv'w + uvw'$
Quotientenregel	u, v diff.bar x mit $v(x) \neq 0$	$\frac{u(x)}{v(x)}$	$\frac{u'(x) \cdot v(x) - v'(x) \cdot u(x)}{v^2(x)}$
Kettenregel	u, v diff.bar		
erw. Kettenregel	u, v, w diff.bar $f(x)$ diff.bar	$u\left(v\left(w(x)\right)\right)$	$u'\left(v\left(w(x)\right)\right) \cdot v'\left(w(x)\right) \cdot w'(x)$

2.3.1 Übungsbeispiele

1. $y = x^{3/2} \Rightarrow y'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1} = \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-\frac{2}{2}} = \frac{3}{2}x^{1/2} = \frac{3\sqrt{x}}{2}$ Potenzregel
2. $y = x^{2/3} \Rightarrow y'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ Quotientenregel
3. $y = \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow y'(x) = -\frac{1}{2x^{3/2}} = -\frac{1}{2} \cdot x^{-3/2} = -0,5 \cdot x^{-1/2} \cdot x^{-2/2} = -0,5 \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot x^{-1} = -\frac{1}{2\sqrt{x} \cdot x}$
4. $y = 4x^7 + 3 \cdot \cos(x) - 5e^x + \ln(x) \Rightarrow y'(x) = 28x^6 - 3\sin(x) - 5e^x + \frac{1}{x}$ (Summenregel)
5. $y = 4 \cdot \arctan(x) - 2 \cdot \arccos(x) + 10 \cdot \cosh(x) + 3x$
 $\Rightarrow y'(x) = \frac{4}{x^2+1} + \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} + 10 \cdot \sinh(x) + 3$ (Summenregel)
6. $y = (4x^3 - 3x) \cdot (2e^x - \sin(x))$
 $\Rightarrow y'(x) = (4x^3 - 3x)(2e^x - \cos(x)) + (12x^2 - 3)(2e^x - \sin(x))$ (Produktregel)
7. $y = \arctan(x) \cdot \ln(x) \Rightarrow y'(x) = \frac{\ln(x)}{x^2+1} + \frac{\tan^{-1}(x)}{x}$ (Produktregel)
8. $y = 5x^3 \cdot \sin(x) \cdot e^x \Rightarrow y'(x) = 5e^x \cdot x^2((x+3)\sin(x) + x\cos(x))$ (Produktregel)
9. $y = \frac{x^2 - 4x + 5}{2x^2 - 4x + 1} \Rightarrow \dots y'(x) = \frac{4x^2 - 18x + 16}{(2x^2 - 4x + 1)^2}$ (Quotientenregel)
10. $y = \frac{\ln(x) + x}{e^x} \Rightarrow y'(x) = e^{-x} \left(\frac{1}{x} - x - \ln(x) + 1 \right)$ (Quotientenregel)

$$(e^{-x})' = -e^{-x}$$

2.4 Implizite Differentiation

Unter einer impliziten Differentiation versteht man die Ableitung einer implizit gegebenen Funktion $F(x, y) = 0$.

Manchmal kann man diese Funktion zwar explizit nach y auflösen und dann ableiten, jedoch gelingt dies nicht immer oder ist nur mit großem Aufwand zu erreichen.

Einfacher und vielfach auch hilfreich ist die Anwendung der impliziten Differentiation.

Pause bis 11:

2.4.1 Definition

Ist eine Funktionsgleichung implizit gegeben, so kann die Ableitung der Funktion y nach der Variablen x durch gliedweise Differentiation der impliziten Funktionsgleichung nach x gewonnen werden.

Dabei ist zu berücksichtigen, dass die Variable y eine von x abhängige Größe darstellt.

$$2 \cdot 3 \cdot y(x)^2 \cdot y'(x) + 6 \cdot 3 \cdot x^2 - 24 + 6 \cdot y'(x) = 0$$



$$2y^3 + 6x^3 - 24x + 6y = 0$$

Beispiele:

1. Die Funktionsgleichung für $y(x)$ sei: $2y^3(x) + 6x^3 - 24x + 6y(x) = 0$.

Diese Gleichung kann man implizit ableiten, Kettenregel + Summenregel:

$$6y^2(x) \cdot y'(x) + 18x^2 - 24 + 6y'(x) = 0$$

$$\Rightarrow y'(x)(6y^2(x) + 6) = 24 - 18x^2$$

$$\Rightarrow y'(x) = \frac{24 - 18x^2}{6y^2(x) + 6}$$

$$\Rightarrow y'(x) = \frac{4 - 3x^2}{y^2(x) + 1}$$

2. $y \cdot e^x + \sin(y) = 0$

Produktregel + Kettenregel:

$$e^x y + e^x y' + \cos(y) y' = 0$$

$$y'(e^x + \cos(y)) = -e^x y$$

$$y' = -\frac{e^x y}{e^x + \cos(y)}$$

3. $\ln(x \cdot y) = x^2$

Kettenregel + Produktregel:

$$\frac{1}{xy} (y + y'x) = 2x$$

$$\frac{1}{x} + \frac{y'}{y} = 2x$$

$$\frac{y'}{y} = 2x - \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow y'(x) = 2xy - \frac{y}{x}$$

2.5 Logarithmische Ableitung

Bei der Bildung der Ableitung von $y = x^x$ für $x > 0$ ist keine der bisher bekannten Ableitungsregel direkt anwendbar, da die Variable x sowohl in der Basis als auch im Exponenten auftritt.

Hier gelingt die Differentiation, wenn man die Funktionsgleichung zunächst **logarithmiert** und dann eine **implizite** Differentiation durchführt.

Dieses Verfahren nennt man **Logarithmische Ableitung**. Angewendet wird dies insbesondere bei Funktionen vom Typ

$$y = (u(x))^{v(x)} \text{ mit } u(x) > 0.$$

Beispiele:

1. $y = x^x$ mit $x > 0$

Logarithmieren: $\ln(y) = \ln(x^x)$

Logarithmenregeln: $\ln(y) = x \ln(x)$

Implizite Ableitung mit

Kettenregel + Produktregel: $\frac{1}{y} y' = \ln(x) + x \frac{1}{x}$

Auflösen nach $y'(x)$: $y'(x) = y(\ln(x) + 1)$ mit $y = x^x$

Einsetzen der Funktion: $y'(x) = x^x (\ln(x) + 1)$

2. $y = x^{\sin(x)}$

$\ln(y) = \sin(x) \ln x$

$\frac{1}{y} \cdot y' = \cos(x) \cdot \ln x + \sin(x) \cdot \frac{1}{x}$

$y' = \cos(x) \ln x \cdot y + \frac{y \sin(x)}{x} = \cos(x) \ln x \cdot x^{\sin(x)} + \frac{x^{\sin(x)} \cdot \sin(x)}{x}$

$\Rightarrow y'(x) = x^{(\sin(x)-1)} (\sin(x) + x \ln(x) \cos(x))$

3. $y = x^{\ln(x)}$

$\ln y = \ln x \cdot \ln x$

$\ln y = \ln x \cdot \ln x = \ln^2 x$

$\frac{1}{y} \cdot y' = 2 \ln x \cdot \frac{1}{x}$

$y' = 2 \ln x \cdot \frac{y}{x}$

mit $y = x^{\ln x}$

Produktregel

NR: $\frac{1}{x} \cdot \ln x + \ln x \cdot \frac{1}{x} = 2 \ln x \cdot \frac{1}{x}$

$y' = 2 \ln x \cdot \frac{x^{\ln x}}{x}$

$\Rightarrow y'(x) = 2x^{\ln x - 1} \ln(x)$

$y' = 2 \ln x \cdot x^{\ln x - 1}$

2.6 Ableitung der Umkehrfunktion

$\ln(x) = \ln(x) \Rightarrow (\ln(x))' = ?$

Es sei eine differenzierbare und umkehrbare Funktion $y = f(x)$ gegeben. Dann kann die Ableitung dieser Funktion mit Hilfe der Umkehrfunktion folgendermaßen berechnet werden:

Gesucht ist die Ableitung von:	$y = f(x)$
Auflösen nach x :	$x = f^{-1}(y)$
Ableiten dieser impliziten Funktion:	$1 = (f^{-1})'(y) \cdot y'$
Auflösen nach y' :	$y' = \frac{1}{(f^{-1})'(y)}$
Rechte Seite durch x ausdrücken:	$y' = \frac{1}{(f^{-1})'(f(x))}$

beobachtet
→ Umkehrfkt. anwenden

 $y(x)$

$y(x) = f(x)$

Beispiele:

1. Es soll die Ableitung der Funktion $y = \ln(x)$ berechnet werden. Bekannt ist die Umkehrfunktion von $f(x)$, nämlich $y = e^x$ und deren Ableitung $y' = e^x$.

Mit diesen Kenntnissen lässt sich nun die Ableitung von $y = \ln(x)$ berechnen.

Gesucht ist die Ableitung von :	$y = \ln(x)$
Auflösen nach x mit Hilfe der Umkehrfunktion:	$x = e^{y(x)}$
Ableiten dieser impliziten Funktion:	$1 = y' e^{y(x)}$
Auflösen nach y' :	$y' = \frac{1}{e^{y(x)}}$
Rechte Seite durch x ausdrücken:	$y' = \frac{1}{e^{\ln(x)}} = \frac{1}{x}$

f^{-1} anwenden
 $y(x) = \ln(x)$

⇒ Die Ableitung der Funktion $y = \ln(x)$ ist: $y' = \frac{1}{x}$

2. Es soll die Ableitung der Funktion $y = \operatorname{arsinh}(x)$ berechnet werden. Bekannt ist die Umkehrfunktion von $f(x)$, nämlich $y = \sinh(x)$ und deren Ableitung $y' = \cosh(x)$.

Mit diesen Kenntnissen lässt sich nun die Ableitung von $y = \operatorname{arsinh}(x)$ berechnen.

Gesucht ist die Ableitung von :	$y = \operatorname{arsinh}(x)$
Auflösen nach x mit Hilfe der Umkehrfunktion:	$x = \sinh(y)$
Ableiten dieser impliziten Funktion:	$1 = y' \cosh(y)$
Auflösen nach y' :	$y' = \frac{1}{\cosh(y)}$
Rechte Seite durch x ausdrücken:	$y' = \frac{1}{\sqrt{1 + \sinh^2(y)}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$

$\cosh^2 - \sinh^2 = 1$
 $\cosh^2 = 1 + \sinh^2$
 $\cosh = \sqrt{1 + \sinh^2}$

⇒ Die Ableitung der Funktion $y = \operatorname{arsinh}(x)$ ist: $y' = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$

$\operatorname{arsinh}(x)$
 $= x$
 $f^{-1}(f(x)) = x$

3. Bestimme die Ableitung der Funktion $y = \arcsin(x)$ mit Hilfe der Ableitung der Umkehrfunktion.

⇒ Die Ableitung der Funktion $y = \arcsin(x)$ ist: $y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

$\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)' = ?$

$$Y(x) = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$$

4. Bestimme die Ableitung der Funktion $y = \sqrt{x}$ mit Hilfe der Ableitung der Umkehrfunktion.

⇒ Die Ableitung der Funktion $y = \sqrt{x}$ ist: $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Pause bis 10:00

$$\begin{aligned} Y(x) &= \sqrt{x} \\ x &= (Y(x))^2 \\ 1 &= 2 \cdot Y(x) \cdot Y'(x) \\ Y'(x) &= \frac{1}{2 \cdot Y(x)} \\ Y'(x) &= \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} \end{aligned}$$

2.7 Ableitung einer in Parameterform dargestellten Funktion

Die Ableitung einer differenzierbaren Funktion in Parameterform

$$x = x(t), y = y(t) \quad ; \quad x(t=0) = 0 \quad ; \quad Y(t=0) = 1$$

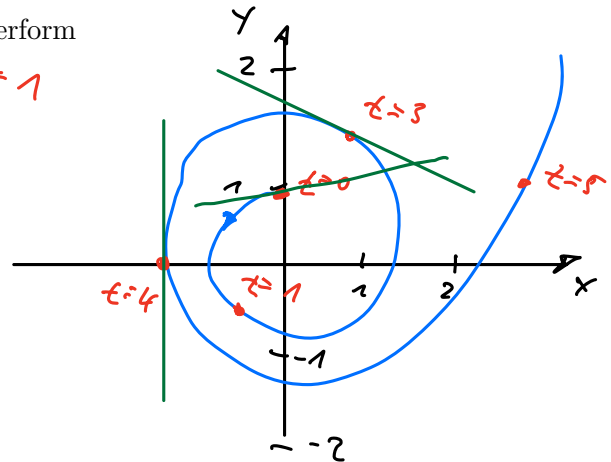
ist gegeben durch

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$$

denn:

$$\frac{f(x)}{dx} = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$$

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= \frac{dy}{dt} \\ \dot{x}(t) &= \frac{dx}{dt} \end{aligned}$$



Beispiel:

1. Bestimmen Sie die Ableitung, d.h. die Steigung der Tangente an jedem Punkt der Kurve:

$$x(t) = \cos(t) \quad y(t) = \cos(2t)$$

und berechnen Sie die Steigung für $t_1 = 0$, $t_2 = \frac{\pi}{3}$, $t_3 = \frac{2\pi}{3}$

$$x_t = \frac{d}{dt} \cos(t) = -\sin(t)$$

$$y_t = \frac{d}{dt} \cos(2t) = -2\sin(2t)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2\sin(2t)}{-\sin(t)} = 2 \frac{\sin(2t)}{\sin(t)} = 4 \frac{\sin(t)\cos(t)}{\sin(t)} = 4\cos(t) \quad (\text{mit } \sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x))$$

$$m = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{t_1=0} = 4\cos(0) = 4$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t_2=\frac{\pi}{3}} = 4\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t_3=\frac{2\pi}{3}} = 4\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -2$$

2.8 Regel von l'Hospital

Sind f und g zwei Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$, die im Intervall (a,b) differenzierbar sind mit $g'(x) \neq 0$.

Gilt dann

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+} g(x) = 0$$

oder

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+} g(x) = \pm\infty$$

so ist

$$\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad (2.6)$$

Entsprechendes gilt für $x \rightarrow b-$

Die Regel kann mehrfach angewendet werden, insofern die Voraussetzungen erfüllt sind.

Die Regel von de l'Hospital hilft bei der Berechnung von Grenzwerten die zunächst den Wert

$$\frac{0}{0} \text{ oder } \frac{\infty}{\infty}$$

ergaben.

Beispiele:

Berechnen Sie folgende Grenzwerte:

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1} = \infty$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{1} = 0$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{2} = \frac{1}{2}$$

2.9 Höhere Ableitungen

$$f' = f^{(1)} \quad f'' = f^{(2)} \quad \dots \quad f^{(n)}$$

Ist die Funktion $y = f(x)$ differenzierbar, so ist $y' = f'(x)$ die erste Ableitung von f .

Ist die erste Ableitung $y' = f'(x)$ differenzierbar, so ist $y'' = f''(x)$ die zweite Ableitung von f Ist die $(n-1)$ -te Ableitung $y^{(n-1)} = f^{(n-1)}(x)$ differenzierbar, so ist $y^{(n)} = f^{(n)}(x)$ die n -te Ableitung von f .

Beispiele:

Bestimmen Sie die ersten 3 Ableitungen folgender Funktionen

- $f(x) = x^4 + 2x^2 + 5x - 3 \rightarrow f'(x) = 4x^3 + 4x + 5, f''(x) = 12x^2 + 4, f'''(x) = 24x.$
- $f(x) = \ln(x) \rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}, f''(x) = -\frac{1}{x^2}, f'''(x) = \frac{2}{x^3}.$

2.10 Charakteristische Funktionspunkte und Eigenschaften

Charakteristische Funktionseigenschaften lassen sich mit Hilfe von Eigenschaften der Ableitungen der Funktion beschreiben.

2.10.1 Monotonie

Eine Funktion f heißt

monoton wachsend	wenn für alle $a < b$ gilt:	$f(a) \leq f(b)$
streng monoton wachsend	wenn für alle $a < b$ gilt:	$f(a) < f(b)$
monoton fallend	wenn für alle $a < b$ gilt:	$f(a) \geq f(b)$
streng monoton fallend	wenn für alle $a < b$ gilt:	$f(a) > f(b)$
konstant	wenn für alle a, b gilt:	$f(a) = f(b)$

Ist f eine differenzierbare Funktion, so gilt

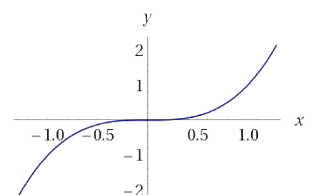
$f' \geq 0 \Rightarrow f$ ist mind. monoton wachsend	$f' \leq 0 \Rightarrow f$ ist mind. monoton fallend
$f' > 0 \Rightarrow f$ ist streng monoton wachsend	$f' < 0 \Rightarrow f$ ist streng monoton fallend
$f' = 0 \Rightarrow f$ ist konstant	

Beispiele:

Bestimmen Sie die Monotonie von $f(x) = e^x$

$f'(x) = e^x > 0 \Rightarrow$ Die Exponentialfunktion ist **streng** monoton wachsend auf $\mathbb{R}$.

Bestimmen Sie die Monotonie von $f(x) = x^3$



$f'(x) = 3x^2 \geq 0 \Rightarrow$ Die quadratische Funktion ist mindestens monoton wachsend auf $\mathbb{R}$.

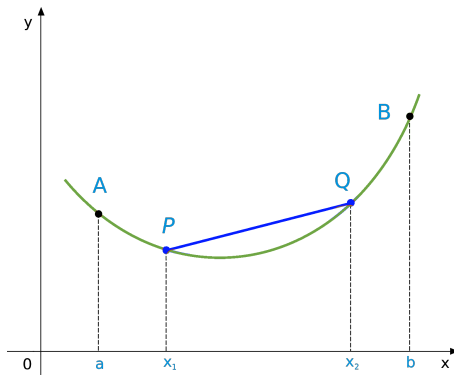
Da gilt: $f(a) < f(b)$ bzw. $f(x + \varepsilon) > f(x)$, $\varepsilon > 0$ auf $\mathbb{R}$, insbesondere um $x = 0$, ist

x^3 sogar **streng** monoton wachsend.

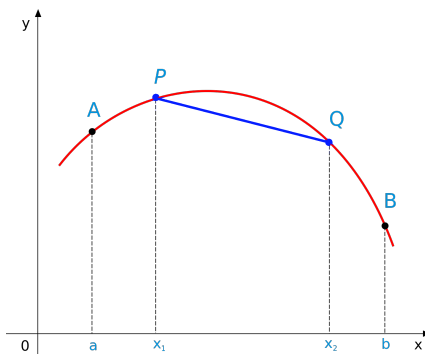
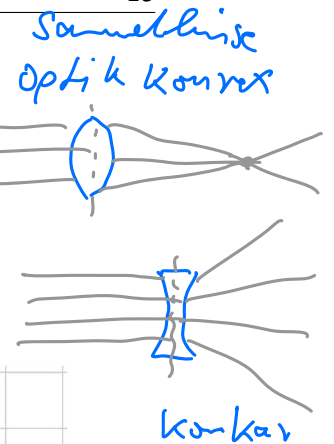
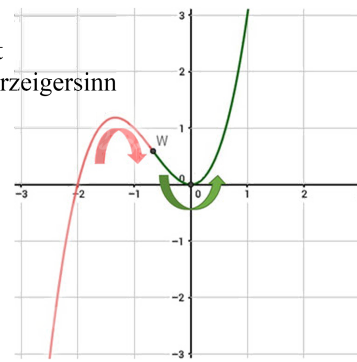
2.10.2 Krümmung

Für eine zweimal differenzierbare Funktion f gilt:

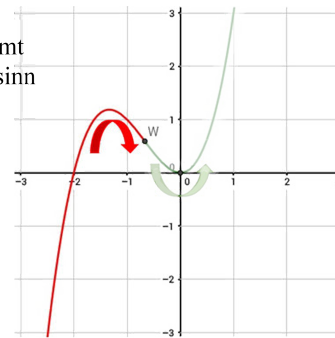
f ist konvex $\Rightarrow$	$f'' \geq 0$	f ist konkav $\Rightarrow$	$f'' \leq 0$
f ist streng konvex $\Rightarrow$	$f'' > 0$	f ist streng konkav $\Rightarrow$	$f'' < 0$



Konvex
linxgekrümmt
gegen den Uhrzeigersinn
 $f''(x) > 0$



Konkav
rechtsgekrümmt
im Uhrzeigersinn
 $f''(x) < 0$



Beispiele:

Bestimmen Sie die Krümmung von

1. $f(x) = e^x$

$f'(x) = e^x, f''(x) = e^x > 0 \Rightarrow$ Die Exponentialfunktion ist **streng konvex** auf $\mathbb{R}$.

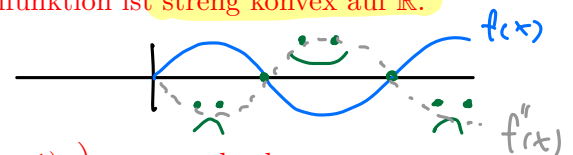
2. $f(x) = \sin(x)$

$f''(x) = -\sin(x) < 0$ für alle $x \in (2k\pi, (2k+1)\pi)$ streng konkav.

$f''(x) = -\sin(x) > 0$ für alle $x \in ((2k+1)\pi, (2k+2)\pi)$ streng konvex.

$f''(x) = -\sin(x) \leq 0$ für alle $x \in [2k\pi, (2k+1)\pi]$ konkav.

$f''(x) = -\sin(x) \geq 0$ für alle $x \in [(2k+1)\pi, (2k+2)\pi]$ konvex.



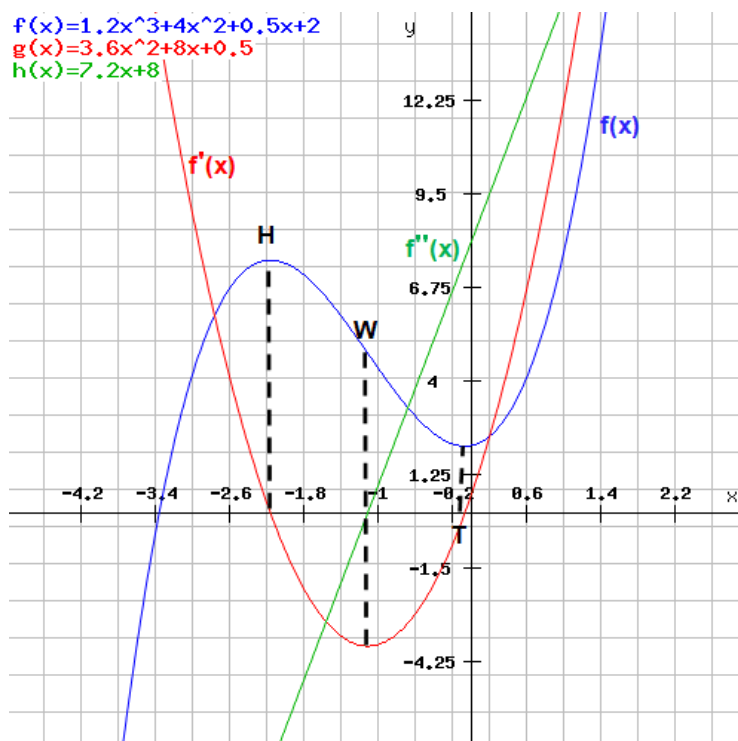
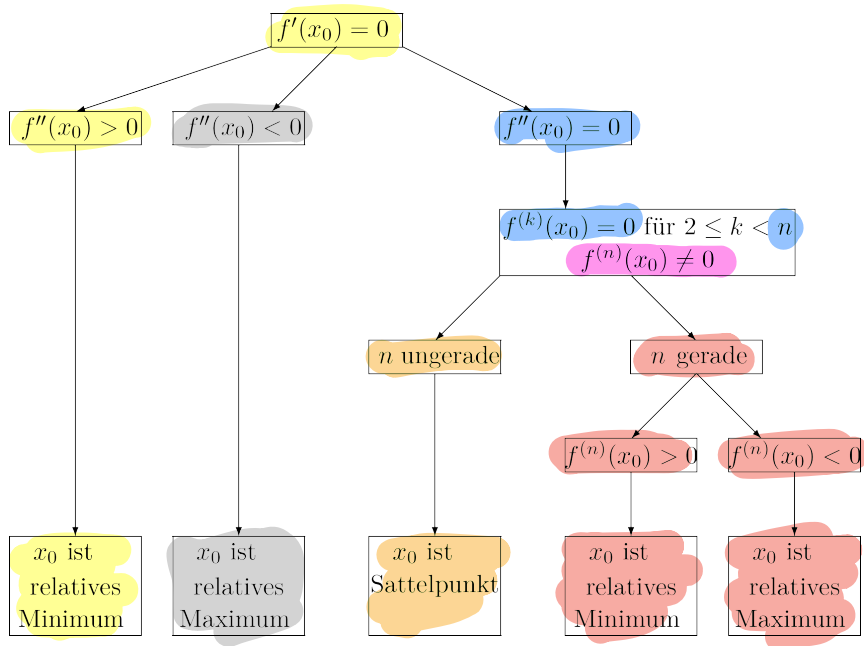
2.10.3 Extremwerte

Extremwerte einer Funktion sind Stellen x_0 , in denen der Funktionswert ein relatives Maximum oder Minimum annimmt, d.h. in einer Umgebung von x_0 gilt:

$$f(x_0) > f(x) \text{ bzw. } f(x_0) < f(x) \text{ für } x \neq x_0$$

Extremwertbestimmung:

Für geeignet oft differenzierbare Funktionen f gilt



Dort, wo die Ableitungsfunktion $f'(x)$ ihre Nullstellen hat, also die x -Achse schneidet, sind die Extremstellen (H, T; Hochpunkt, Tiefpunkt) der Ursprungsfunktion $f(x)$.

An der Wendestelle W (Nulldurchgang von $f''(x)$) hat die Ableitungsfunktion einen Extremwert).

Kochrezept:

1. Ableitung berechnen. $f'(x)$
- Nullstellen der 1. Ableitung berechnen.
2. Ableitung berechnen. $f''(x)$
- Nullstellen der 1. Ableitung in die 2. Ableitung einsetzen.
- y-Koordinate des Extrempunktes berechnen.

Beispiele:

Bestimmen Sie die Extremwerte folgender Funktionen:

1. $f(x) = x^2$

a) Erste Ableitung berechnen: $f'(x) = 2x$

b) Nullstellen der 1. Ableitung berechnen: $f'(x) = 0 \Rightarrow f'(x) = 2x = 0 \Rightarrow x_0 = 0$

c) 2. Ableitung berechnen: $f''(x) = 2$

d) Nullstellen der 1. Ableitung in die 2. Ableitung einsetzen

Da in der 2. Ableitung kein x vorkommt, sind wir bereits fertig!

Die 2. Ableitung ist immer größer Null: $f''(x) = 2 > 0 \Rightarrow$ bei $x = 0$ liegt ein Tiefpunkt.

e) y-Koordinate des Tiefpunktes berechnen: $y = f(0) = 0^2 = 0$

TP bei (0|0)

2. $f(x) = x^4$

$f'(x)$ a) $f'(x) = 4x^3$

b) $f'(x) = 4x^3 = 0 \Rightarrow x_0 = 0$

$f''(x)$ c) $f''(x) = 12x^2$

d) $f''(x_0) = 0 \Rightarrow f''(0) = 0$

e) $f(x_0) = f(0) = 0 \Rightarrow$ Tiefpunkt bei (0|0)

3. $f(x) = x^2 \cdot e^{-\frac{1}{2}x}$

$f'(x)$ a) $f'(x) = -\frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{1}{2}x}(x-4)x = 0$?

b) $f'(x) = -\frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{1}{2}x}(x-4)x = 0 \Rightarrow x_0 = 0; x_1 = 4$

$f''(x)$ c) $f''(x) = \frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}x}(x^2 - 8x + 8)$ nachd. H

$\underbrace{\left(x^2 \cdot e^{-\frac{1}{2}x}\right)'}_{\text{Produktregel}} = 2x \cdot e^{-\frac{1}{2}x} + x^2 \cdot \left(e^{-\frac{1}{2}x} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)\right)$

$= 2x e^{-\frac{1}{2}x} - x^2 \cdot \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}x}$

$= -\frac{1}{2} x^2 e^{-\frac{1}{2}x} + 2x e^{-\frac{1}{2}x}$

$$= -\frac{1}{2}x(-4+x) \cdot e^{-\frac{1}{2}x}$$

$$= -\frac{1}{2}x(x-4) \cdot e^{-\frac{1}{2}x}$$

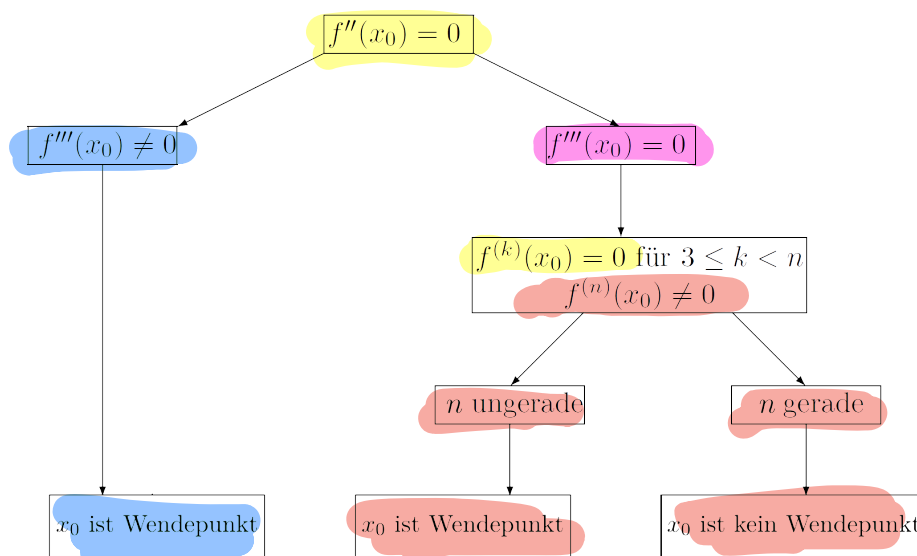
- d) $f''(x_0) = f''(0) = \frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2} \cdot 0}(0^2 - 8 \cdot 0 + 8) = \frac{1}{4} \cdot 8 = 2 > 0$
- $$f''(x_1) = f''(4) = \frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2} \cdot 4}(4^2 - 8 \cdot 4 + 8) = -\frac{1}{4} \cdot 8 \cdot e^{-2} = -2 \cdot \frac{1}{e^2} < 0 \quad (\text{Hochpunkt})$$
- e) $f'(x_0) = 0 \Rightarrow$ für $x_0 = 0$ Tiefpunkt bei $(0|0)$.
- $$f'(x_1) = \Rightarrow \text{für } x_1 = 4 \text{ Hochpunkt bei } \left(4 \mid \frac{16}{e^2}\right).$$

2.10.4 Wendepunkte

Wendepunkte einer Funktion sind Stellen x_0 , an denen die Krümmung der Funktion von *konkav* zu *konvex* oder umgekehrt wechselt. Wendepunkte mit waagrechter Tangente heißen **Sattelpunkte**.

Bestimmung von Wendepunkten:

Für geeignet oft differenzierbare Funktionen f gilt:



2.10.5 Sattelpunkte

Man bezeichnet als **Sattelpunkt**, **Terrassenpunkt** oder **Horizontalwendepunkt** einen kritischen Punkt einer Funktion, der kein Extrempunkt ist. Punkte dieser Art sind Spezialfälle von Wendepunkten.

Für Funktionen $f(x)$ ist das Verschwinden der 1. Ableitung an der Stelle $f'(x_0) = 0$ eine Bedingung dafür, dass ein kritischer Punkt vorliegt.

Ist die 2. Ableitung an dieser Stelle $\neq 0$, so liegt ein **Extrempunkt** und damit **kein Sattelpunkt** vor. Für einen Sattelpunkt muss $f''(x) = 0$ sein, wenn sie existiert. Dies ist allerdings nur eine notwendige Bedingung (für zweimal stetig differenzierbare Funktionen).

Umgekehrt gilt (hinreichende Bedingung):

Sind $f'(x) = f''(x) = 0$ und die 3. Ableitung $\neq 0$, so liegt ein Sattelpunkt vor.

Ein Sattelpunkt ist ein Wendepunkt mit waagrechter Tangente.

Kochrezept:

	Bedingung	
Hochpunkt berechnen	$f'(x_0) = 0$	und $f''(x_0) < 0$
Tiefpunkt berechnen	$f'(x_0) = 0$	und $f''(x_0) > 0$
Wendepunkt berechnen	$f'(x_0) \neq 0$	
	$f''(x_0) = 0$	
	$f'''(x_0) \neq 0$	
Sattelpunkt berechnen	$f'(x_0) = 0$	(Bedingung für eine waagrechte Tangente)
	$f''(x_0) = 0$	
	$f'''(x_0) \neq 0$	(Bedingung für einen Wendepunkt)

Beispiel:

Bestimmen Sie die Sattelpunkte folgender Funktionen:

1. $f(x) = 2x^5 + 5x^4 - 10x^3 - 20x^2 + 40x + 30$

- a) Die 1. Ableitung hat zwei doppelte Nullstellen -2 und 1:
 $f'(x) = 10x^4 + 20x^3 - 30x^2 - 40x + 40 = 10(x+2)^2(x-1)^2$

- b) Für die 2. Ableitung

$$f''(x) = 40x^3 + 60x^2 - 60x - 40$$

sind -2 und 1 ebenfalls Nullstellen,

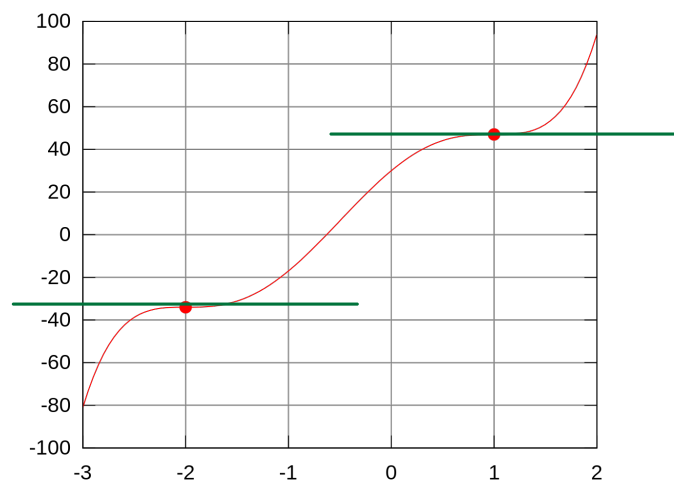
- c) jedoch ist die 3. Ableitung

$$f'''(x) = 120x^2 + 120x - 60$$

dort ungleich Null:

$$f'''(-2) = f'''(1) = 180$$

⇒ Deshalb sind $S_1(-2|-34)$ und $S_2(1|47)$ Sattelpunkte der Funktion $f(x)$.



2.10.6 Kurvendiskussion

Unter der Kurvendiskussion versteht man die Bestimmung des Kurvenverlaufs anhand nachfolgender Eigenschaften:

- Definitionsbereich ✓
- Wertebereich ✓
- Symmetrie ✓
- Periodizität ✓
- Nullstellen ✓
- Pole ✓
- Asymptoten ✓
- Extremwerte ✓
- Wendepunkte ✓

nicht
Klausur

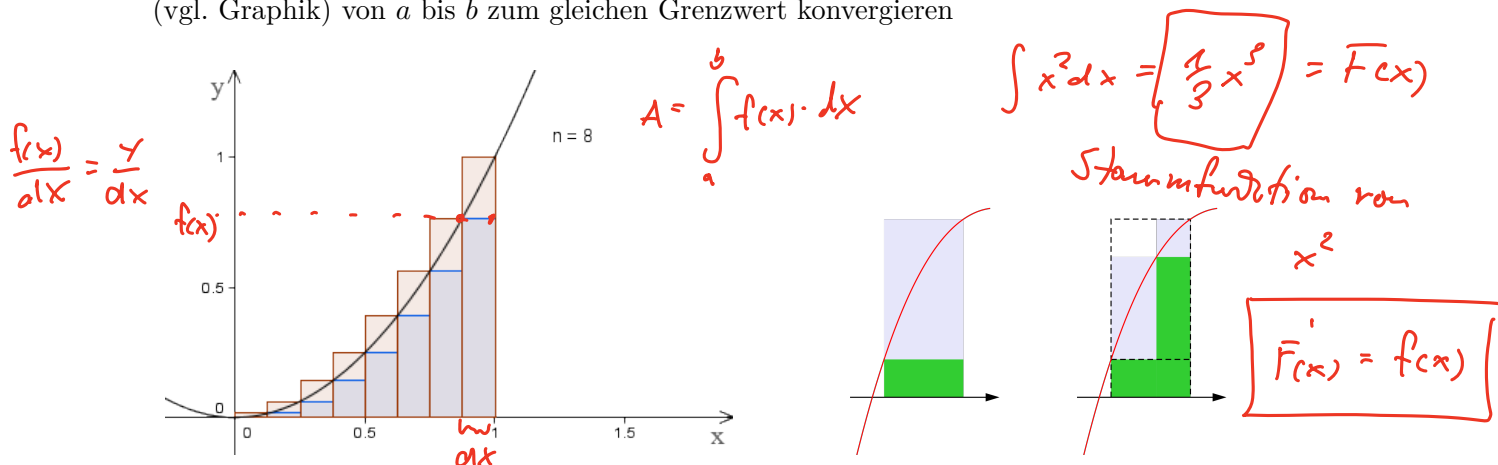
KAPITEL 3

Integralrechnung für Funktionen einer Variablen

3.1 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

3.1.1 Definitionen

Ist $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion, für die die Untersummen und Obersummen (vgl. Graphik) von a bis b zum gleichen Grenzwert konvergieren



so heißt f **(Riemann-) integrierbar**. Bei einer feineren Unterteilung (rechte Abbildung) wird die Obersumme kleiner und die Untersumme größer.

Der Grenzwert $\int_a^b f(x) dx$ heißt das (bestimmte) Riemann-Integral von f auf $[a, b]$.

Für eine stetige Funktion f heißt jede differenzierbare Funktion F mit $F' = f$ Stammfunktion von f .

Bemerkungen

- Ist $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion mit $f(x) \geq 0 \forall x \in [a, b]$, so lässt sich das Integral $\int_a^b f(x) dx$ als Fläche zwischen der x -Achse und dem Graphen von f deuten.
- Ist $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, dann ist f integrierbar auf $[a, b]$

3.1.2 Hauptsatz

Ist f eine stetige Funktion auf einem Intervall $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{I}$ ein beliebiger Punkt, und sei

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

Integrationsvariable

Stammfkt.

Dann gilt:

1. F ist eine Stammfunktion zu f , d.h. F ist in $\mathbb{I}$ differenzierbar mit $F'(x) = f(x)$
2. Für jede Stammfunktion F zu f und $a, b \in \mathbb{I}$ gilt:

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b F'(t) dt = F(b) - F(a) =: [F(t)]_a^b$$

für diesen Fall: x

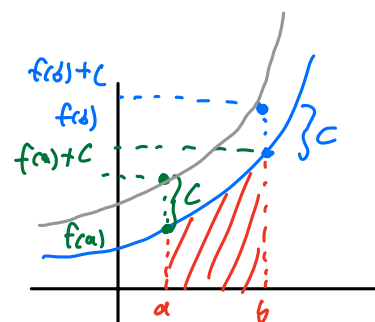
3.2 Beispiele von Stammfunktionen

Die Berechnung von Stammfunktionen lässt sich - im Gegensatz zum Differenzieren - nicht immer auf die Anwendung einfacher Regeln zurückführen. Stammfunktionen, d.h. Integrale werden somit via Tabellen, Erfahrung, SW-Programme (Matlab, Maple, Wolfram Alpha...) bestimmt.

Integrieren

Funktion $f(x)$	Stammfunktion $F(x)$
x^n mit $n \in \mathbb{R}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + C$
e^x	$e^x + C$
e^{-x}	$-e^{-x} + C$
a^x	$\frac{a^x}{\ln(a)} + C$
$\ln(x)$	$x \ln(x) - x + C$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + C$
$\cos(x)$	$\sin(x) + C$
$\tan(x)$	$-\ln \cos(x) $

Differenzieren



Funktion $f(x)$	Stammfunktion $F(x)$
$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x) + C$
$\frac{1}{\sinh(x)}$	$\cosh(x) + C$
$\cosh(x)$	$\sinh(x) + C$
$\frac{1}{\sinh^2(x)}$	$-\coth(x) + C$
$\frac{1}{\cosh^2(x)}$	$\tanh(x) + C$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x) + C$
$\frac{1}{1-x^2}$	$= \begin{cases} \operatorname{artanh}(x) + C & \text{für } x < 1 \\ \frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + C & \text{für } x > 1 \end{cases}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$= \begin{cases} \arcsin(x) + C_1 \\ -\arccos(x) + C_2 \end{cases}$
$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$= \operatorname{arsinh}(x) + C = \ln x + \sqrt{x^2+1} + C$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$= \operatorname{arcosh} x + C = \ln x + \sqrt{x^2-1} + C$

Regel:

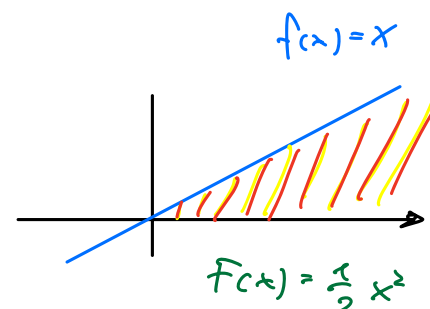
Sind f, g Funktionen mit Stammfunktionen F und G und sind $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ so gilt:

$$C_1 F(x) + C_2 G(x) \text{ ist Stammfunktion von } C_1 f(x) + C_2 g(x)$$

Beispiele:

Bestimmen Sie die Stammfunktion von

- $f(x) = \sin(x) - \cos(x) \Rightarrow F(x) = -\cos(x) - \sin(x) + C$
- $f(x) = 2e^x - x \Rightarrow F(x) = 2e^x - \frac{x^2}{2} + C$
- $f(x) = 5\cosh(x) + 3x^2 \Rightarrow F(x) = 5\sinh(x) + x^3 + C$



Regeln für bestimmte Integrale:

Vertauschregel	$\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$
zusammenfallende Integrationsgrenzen	$\int_a^a f(x)dx = 0$
Aufteilen des Integrationsintervalls	$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

$\int$ steht hier
"Summe"
Σ

3.3 Integrationsmethoden

Pause bis 10:00

In diesem Abschnitt werden die wichtigsten Methoden zur Berechnung von Integralen dargestellt. Das Ziel der Methoden ist jeweils, komplizierte Funktionen in einfachere Funktionen mit bekannten Integralfunktionen zurückzuführen.

3.3.1 Substitutionsmethode

Bei der Substitutionsmethode wird durch Substitution versucht das Integral über eine neue Integrationsvariable zu beschreiben und dieses neue Integral zu lösen. Die Substitutionsmethode führt insbesondere in folgenden Fällen zum Ziel:

1. $\int g'(x) \cdot f(g(x))dx$

$u = g(x) \Rightarrow \frac{du}{dx} = g'(x)$

Es wird die innere Funktion substituiert: $u = g(x) \Rightarrow \frac{du}{dx} = g'(x) \Rightarrow du = g'(x)dx$.

Damit lässt sich obiges Integral umschreiben in das einfachere:

$$\int g'(x) \cdot f(g(x))dx = \int f(u)du$$

2. $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx$

Es wird substituiert: $u = f(x) \Rightarrow \frac{du}{dx} = f'(x) \Rightarrow dx = \frac{du}{f'(x)}$.

Damit lässt sich obiges Integral umschreiben in das einfachere und sofort lösen:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \int \frac{1}{u} du = \ln|u| + C = \ln|f(x)| + C$$

"einfach"

Beispiele:

1. $\int x \cdot \cos(x^2) dx$

Substitution: $u = x^2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{du}{2x} \Rightarrow x dx = \frac{1}{2} du$

$$\int \cos(x^2) \cdot x dx = \int \frac{1}{2} \cos(u) du = \frac{1}{2} \sin(u) + C$$

Rücksubstitution: $\int x \cdot \cos(x^2) dx = \frac{1}{2} \sin(x^2) + C$

2. $\int \frac{1}{x \ln(x)} dx = \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$

Substitution: $u = \ln(x) \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{dx}{x} = du$

$$\int \frac{1}{x \ln x} dx = \int \frac{1}{u} du = \ln|u| + C$$

Rücksubstitution: $\int \frac{1}{x \ln x} dx = \ln|\ln(x)| + C$

Aufgaben:

Berechnen Sie nachfolgende Integrale durch geeignete Substitution:

1. $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

Substitution: $u = 1 - x^2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = -2x \Rightarrow dx = -\frac{du}{2x}$

$\int \frac{x}{\sqrt{u}} \cdot (-) \frac{du}{2x} = -\frac{1}{2} \int \frac{du}{\sqrt{u}} = -\frac{1}{2} \int \frac{du}{u^{1/2}} = -\frac{1}{2} \cdot 2 u^{1/2} = -\sqrt{1-x^2} + C$

Rücksubstitution: $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\sqrt{1-x^2} + C$

2. $\int \frac{4x}{x^2+4} dx =$

Im Zähler steht die Ableitung des Nenners (bis auf eine Konstante):

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int \frac{4x}{x^2+4} dx = 2 \cdot \int \frac{2x}{x^2+4} dx \Rightarrow u = x^2+4$$

Rücksubstitution: $2 \cdot \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = 2 \cdot \ln|u| + C = 2 \ln(x^2+4) + C$

3.3.2 Produktintegration / Partielle Integration

Aus der Produktregel der Differentialrechnung erhält man durch Umformung die als Produktintegration bekannte Integrationsmethode:

$$\begin{aligned} [u(x) \cdot v(x)]' &= u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) \\ \int u(x) \cdot v'(x) dx &= \int [u(x) \cdot v(x)]' dx - \int u'(x) \cdot v(x) dx \quad \int dx \\ \int u(x) \cdot v'(x) dx &= u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) dx \end{aligned}$$

Vorgehen:

Zur Bestimmung des Integrals $\int f(x) dx$ wird zunächst der Integrand $f(x)$ in geeigneter Weise in ein Produkt $u(x) \cdot v'(x)$ zerlegt:

$$\int f(x) dx = \int u(x) \cdot v'(x) dx$$

Dieses Integral lässt sich dann wie folgt darstellen:

$$\int u(x) \cdot v'(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) v(x) dx$$

Beispiele:

1. $\int x e^x dx$

$$\int \underbrace{x}_u \underbrace{e^x}_{v'} dx =$$

||

$$= \underbrace{x}_u \underbrace{e^x}_v - \int \underbrace{1}_{u'} \underbrace{e^x}_v dx$$

$$= x e^x - e^x + C$$

$$= e^x(x - 1) + C$$

Ableiten ↓

$$\begin{array}{ll} u = x & v = e^x \\ u' = 1 & v' = e^x \end{array}$$

↑ 'Aufleiten'

$$\int e^x dx$$

2. $\int \ln(x) dx =$

$$\int \underbrace{\ln(x)}_u \cdot \underbrace{1}_{v'} dx =$$

Ableiten ↓ $u = \ln(x) \quad v = x$

$$u' = \frac{1}{x} \quad v' = 1 \quad \uparrow \text{'Aufleiten'}$$

$$= \underbrace{\ln(x)}_u \underbrace{x}_v - \int \underbrace{\frac{1}{x}}_{u'} \underbrace{x}_v dx$$

$$= \ln(x)x - x + C$$

$$= x(\ln(x) - 1) + C$$

$$3. \int x \cdot \frac{1}{\cos^2(x)} dx = x \cdot \tan(x) + \ln|\cos(x)| + C$$

$\int \rightarrow$ Tabelle

$\int \tan(x) dx \rightarrow$ Tabelle ;)

3.3.3 Integration gebrochen rationaler Funktionen

Für echt gebrochen rationale Funktionen gibt es eine spezielle Integrationstechnik, nämlich die **Integration durch Partialbruchzerlegung**.

Ist also das Integral einer gebrochen rationalen Funktion zu bestimmen, so erhält man zunächst durch Polynomdivision ein Polynom und eine echt gebrochen rationale Funktion. Von diesen lässt sich dann das Integral des Polynoms leicht bestimmen und das Integral der echt gebrochen rationalen Funktion mit Hilfe des Verfahrens der Partialbruchzerlegung ermitteln.

Partialbruchzerlegung einer echt gebrochen rationalen Funktion:

Eine echt gebrochen rationale Funktion vom Typ $f(x) = \frac{Z(x)}{N(x)}$ lässt sich schrittweise wie folgt in eine Summe aus Partial- oder Teilbrüchen zerlegen:

1. Zunächst werden die Nullstellen (Nullst) des Nennerpolynoms $N(x)$ nach Lage und Vielfachheit bestimmt.
2. Jeder Nullstelle des Nennerpolynoms wird ein Partialbruch in folgender Weise zugeordnet:

x_1, x_2 : einfache reelle Nullstellen

$$\rightarrow \frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2} + \dots$$

x_1 : zweifache reelle Nullstelle

$$\rightarrow \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{(x - x_1)^2}$$

...

x_1 : r -fache reelle Nullstelle

$$\rightarrow \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{(x - x_1)^2} + \dots + \frac{A_r}{(x - x_1)^r}$$

x_1, x_2 : konjugiert komplexe Nullstellen

$$\rightarrow \frac{B_1 x + B_2}{(x - x_1)(x - x_2)}$$

...

x_1, x_2 : r -fach konjugiert kompl. Nullstellen

$$\rightarrow \frac{B_1 x + B_2}{(x - x_1)(x - x_2)} + \dots + \frac{B_{r1} x + B_{r2}}{(x - x_1)^r (x - x_2)^r}$$

$A, A_1, A_2, \dots, A_r$ und $B, B_1, B_2, \dots, B_{r1}, B_{r2}$ sind dabei zunächst noch unbekannte Konstante.

3. Die echt gebrochen rationale Funktion $f(x) = \frac{Z(x)}{N(x)}$ ist dann als Summe aller Partialbrüche darstellbar.

4. Bestimmung der in den Partialbrüchen auftretenden Konstanten:
Zunächst werden alle Brüche auf einen gemeinsamen Nenner gebracht und nur der Zähler verglichen.

Durch Einsetzen geeigneter x -Werte (z.B. der Nennernullstellen) erhält man ein einfaches lineares Gleichungssystem für die unbekannten Konstanten.

nicht
klar

Beispiele:

1. Möglichkeit: 1. $f(x) = \frac{x^3 - 12x^2 + 5x + 150}{x - 5}$

Polynomdivision:

$$\begin{array}{r}
 (x^3 - 12x^2 + 5x + 150) : (x - 5) = \underline{x^2 - 7x - 30} \\
 -(x^3 - 5x^2) \\
 \hline
 -7x^2 + 5x \\
 -(-7x^2 + 35x) \\
 \hline
 -30x + 150 \\
 -(-30x + 150) \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

$$\int f(x) dx = \int x^2 dx - 7 \int x dx - 30 \int 1 dx$$

= ...

2. $f(x) = \frac{7x + 1}{x^2 - 1}$

Der Nenner ist einfach zu zerlegen (dritte Binomische Formel). Damit ergibt sich dieser Ansatz:

$$\int \frac{7x + 1}{x^2 - 1} dx = \int \frac{A}{x + 1} + \int \frac{B}{x - 1} \quad | \cdot (x + 1) \cdot (x - 1)$$

$$7x + 1 = a \cdot (x - 1) + b \cdot (x + 1)$$

$$7x + 1 = ax - a + bx + b$$

$$7x + 1 = (a + b) \cdot x + (-a + b)$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir dieses Linearsystem:

$$\begin{array}{l}
 7 = a + b \\
 1 = -a + b
 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl}
 (1) & a + b & = 7 \\
 (2) & -a + b & = 1
 \end{array}$$

Durch Addition der Gleichungen fällt a weg, b kann berechnet werden.

$$\begin{array}{rcl}
 2b & = & 8 \quad | : 2 \\
 \hline
 b & = & 4
 \end{array}$$

Das Ergebnis wird in (1) eingesetzt:

$$\begin{array}{rcl}
 a + b & = & 7 \\
 a + 4 & = & 7 \quad | - 4 \\
 \hline
 a & = & 3
 \end{array}$$

Hiermit ergibt sich die Zerlegung:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{7x + 1}{x^2 - 1} dx &= \int \frac{3 \cdot dx}{x + 1} + \int \frac{4 \cdot dx}{x - 1} = \int \frac{7x + 1}{x^2 - 1} dx = 3 \cdot \int \frac{1}{x + 1} dx + 4 \cdot \int \frac{1}{x - 1} dx \\
 &= 3 \cdot \ln |x + 1| + 4 \cdot \ln |x - 1| + C
 \end{aligned}$$

Bemerkung:

Die bei der Partialbruchzerlegung einer echt gebrochen rationalen Funktion auftretenden Funktionen sind bei reellen Nennernullstellen vom Typ

$$\frac{1}{x - x_1} \text{ bzw. } \frac{1}{(x - x_1)^n} \text{ mit } n \geq 2$$

Mit Hilfe der Substitution $u = x - x_1$ ist ihre Integration elementar durchführbar:

$$\int \frac{dx}{x - x_1} = \ln|x - x_1| + C_1$$

siehe Skript ... S. 28 unten

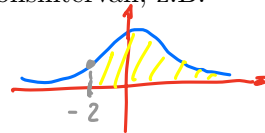
$$\int \frac{dx}{(x - x_1)^n} = \frac{1}{(1 - n)(x - x_1)^{n-1}} + C_2 = \frac{(x - a)^{1-n}}{1 - n} + C_2$$

(mer)

3.4 Uneigentliche Integrale

Bestimmte Integrale mit unendlichem Integrationsintervall, z.B.

$$\int_a^\infty f(x)dx, \int_{-\infty}^a f(x)dx, \int_{-\infty}^\infty f(x)dx$$



nennt man **uneigentliche Integrale**.

Bestimmung eines uneigentlichen Integrals:

Ein Integral vom Typ $\int_a^\infty f(x)dx$ wird folgendermassen berechnet:

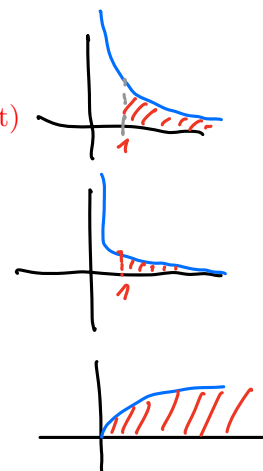
1. Berechnung des bestimmten Integrals $\int_a^\lambda f(x)dx = A(\lambda)$
2. Berechnung des Grenzwertes $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} A(\lambda)$
3. Man setzt definitionsgemäß $\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^\lambda f(x)dx$
4. Ist der Grenzwert vorhanden, nennt man das uneigentliche Integral konvergent, andernfalls divergent.

Beispiele:

$$1. \int_1^\infty \frac{1}{x} dx = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left[\ln(x) \right]_1^\lambda = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} (\ln(\lambda) - \ln(1)) = \infty \quad (\text{divergent})$$

$$2. \int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_1^\lambda = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{\lambda} + 1 \right) = 1 \quad (\text{konvergent})$$

$$3. \int_0^\infty \sqrt{x} dx = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_0^\lambda = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{2}{3} \lambda^{\frac{3}{2}} = \infty \quad (\text{divergent})$$



KAPITEL 4

Funktionen mehrerer Variablen

Bislang hatten wir ausschliesslich mit Funktionen von einer unabhängigen Variablen gearbeitet. In den Anwendungen treten jedoch auch Größen auf, die von mehr als einer Variablen abhängen.

Wir werden uns hier mit der Differentiation und Integration dieser Funktionen beschäftigen.

Beispiel: Ohmsches Gesetz

Die an einem ohmschen Widerstand R abfallende Spannung U hängt nach dem Ohmschen Gesetz vom Widerstand und der Stromstärke I ab:

$$U = R \cdot I$$

D.h. U hängt von 2 unabhängigen Variablen R und I ab.



4.1 Funktionen von zwei Variablen

$$R = R_1 + R_2 + R_3$$

Unter einer Funktion f von 2 unabhängigen Variablen versteht man eine Vorschrift, die jedem geordneten Zahlenpaar $(x|y) \in \mathbb{R}^2$ genau ein Element $z \in \mathbb{R}$ zuordnet:

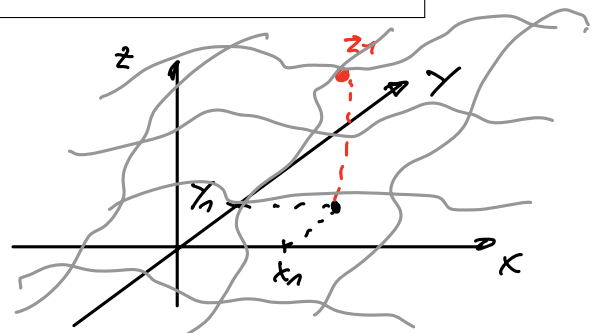
$$z = f(x, y)$$

$$y = f(x)$$

Beispiele:

1. $z = f(x, y) = 2x + y + 5$
2. $z = f(x, y) = x^2 + y^2$
3. $z = f(x, y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$
4. $p = p(V, T) = \frac{RT}{V}$

Mit p : Druck, V : Volumen, T : absolute Temperatur, R : allgemeine Gaskonstante



4.2 Funktionen von n Variablen

Unter einer Funktion f von n unabhängigen Variablen versteht man eine Vorschrift, die jedem geordneten Zahlentupel $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ genau ein Element $z \in \mathbb{R}$ zuordnet:

$$z = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

Beispiele:

1. $u = f(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2 + 1)$
2. Reihenschaltung von Widerständen
Bei der Reihenschaltung von n ohmschen Widerständen $R_1, R_2, \dots, R_n$ addieren sich die Einzelwiderstände zu einem Gesamtwiderstand R :
 $R = R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_n$

4.3 Darstellungsformen von Funktionen von mehreren Variablen

4.3.1 Explizite Darstellung

Bei der expliziten Darstellung liegt die Funktion aufgelöst in Form einer Gleichung vor:

$$u = 2x_1 + x_2 - 6x_3 + 9x_4 + 1$$

$$u = x^2 + y^2 + z^2$$

$$z = 2\sin(x - y)$$

4.3.2 Implizite Darstellung

Bei der impliziten Darstellung liegt die Funktion nicht aufgelöst in Form einer Gleichung vor:

$$2x_1 + x_2 - 6x_3 + 9x_4 - u = -1$$

$$1 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$0 = 2\sin(x - y) - z$$

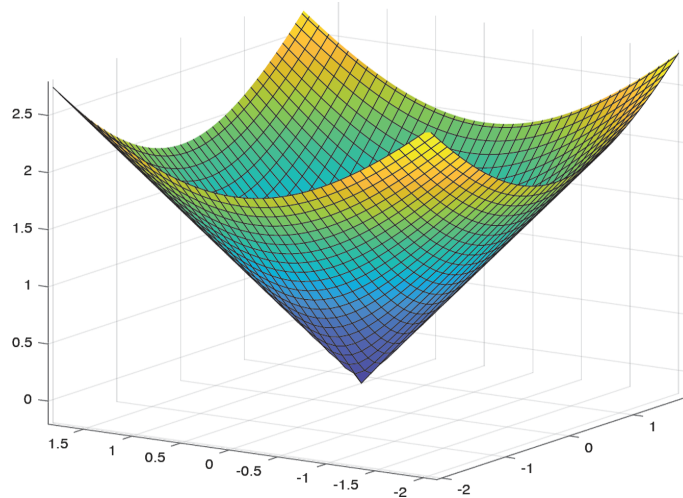
4.3.3 Graphische Darstellung von Funktionen $z = f(x,y)$

Für die Veranschaulichung von Funktionen zweier Variablen gibt es eine Reihe von verschiedenen Möglichkeiten:

1. Betrachtung als Höhe

Eine Funktion $z = f(x,y)$ kann in einem dreidimensionalen Raum durch eine über dem Definitionsbereich $\mathbb{R}$ liegende Fläche dargestellt werden. Der Funktionswert z ist dabei die Höhe.

Beispiel: $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$



2. Darstellung einer Ebenengleichung $ax + by + cz + d = 0$

Für die grafische Darstellung einer Ebene bestimmt man einfachheitshalber die 3 Achsenschnittpunkte und verbindet diese zu einer Ebene.

Beispiel: $3x + 6y + 4z = 12$

Schnittpunkt mit x -Achse ($y = z = 0$): $P_x(4|0|0)$

Schnittpunkt mit y -Achse ($x = z = 0$): $P_y(0|2|0)$

Schnittpunkt mit z -Achse ($x = y = 0$): $P_z(0|0|3)$

3. Rotationsflächen

Die Funktionsgleichung einer zur z -Achse rotationssymmetrischen Fläche lautet:

$$z = f\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$$

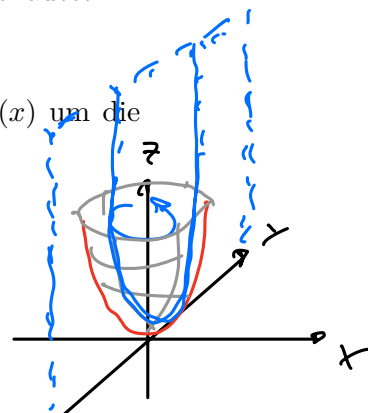
Eine solche Rotationsfläche entsteht durch Drehung der Kurve $z = f(x)$ um die z -Achse.

Beispiel: $f(x,y) = x^2 + y^2$

Dies ist die Rotation der Normalparabel $z = x^2$ um die z -Achse, denn:

$$z = f\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) = \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 = x^2 + y^2$$

Der Graph ergibt die Mantelfläche eines Rotationsparaboloids.



4. Schnittkurvendiagramme

Einen sehr anschaulichen Einblick in die Struktur einer Funktion $z = f(x,y)$ ermöglichen Schnittkurvendiagramme, die man durch ebene Schnitte der zugehörigen Bildfläche erhält. Meist werden dabei Schnitte parallel zu einer der drei Koordinatenebenen gewählt.

- Schnitte parallel zur x,y -Ebene ($z=\text{const}$) erhält man für $f(x,y)=\text{const}$
- Schnitte parallel zur y,z -Ebene ($x=\text{const}$) erhält man für $z = f(\text{const},y)$
- Schnitte parallel zur x,z -Ebene ($y=\text{const}$) erhält man für $z = f(x,\text{const})$

Beispiel:

Schnittkurven der Rotationsfläche $z = x^2 + y^2$ mit Ebenen die zur y,z Ebene, x,z Ebene parallel verlaufen

y,z -Ebene: $z = y^2 + C$ Dies sind nach oben verschobene Normalparabeln

x,z -Ebene: $z = x^2 + C$ Dies sind nach oben verschobene Normalparabeln

Beispiel:

Schnittkurven der Zustandsgleichung des idealen Gases $pV = RT$ mit der p,V -Ebene

$$(T \text{ const}): p = \frac{C}{V}$$

5. Höhenliniendiagramm

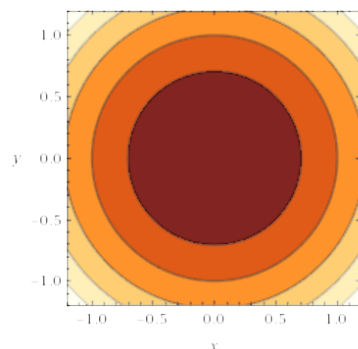
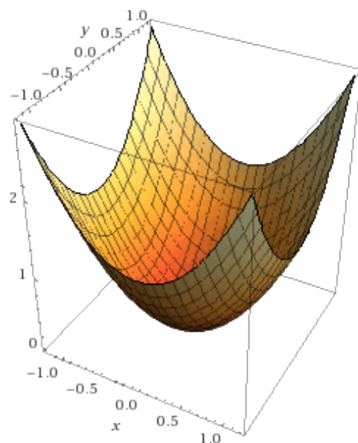
Das bekannteste Schnittliniendiagramm ist das sog. Höhenliniendiagramm. Beim Höhenliniendiagramm werden alle auf der Fläche $z = f(x,y)$ gelegenen Punkte gleicher Höhe $z = c$ zu einer Flächenkurve zusammengefasst.

Die Höhenlinien einer Funktion $z = f(x,y)$ genügen der impliziten Kurvengleichung $f(x,y) = \text{const}$

Beispiel:

Höhenlinien der Rotationsfläche $z = x^2 + y^2$

Die Höhenlinien sind Kreise $x^2 + y^2 = C$



4.4 Differentiation

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (f(x_1, x_2, \dots, x_n))$$

 Δx dx ∂x

4.4.1 Partielle Ableitung 1. Ordnung

Wir betrachten hier die Ableitung von Funktionen mehrerer Variablen.

Es sei $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ eine Funktion mit n Variablen und $a = (a_1 | a_2 | \dots | a_n)$ ein Punkt des Definitionsbereiches von f . Existiert der Grenzwert

$$\lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{f(a_1, a_2, \dots, a_i + \Delta x_i, \dots, a_n) - f(a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_n)}{\Delta x_i}$$

so heisst dieser Grenzwert die

partielle Ableitung von f nach der Variablen x_i an der Stelle a .

kurz: $\left[\frac{\partial f}{\partial x_i} \right]$ oder auch $\left[f_{x_i} \right]$

$$f_x$$

$$f_y$$

$$f_{xy}$$

und die Funktion **f heisst im Punkt a partiell nach x_i ableitbar.**

Die Funktion **f heisst partiell differenzierbar**, wenn sie an jedem Punkt $a \in \mathbb{D}$ bzgl jeder Variablen differenzierbar ist.

$$f(x, y) = x y^2$$

$$f_x = y^2$$

$$f_y = x \cdot 2y$$

$$f_{xy} = 2y$$

$$f_{yx} = 2y$$

Beispiele:

Berechnen Sie für die nachfolgenden Funktionen $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ die partiellen Ableitungen.

1. $f(x, y) = x^2 + y^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = 2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = f_y = 2y$$

2. $f(x, y) = 2y^3 + 6x^2c - 24x + 6y$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = 18x^2c - 24$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = f_y = 6y^2 + 6$$

konstante gegenüber x

3. $f(x, y) = \sin(2x) \cdot \cos(y)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = 2\cos(y) \cdot \cos(2x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = f_y = -\sin(2x) \cdot \sin(y)$$

4. $f(x, y) = x^2 + 3xy$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = 2x + 3y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = f_y = 3x$$

5. $f(x, y, z) = x \cdot y^2 \cdot z^3$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = y^2 z^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = f_y = 2xyz^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = f_z = 3xy^2 z^2$$

6. $f(x, y, z) = x \cdot \sin(yz)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = \sin(yz)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = f_y = xz \cos(yz)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = f_z = xy \cos(yz)$$

4.4.2 Partielle Ableitung 2. Ordnung

Die partiellen Ableitungen 1. Ordnung können, sofern sie differenzierbar sind, wiederum partielle abgeleitet werden. Dabei entstehen partielle Ableitungen 2. Ordnung:

Handwritten notes:
 "Nabla Operator"
 für eine Dimension
 "Nabla-Operator"
 "denke zweimal ab" (nach x)
 "Vektor mit 3 Dimensionen"

$$\frac{\partial f}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{yx}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}$$

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} \quad \vec{\nabla}^2 = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}^2$$

Satz von Schwarz

Wenn die zweiten partiellen Ableitungen stetig sind, so kann man die Reihenfolge der Ableitung vertauschen:

$$f_{xy} = f_{yx} \text{ bzw. } f_{xz} = f_{zx} \text{ bzw. } f_{yz} = f_{zy}, \dots$$

Beispiel:

$$f(x, y) = x^2 \cdot \sin(xy) \Rightarrow$$

$$f_x(x, y) = 2x \cdot \sin(xy) + x^2 y \cdot \cos(xy)$$

$$f_y(x, y) = x^3 \cdot \cos(xy)$$

$$f_{xx}(x, y) = 2 \sin(xy) + 2xy \cos(xy) + 2xy \cos(xy) - x^2 y^2 \sin(xy)$$

$$f_{yy}(x, y) = -x^4 \sin(xy)$$

$$f_{yx}(x, y) = 2x^2 \cos(xy) + x^2 \cos(xy) - x^3 y \sin(xy) = f_{xy}(x, y) = 3x^2 \cos(xy) - x^3 y \sin(xy)$$

4.4.3 Gradient

Der Gradient der partiell differenzierbaren Funktion $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ist der Spaltenvektor aus den partiellen Ableitungen von f :

Temperaturverteilung

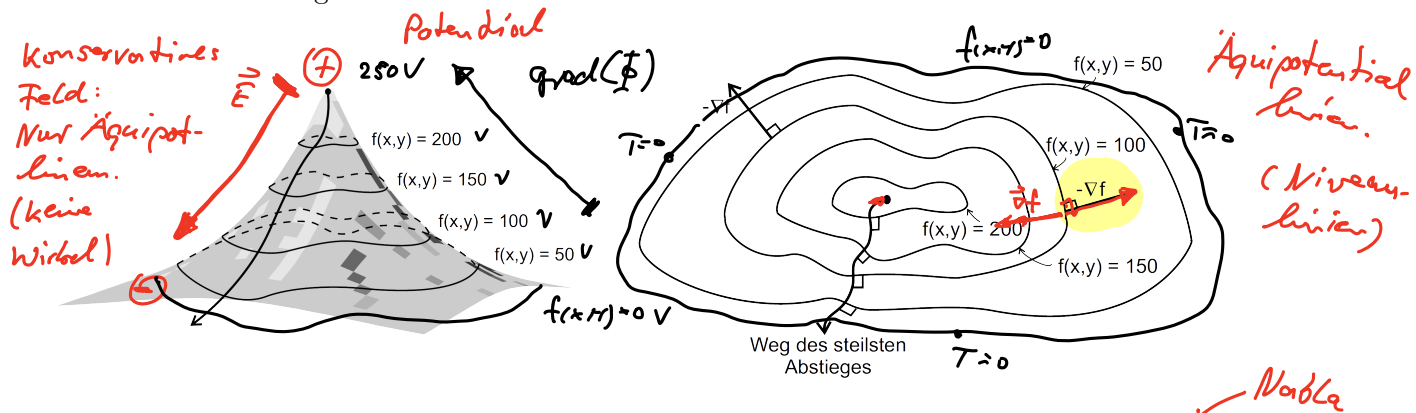
Ableitung nach x_1

$$\text{grad}(f) = \begin{pmatrix} f_{x_1} \\ f_{x_2} \\ \dots \\ f_{x_n} \end{pmatrix} = \vec{\nabla} f \quad (\text{mit } \vec{\nabla} \text{ dem Nabla-Operator})$$

Gradient

Nabla-Operator

Die Eigenschaften lassen sich gut an einem bergförmigen Graphen veranschaulichen: Höhenlinien des Berges sind die Niveaulinien der Funktion.



Die Gradienten stehen immer senkrecht zu gedachten Tangenten an diese Niveaulinien. $\vec{\nabla} f$ weist in die Richtung des steilsten Anstiegs, während $-\vec{\nabla} f$ die Richtung des steilsten Abstiegs angibt.

Beispiele:

Berechnen Sie die Gradienten folgender Funktionen:

1. $f(x, y) = x^2 y^2 + y + 1$

Nabla

$$\vec{\nabla} f(x, y) = \text{grad}(f(x, y)) = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy^2 \\ 2x^2y + 1 \end{pmatrix}$$

2. $f(x, y) = x^2 \cdot e^{x^2 + y^2}$

$$\vec{\nabla} f(x, y) = \text{grad}(f(x, y)) = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(x^3 + x) \cdot e^{x^2 + y^2} \\ 2x^2 y e^{x^2 + y^2} \end{pmatrix}$$

3. $f(x, y) = x^2 \cdot \sin(y)$ an der Stelle $(0 | \frac{\pi}{2})$

$$\vec{\nabla} f(x, y) = \text{grad}(f(x, y))_{(0, \frac{\pi}{2})} = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix}_{(0, \frac{\pi}{2})} = \begin{pmatrix} 2x \cdot \sin(y) \\ x^2 \cdot \cos(y) \end{pmatrix}_{(0, \frac{\pi}{2})} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Rechenregeln:

Es seien f, g zwei beliebige n -dimensionale Funktionen und c eine Konstante. Dann gilt:

- $\text{grad}(c) = \vec{0}$
- $\text{grad}(cf) = c \cdot \text{grad}(f)$
- $\text{grad}(f + g) = \text{grad}(f) + \text{grad}(g)$
- $\text{grad}(fg) = f \cdot \text{grad}(g) + g \cdot \text{grad}(f)$
- $\text{grad}(f^n) = n f^{n-1} \text{grad}(f)$ für $n \neq 0$

Beispiel:

Gradient der Funktion $f(x, y) = g(x, y) \cdot h(x, y) = \sin(xy) \cdot xy^2$

Es ist $\text{grad}(f) = \begin{pmatrix} y \cos(xy) xy^2 + \sin(xy) y^2 \\ x \cos(xy) xy^2 + \sin(xy) 2xy \end{pmatrix}$

Im Vergleich dazu ist:

$\text{grad}(g) = \begin{pmatrix} y \cos(xy) \\ x \cos(xy) \end{pmatrix}$ und $\text{grad}(h) = \begin{pmatrix} y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}$

$g \cdot \text{grad}(h) + h \cdot \text{grad}(g) = \sin(xy) \begin{pmatrix} y^2 \\ 2xy \end{pmatrix} + xy^2 \begin{pmatrix} y \cos(xy) \\ x \cos(xy) \end{pmatrix}$

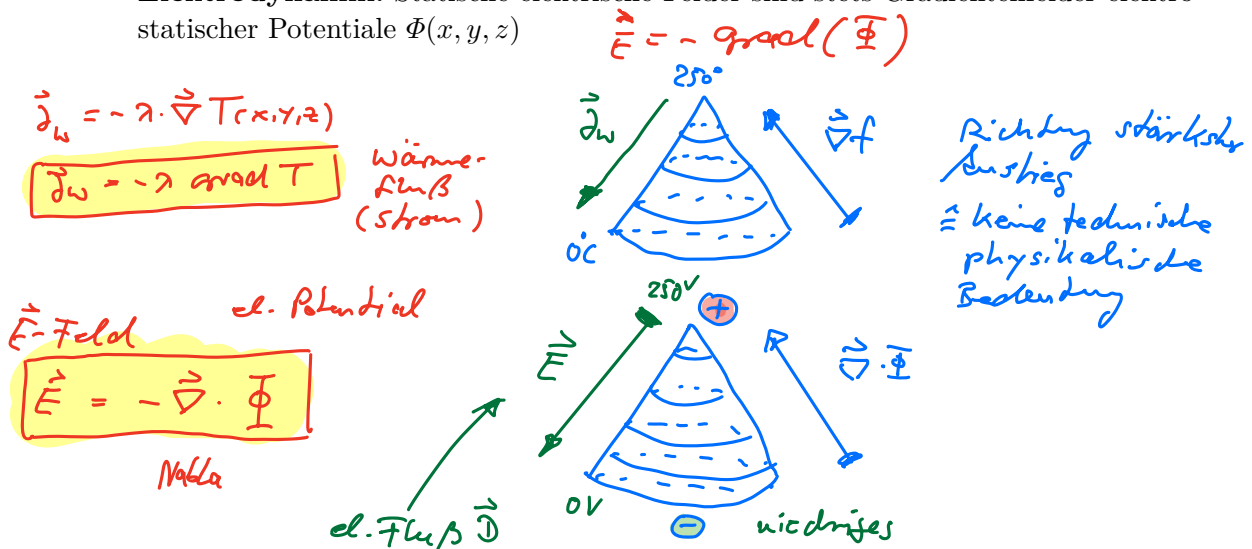
Bemerkung:

Befindet man sich an einem lokalen Minimum oder Maximum oder Sattelpunkt, so ist der Gradient an dieser Stelle gerade der Nullvektor.

keine Auslegung

Anwendungen:

- **Thermodynamik:** Sind Teile eines Körpers unterschiedlich heiß, so strömt Wärme von den heißeren zu den kühleren Bereichen. Ist die Wärmeleitfähigkeit überall gleich, so ist der Wärmestrom ein Vielfaches des Temperaturgradienten. Für den Wärmestrom J_w und der Wärmeleitfähigkeit λ gilt: $J_w = -\lambda \text{grad}(T)$
- **Elektrodynamik:** Statische elektrische Felder sind stets Gradientenfelder elektrostatischer Potentiale $\Phi(x, y, z)$



4.4.4 Richtungsableitung

Mit Hilfe des Gradienten lässt sich auch der Anstieg in jeder beliebigen Richtung, d.h. die Richtungsableitung, ermitteln.

Unter der Richtungsableitung versteht man die Ableitung, also den Anstieg in Richtung eines normierten Vektors $\vec{v}$, d.h.

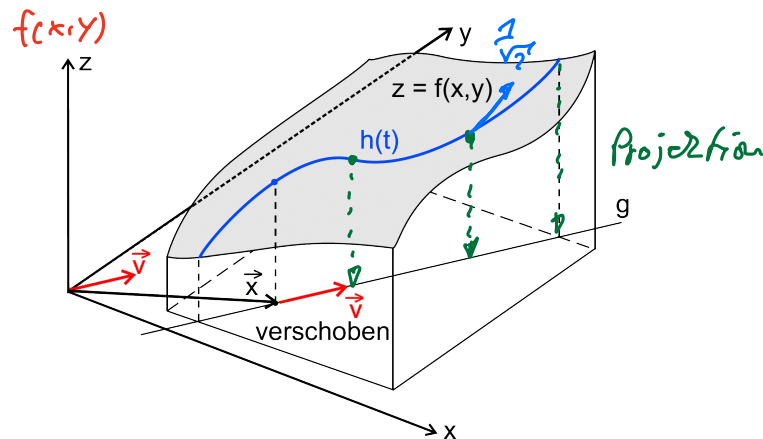
$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\vec{x} + t\vec{v})}{t}$$

Ist f differenzierbar, so kann man die Richtungsableitung als Skalarprodukt aus $\text{grad}(f)$ und $\vec{v}$ berechnen:

$$\text{grad}(f) \circ \vec{v}$$

Skalarprodukt

Sei $h(t) := f(\vec{x} + t\vec{v})$. Die Menge aller Punkte der Form $\vec{x} + t\vec{v}$, $t \in \mathbb{R}$ ist offensichtlich die Gerade g durch den Punkt $\vec{x}$ parallel zum Vektor $\vec{v}$. Daher stellt die Funktion h die Funktion f eingeschränkt auf die Gerade g dar.



Beispiel:

Es sei $f(x, y) = x^3 \cdot \sin(y) + e^x \cdot y^2$.

Berechnen Sie die Richtungsableitung von f in Richtung des Einheitsvektors $\vec{v}$ mit

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \text{ im Punkt } (1|0)$$

$$\left(\text{grad}(f) \circ \vec{v} \right)_{(1|0)} = \begin{pmatrix} 3x^2 \sin(y) + e^x y^2 \\ x^3 \cos(y) + 2e^x y \end{pmatrix}_{(1|0)} \circ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

x, y

12.5.2025

Pause Sir 11:15

Klausur

4.4.5 Vollständiges Differential

vgl. Fehlerbreitung Messrechnung

Unter einem Differential versteht man den linearen Anteil des Zuwachses einer Variablen oder einer Funktion.

Das vollständige Differential, auch totales Differential genannt berechnet sich als Skalar-

produkt aus dem Gradienten mit dem Vektor $\begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \dots \\ dx_n \end{pmatrix}$:

$$df = \text{grad}(f) \circ \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \dots \\ dx_n \end{pmatrix} = f_{x_1} dx_1 + f_{x_2} dx_2 + \dots + f_{x_n} dx_n = df$$

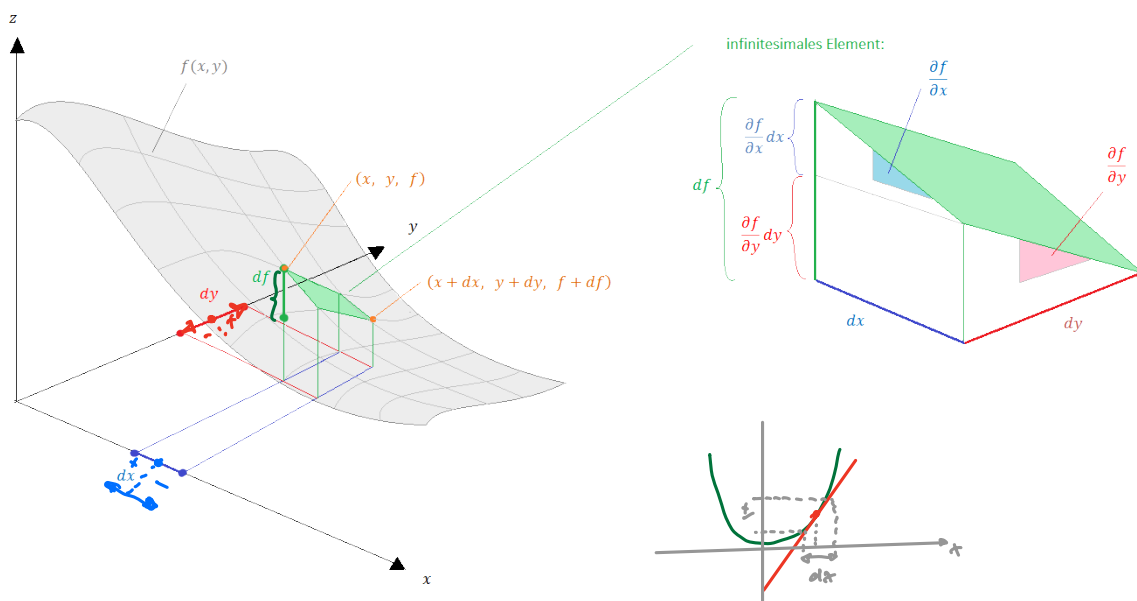
$A = b \cdot l$
 $A_b = l$
 $A_l = b$

Δb Δl
 $\uparrow$ $\uparrow$
 Messwert $\bar{b}$ Messwert $\bar{l}$

$= df$
 $\uparrow$
 dA

Für eine Funktion $f(x,y)$ lautet das vollständige Differential: $df = f_x dx + f_y dy$

$$\text{grad}(b \cdot l) \circ \begin{pmatrix} db \\ dl \end{pmatrix} = l \cdot dl + b \cdot db = dA \quad A = \bar{A} \pm dA$$



Beispiele:

Kette

1. $f(x,y) = x^2 + y^2$.

Das totale Differential ist:

$$df = 2x dx + 2y dy$$

$$u = 1 + x^2 + y^2 \Rightarrow \frac{1}{u} \frac{d}{du} = -\frac{1}{u^2}$$

2. $f(x,y) = \frac{1}{1+x^2+y^2} = u$

Substitution + Kettenregel

Das totale Differential ist:

$$df = -2x \cdot \frac{1}{(1+x^2+y^2)^2} \cdot dx - 2y \cdot \frac{1 \cdot dy}{(1+x^2+y^2)^2}$$

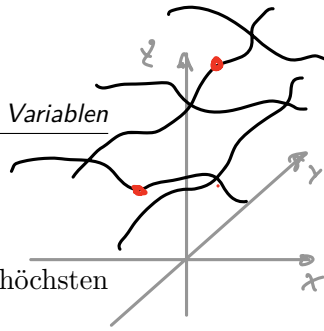
3. $f(x,y,z) = xyz$.

Das totale Differential ist:

$$df = yz dx + xz dy + xy dz$$

Klausur!

$$df = y \cdot z \cdot dx + x \cdot z \cdot dy + x \cdot y \cdot dz$$



4.4.6 Lokale Extremwerte von $f(x, y) = z$

$$f(x, y) = z$$

Gesucht sind Punkte $(x|y)$ deren Funktionswerte $z = f(x, y)$ in einer Umgebung am höchsten (lokales Maximum) oder am niedrigsten (lokales Minimum) ist.

Notwendige Bedingung für einen lokalen Extremwert:

$$\text{grad}(f) = \vec{0}$$

Hinreichende Bedingung für einen lokalen Extremwert:

$$\text{grad}(f) = \vec{0} \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} > 0 \quad (\text{Hesse-Matrix})$$

Ist $f_{xx} < 0$, dann liegt ein relatives Maximum vor

Ist $f_{xx} > 0$, dann liegt ein relatives Minimum vor

Bemerkungen:

- Ist $\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} < 0$, so liegt ein Sattelpunkt vor
- Ist $\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = 0$, so kann keine Aussage getroffen werden

Beispiel:

Bestimmen Sie die relativen Extremwerte folgender Funktion:

$$1 \quad f(x, y) = -x^2 + 6xy + 8x - y^2 - 16y - 14$$

$$f_x(x, y) = -2x + 6y + 8 = 0$$

$$f_y(x, y) = 6x - 2y - 16 = 0$$

$$f_{xx} = -2$$

$$f_{yy} = -2$$

$$f_{xy} = 6 = f_{yx}$$

Lineares Gleichungssystem:

$$\Rightarrow x = 3y + 4$$

$$3 \cdot (3y + 4) - y = 8$$

$$9y + 12 - y = 8$$

$$8y = -4 \Rightarrow y = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 4 = -\frac{3}{2} + \frac{8}{2} = \frac{5}{2}$$

Extrempunkt bei $(5/2, -1/2)$

Hesse-Matrix:

$$\begin{pmatrix} f_{xx} = -2 & f_{xy} = 6 \\ f_{yx} = 6 & f_{yy} = -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 6 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = (-2) \cdot (-2) - (6 \cdot 6) = 4 - 36 = -32 < 0$$

$\Rightarrow$ Sattelpunkt bei $(5/2, -1/2)$

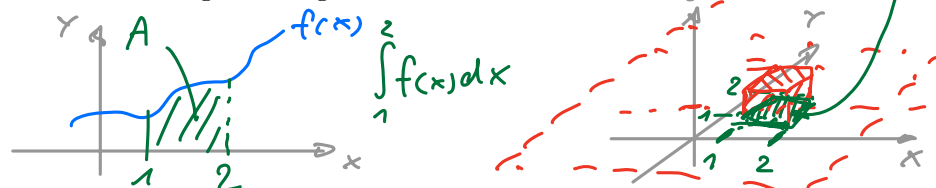
4.5 Mehrfachintegrale

Wir betrachten die Integration einer Funktion von mehreren unabhängigen Variablen. Von praktischer Bedeutung ist dabei, dass sich ein Mehrfachintegral auf mehrere nacheinander auszuführende einfache Integrale zurückführen lässt.

Legt man noch ein Koordinatensystem zugrunde, das sich der Symmetrie des Problems besonders anpasst, so vereinfacht sich die Berechnung der Integrale oft erheblich.

4.5.1 Doppelintegrale

Unter einem Doppelintegral



$$V = \iint_{(A)} f(x,y) dA$$

versteht man den Grenzwert

$$\lim_{\Delta A_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^{n(A_k)} f(x_k, y_k) \Delta A_k$$

zur Berechnung des Volumens unter einer Fläche $z = f(x,y)$

immer LE

$$f(x,y) = x \cdot y$$

LE

$$\begin{aligned} & \int_1^2 \int_1^2 1 \cdot dA \\ & \int_1^2 \int_1^2 1 \cdot dx \cdot dy \\ & \underbrace{\int_1^2 1 \cdot dx}_{LE} \cdot \underbrace{\int_1^2 1 \cdot dy}_{FE} \\ & \underbrace{LE}_{VE} \end{aligned}$$

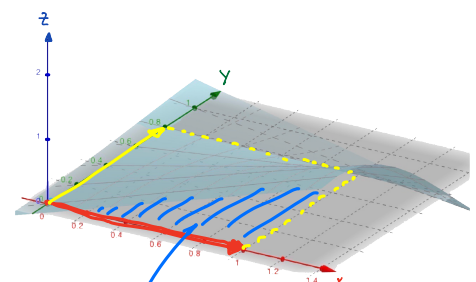
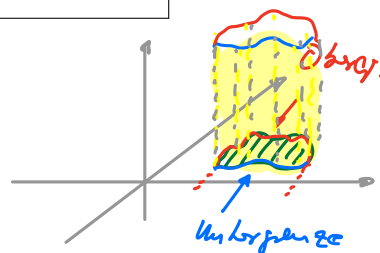
Berechnung:

Ist die Grundfläche A des Doppelintegrals eingeschlossen zwischen einer oberen Randkurve $y_o = f_o(x)$ und einer unteren Randkurve $y_u = f_u(x)$ zwischen den beiden Begrenzungen $x = a$ und $x = b$, so berechnet sich das Doppelintegral:

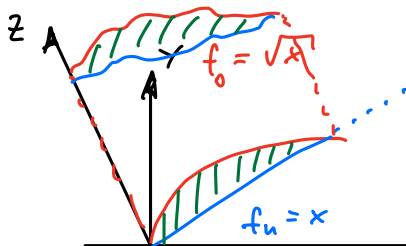
$$V = \iint_{(A)} f(x,y) dA = \int_a^b \int_{y=f_u(x)}^{y=f_o(x)} f(x,y) dy dx$$

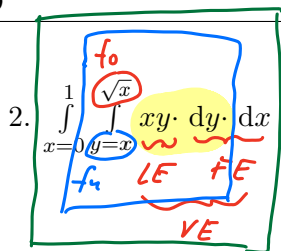
Beispiele:

$$\begin{aligned} 1. \quad V &= \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^{\frac{\pi}{4}} x \cdot \cos(2y) \cdot dy \cdot dx \\ &= \int_{x=0}^1 x \left[\frac{1}{2} \sin(2y) \right]_{y=0}^{\frac{\pi}{4}} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{x=0}^1 x \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(0) \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{x=0}^1 x dx \\ &= \frac{1}{4} \left[x^2 \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

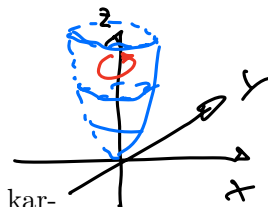
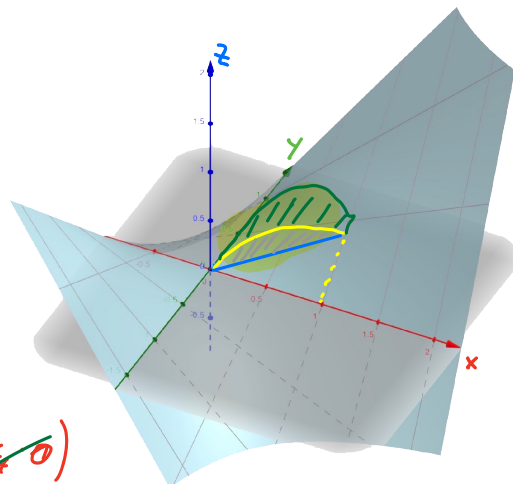


Volumen über Grundfläche (Rechteck) $x \in [0; 1]$ $y \in [0; \frac{\pi}{4}]$





$$\begin{aligned}
 2. \int_{x=0}^1 \int_{y=x}^{\sqrt{x}} xy \cdot dy \cdot dx &= \int_{x=0}^1 x \cdot \left(\int_{y=x}^{\sqrt{x}} y \cdot dy \right) \cdot dx \\
 &= \int_{x=0}^1 x \cdot \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_{y=x}^{\sqrt{x}} dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_{x=0}^1 x \cdot ((\sqrt{x})^2 - (x)^2) dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_{x=0}^1 x \cdot (x - x^2) dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_{x=0}^1 (x^2 - x^3) dx \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{4} x^4 \right]_{x=0}^1 \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} \cdot 1 - \frac{1}{4} \cdot 1 - \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{4} \cdot 0 \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{12} - \frac{3}{12} \right) \\
 &= \frac{1}{24}
 \end{aligned}$$



4.5.2 Doppelintegrale in Polarkoordinaten

Oftmals vereinfacht sich die Berechnung eines Doppelintegrals, wenn man an Stelle der kartesischen Koordinaten x und y Polarkoordinaten r und φ nimmt.

Zwischen kartesischen Koordinaten und Polarkoordinaten besteht folgender Zusammenhang:

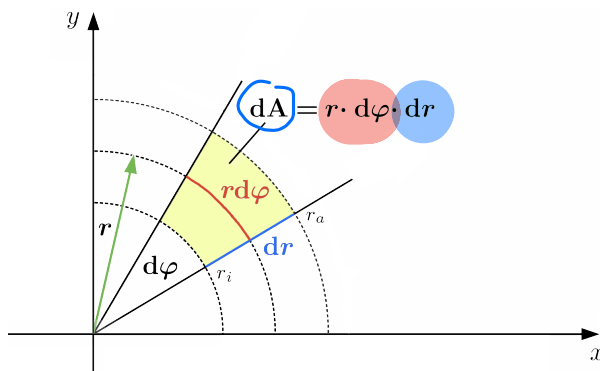
$$x = r \cos(\varphi), y = r \sin(\varphi) \quad (r \geq 0, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi)$$

Beim Übergang in Polarkoordinaten geht eine Funktion $z = f(x, y)$ über in $z = F(r, \varphi)$. Ein Flächenelement in Polarkoordinaten wird von 2 Kreisen mit den Radien r und $r+dr$ und von zwei benachbarten Strahlen mit den Winkeln φ und $\varphi+d\varphi$ begrenzt.

Für das Flächenelement dA gilt: $dA = r \cdot d\varphi \cdot dr$ (Hinweis: Funktionaldeterminante)

Ein Doppelintegral lässt sich somit in Polarkoordinaten folgendermassen darstellen:

$$\iint_{(A)} f(x, y) dA = \int_{\varphi=\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{r=r_i(\varphi)}^{r_a(\varphi)} f(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)) \cdot \underbrace{r \cdot dr \cdot d\varphi}_{dA}$$

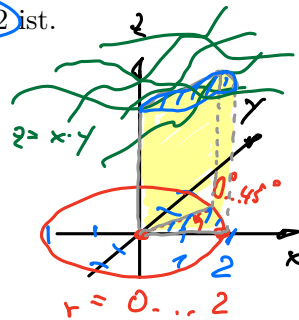


Pause
bis 11:15

Beispiele:

1. Welchen Wert besitzt das Doppelintegral $\iint_A xy \, dA$ über der Integrationsfläche A , die ein Kreisausschnitt zwischen $\varphi = 0^\circ$ und $\varphi = 45^\circ$ des Kreises mit Radius 2 ist.

$$\begin{aligned} \iint_{(A)} xy \, dA &= \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{4}} \int_{r=0}^2 \underbrace{r \cos(\varphi)}_x \cdot \underbrace{r \sin(\varphi)}_y \cdot \underbrace{r \cdot dr \cdot d\varphi}_{dA \cdot d\varphi} \\ &= \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{4}} \cos(\varphi) \cdot \sin(\varphi) \left(\int_{r=0}^2 r^3 \cdot dr \right) d\varphi \\ &= \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{4}} \cos(\varphi) \cdot \sin(\varphi) \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^2 d\varphi \\ &= 4 \cdot \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{4}} \cos(\varphi) \sin(\varphi) \, d\varphi \quad \rightarrow \text{FS oder Produktregel} \\ &= 2 \left[\sin^2(\varphi) \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= 2 \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \end{aligned}$$



FS

$$\int \sin(t) \cdot \cos(t) \, dt$$

$$= \frac{1}{2} \sin^2(t) + C$$

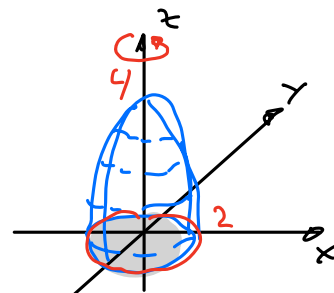
oder

Produktregel

2. Durch Drehung des Parabelstückes $z = 4 - x^2$ für $z \geq 0$ um die z -Achse entsteht die Funktion $z = 4 - (x^2 + y^2)$.

Der so entstandene Rotationskörper hat eine Bodenfläche, die in der x, y -Ebene liegt. Es soll das Volumen berechnet werden:

$$\begin{aligned} V &= \iint_{(A)} (4 - (x^2 + y^2)) \, dA = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^2 (4 - r^2) \cdot r \cdot dr \cdot d\varphi \\ &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left(\int_{r=0}^2 (4r - r^3) \cdot dr \right) d\varphi \\ &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left[2r^2 - \frac{r^4}{4} \right]_0^2 d\varphi \\ &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} (8 - 4) d\varphi \\ &= 4 \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \\ &= 4 \cdot 2\pi = 8\pi \end{aligned}$$



$$z = 4 - x^2 - y^2$$

$$x^2 + y^2 = 0$$

$x = r \cos \varphi$
 $y = r \sin \varphi$
 $\Rightarrow$ Kreis mit Radius r

$f(x, y)$ ausdrücken in $F(r, \varphi)$

$$x = r \cdot \cos \varphi$$

$$y = r \cdot \sin \varphi$$

Annahme: $z = 0$

$$z = 4 - x^2$$

$$0 = 4 - x^2$$

$$x^2 = 4$$

$$x_{1/2} = \pm 2 \Rightarrow r = 2$$

4.5.3 Flächeninhalt

Der Flächeninhalt A eines Normalbereiches (A) lässt sich mit Hilfe der Integration unter der Funktion $f(x,y) = 1$ berechnen:

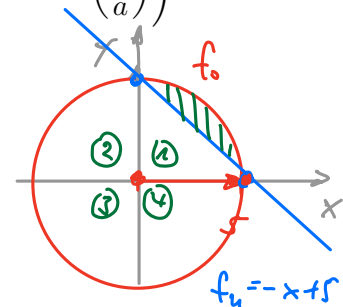
$$A = \iint_{(A)} dA = \int_{x=a}^b \int_{y=f_u(x)}^{f_o(x)} 1 \cdot dy \cdot dx = \int_{\varphi=\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{r=r_i(\varphi)}^{r_a(\varphi)} 1 \cdot r \cdot dr \cdot d\varphi$$

Beispiel:

1. Berechnung der im ersten Quadrant gelegenen Fläche zwischen der Kreislinie $x^2 + y^2 = 25$ und der Geraden $y = -x + 5$.

Verwenden Sie dazu die Beziehung: $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2} \left(x \sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \cdot \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) \right)$.

$$\begin{aligned}
 A &= \iint_{(A)} dA = \int_{x=0}^5 \left(\int_{f_u=-x+5}^{f_o=\sqrt{25-x^2}} 1 \cdot dy \right) \cdot dx \\
 &= \int_{x=0}^5 \left[\sqrt{25-x^2} + x - 5 \right] dx \\
 &= \left[\frac{1}{2} \left(x \cdot \sqrt{25-x^2} + 25 \cdot \arcsin\left(\frac{x}{5}\right) \right) + \frac{x^2}{2} - 5x \right]_{x=0}^5 \\
 &= \frac{1}{2} \left(5 \cdot \sqrt{25-5^2} + 25 \cdot \arcsin\left(\frac{5}{5}\right) \right) + \frac{5^2}{2} - 5 \cdot 5 \\
 &= \frac{1}{2} \left(25 \cdot \frac{\pi}{2} \right) + \frac{25}{2} - 25 = 12.5 \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) \quad [FE]
 \end{aligned}$$



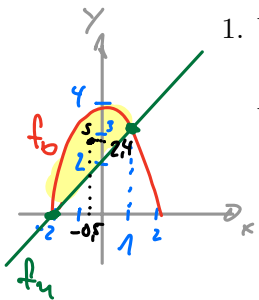
$$\begin{aligned}
 x^2 + y^2 &= 25 \\
 y^2 &= 25 - x^2 \\
 f_o &= \sqrt{25 - x^2}
 \end{aligned}$$

4.5.4 Schwerpunkt einer Fläche

Die Schwerpunktskoordinaten x_s und y_s einer homogenen ebenen Fläche vom Flächeninhalt A sind definiert durch:

$$x_s = \frac{1}{A} \iint_{(A)} x \cdot dA \quad y_s = \frac{1}{A} \iint_{(A)} y \cdot dA$$

Beispiele:



1. Wo liegt der Schwerpunkt S der Fläche, die von der Parabel $y = -x^2 + 4$ und der Geraden $y = x + 2$ begrenzt wird?

Wir berechnen zunächst die Fläche A :

$$\begin{aligned} A &= \iint_{(A)} dA = \int_{x=-2}^1 \int_{y=x+2}^{-x^2+4} 1 \cdot dy \cdot dx = \int_{-2}^1 \left[-x^2 + 4 - x - 2 \right] dx \\ &= \int_{-2}^1 \left[-x^2 + 4 - x - 2 \right] dx \\ &= \left[-\frac{x^3}{3} + 2x - \frac{x^2}{2} \right]_{x=-2}^1 \\ &= \left(-\frac{1}{3} + 2 - \frac{1}{2} \right) - \left(-\frac{8}{3} - 4 - \frac{4}{2} \right) = -3 + 6 + \frac{3}{2} = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

NR.

$$\begin{aligned} -x^2 + 4 &= x + 2 \\ -x^2 + 4 - 2 - x &= 0 \\ x^2 - 2 + x &= 0 \\ x_1 &= 1, \quad x_2 = -2 \\ (-2)^2 - 2 - 2 &= 0 \\ 4 - 2 - 2 &= 0 \\ 0 &= 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$

Berechnung der Schwerpunktskoordinate x_s :

$$\begin{aligned} x_s &= \frac{1}{A} \iint_{(A)} x \cdot dA = \frac{2}{9} \int_{x=-2}^1 \int_{y=x+2}^{-x^2+4} x \cdot dy \cdot dx = \frac{2}{9} \int_{-2}^1 x \cdot \left[-x^2 + 4 - x - 2 \right] dx \\ &= \frac{2}{9} \int_{x=-2}^1 x \left(-x^2 + 4 - x - 2 \right) dx \\ &= \frac{2}{9} \int_{x=-2}^1 \left(-x^3 + 2x - x^2 \right) dx \\ &= \frac{2}{9} \left[-\frac{x^4}{4} + x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_{x=-2}^1 \\ &= \frac{2}{9} \left[\left(-\frac{1}{4} + 1 - \frac{1}{3} \right) - \left(-\frac{16}{4} + 4 - \frac{-8}{3} \right) \right] \\ &= \frac{2}{9} \left[\frac{15}{4} - 3 - 3 \right] = \frac{-2 \cdot 9}{9 \cdot 4} = -0.5 \end{aligned}$$

Berechnung der Schwerpunktskoordinate y_s :

$$\begin{aligned}
 y_s &= \frac{1}{A} \iint_{(A)} y \cdot dA = \frac{2}{9} \int_{x=-2}^1 \int_{y=x+2}^{-x^2+4} y \cdot dy \cdot dx \\
 &= \frac{2}{9} \int_{x=-2}^1 \left[\frac{y^2}{2} \right]_{x+2}^{-x^2+4} dx \\
 &= \frac{2}{9} \int_{x=-2}^1 \left[\frac{(-x^2+4)^2}{2} - \frac{(x+2)^2}{2} \right] dx \\
 &= \frac{1}{9} \int_{x=-2}^1 [x^4 - 8x^2 + 16 - x^2 - 4x - 4] dx \\
 &= \frac{1}{9} \left[\frac{x^5}{5} - 3x^3 + 12x - 2x^2 \right]_{x=-2}^1 \\
 &= \frac{1}{9} \left[\left(\frac{1}{5} - 3 + 12 - 2 \right) - \left(\frac{-32}{5} + 24 - 24 - 8 \right) \right] \\
 &= \frac{1}{9} \left[\frac{33}{5} + 15 \right] = \frac{36}{3 \cdot 5} = \frac{12}{5} = 2.4
 \end{aligned}$$

$$S = \left(-\frac{1}{2} ; 2.4 \right)$$

4.5.5 Dreifachintegrale

Ein Dreifachintegral ist die Verallgemeinerung des Doppelintegrals für Funktionen mit drei unabhängigen Variablen.

$$\iiint_{(V)} f(x,y,z) dV = \int_{x=a}^b \int_{y=f_u(x)}^{f_o(x)} \int_{z=z_u(x,y)}^{z_o(x,y)} f(x,y,z) \cdot dz \cdot dy \cdot dx$$

Beispiel:

$$\begin{aligned}
 \int_{x=1}^2 \int_{y=0}^x \int_{z=0}^{x-y} y \cdot e^z \cdot dz \cdot dy \cdot dx &= \int_{x=1}^2 \int_{y=0}^x \left[y \cdot e^z \right]_{z=0}^{x-y} dy \cdot dx \\
 &= \int_{x=1}^2 \int_{y=0}^x (y \cdot e^{x-y} - y) dy \cdot dx \\
 &= \int_{x=1}^2 \left[-\frac{y^2}{2} - (y+1)e^{x-y} \right]_{y=0}^x \cdot dx \\
 &= \int_{x=1}^2 \left(-\frac{x^2}{2} - x + e^x - 1 \right) \cdot dx \\
 &= \left[e^x - \frac{1}{6}x(x^2 + 3x + 6) \right]_{x=1}^2 \\
 &= e^2 - \frac{1}{6} \cdot 2(2^2 + 3 \cdot 2 + 6) - \left(e^1 - \frac{1}{6}(1^2 + 3 + 6) \right) \\
 &= (e-1)e - \frac{11}{3} \approx 1.0041 \quad [VE]
 \end{aligned}$$

NR.

$$\int y \cdot e^{x-y} dy$$

$$\int y \cdot e^x \cdot e^{-y} dy$$

Produktregel

↓ 19.5

4.5.6 Dreifachintegral in Zylinderkoordinaten

Die Zylinderkoordinaten eines Raumpunktes P berechnen sich aus den kartesischen Koordinaten (x, y, z) wie folgt:

$$\boxed{x = r \cos(\varphi)} \quad \boxed{y = r \sin(\varphi)} \quad \boxed{z = z}$$

Ein Dreifachintegral lässt sich damit in Zylinderkoordinaten berechnen durch:

$$\iiint_{(V)} f(x, y, z) dV = \iiint_{(V)} f(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi), z) \underbrace{r \, dz \, dr \, d\varphi}_{dV}$$

4.5.7 Volumen und Masse eines Körpers

Das Volumen eines Körpers berechnet sich als Dreifachintegral der Funktion $f(x, y, z) = 1$ über dem Volumen (V) .

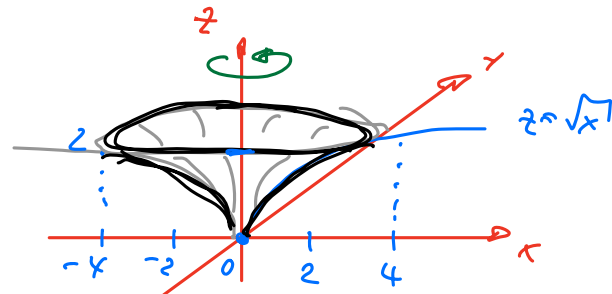
Die Masse eines Körpers berechnet sich als Dreifachintegral der Dichte-Funktion $\rho(x, y, z)$ über dem Volumen (V) .

Dichte

Beispiel:

1. Durch Rotation des Kurvenstückes $z = \sqrt{x}$ für $0 \leq x \leq 4$ um die z -Achse entsteht ein trichterförmiger Drehkörper, dessen Volumen bestimmt werden soll:

$$\begin{aligned} V &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^4 \int_{z=\sqrt{r}}^2 r \cdot dz \cdot dr \cdot d\varphi \\ &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left[\int_{r=0}^4 r \left[\int_{z=\sqrt{r}}^2 dz \right] \cdot dr \right] d\varphi \\ &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left[\int_{r=0}^4 r [2 - \sqrt{r}] dr \right] d\varphi \\ &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left[\int_{r=0}^4 (2r - r \cdot r^{\frac{1}{2}}) dr \right] d\varphi \\ &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left[r^2 - \frac{2}{5} r^{5/2} \right]_{r=0}^4 d\varphi \\ &= \left(16 - \frac{2}{5} 2^5 \right) \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi = \frac{32\pi}{5} \approx 20.106 \end{aligned}$$



4.5.8 Schwerpunkt eines Körpers

Die Koordinaten des Schwerpunktes eines homogenen Körpers sind:

$$\boxed{x_s = \frac{1}{V} \iiint_{(V)} x \cdot dV} \quad \boxed{y_s = \frac{1}{V} \iiint_{(V)} y \cdot dV} \quad \boxed{z_s = \frac{1}{V} \iiint_{(V)} z \cdot dV}$$

4.5.9 Massenträgheitsmoment

Das Massenträgheitsmoment tritt im Zusammenhang mit Drehbewegungen starrer Körper auf. Das Massenträgheitsmoment J eines homogenen Körpers ist definiert als:

$$\boxed{J = \rho \iiint_{(V)} r_A^2 \cdot dV = \rho \int_{x=a}^b \int_{y=f_u(x)}^{f_o(x)} \int_{z=z_u(x,y)}^{z_o(x,y)} (x^2 + y^2) \cdot dz \cdot dy \cdot dx}$$

r_A ist der senkrechte Abstand des Volumenelementes dV von der Bezugsachse A .

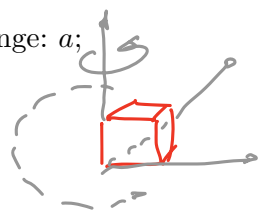
Unter Verwendung von Zylinderkoordinaten ist das **Massenträgheitsmoment** bezogen auf die **Rotationsachse** (z -Achse):

$$\boxed{J_z = \rho \iiint_{(V)} r^3 \cdot dz \cdot dr \cdot d\varphi}$$

Beispiel:

Man bestimme das Massenträgheitsmoment eines homogenen Würfels (Kantenlänge: a ; Dichte: $\rho = \text{const}$) bezüglich einer Kante

$$\begin{aligned} J_z &= \rho \int_{x=0}^a \int_{y=0}^a \int_{z=0}^a (x^2 + y^2) \cdot dz \cdot dy \cdot dx = \rho \int_{x=0}^a \int_{y=0}^a (x^2 + y^2) \cdot a \cdot dy \cdot dx \\ &= \rho \cdot a \int_{x=0}^a \left[yx^2 + \frac{1}{3}y^3 \right]_{y=0}^a \cdot dx \\ &= \rho \cdot a \int_{x=0}^a \left[ax^2 + \frac{1}{3}a^3 \right] \cdot dx \\ &= \rho \cdot a^2 \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}a^2x \right]_{x=0}^a \\ &= \frac{2}{3} \rho \cdot a^5 \end{aligned}$$



4.6 Kurvenintegral

Linienintegral

Wir führen den Begriff eines **Kurvenintegrals** am Beispiel der physikalischen Arbeit ein, die von einer Kraft bzw. einem Kraftfeld beim Verschieben eines Massenpunktes verrichtet wird.

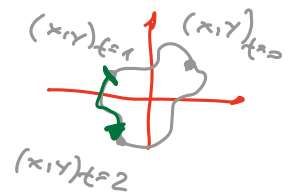
Beim Berechnen der Arbeit ist zu berücksichtigen, dass die auf den Massenpunkt längs der Kurve C einwirkende Kraft von Ort zu Ort verschieden ist:

$$W = \int_C dW = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C (F_x(x,y)dx + F_y(x,y)dy)$$

Handwritten notes: $\vec{F}$ in y -Richtung, F in x -Richtung

Für die Koordinaten x und y setzt man die Parametrisierungen $x(t)$ und $y(t)$ der Integrationskurve C ein:

$$W = \int_{t_1}^{t_2} (F_x(x,y)\dot{x}(t) + F_y(x,y)\dot{y}(t)) \cdot dt$$



Dies kann man auf ein räumliches Vektorfeld übertragen:

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} (\vec{F} \cdot \vec{\dot{r}}) dt$$

Beispiele:

1. Berechnung des Kurvenintegrals $\int_C (ye^x dx + e^x dy)$ längs des parabelförmigen

Verbindungsweges $C: x=t, y=t^2$ der beiden Punkte $(0|0)$ und $(1|1)$.

$$\begin{aligned} \int_C (ye^x dx + e^x dy) &= \int_0^1 (t^2 e^t + e^t 2t) \cdot dt \\ &= \left[(t^2 - 2t + 2 + 2(t-1))e^t \right]_0^1 \\ &= \left[(1 - 2 + 2)e \right] = e \end{aligned}$$

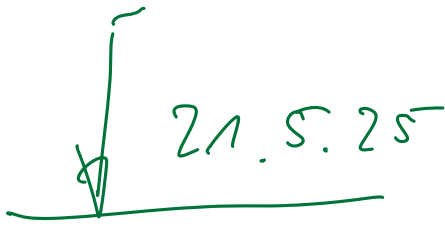
Handwritten notes: $\int_{t_1}^{t_2} y \cdot e^x \cdot \dot{x}(t) \cdot dt$, $\int_{t_1}^{t_2} e^x \cdot \dot{y}(t) \cdot dt$, $\int_0^1 t^2 \cdot e^t \cdot dt \cdot 1 \cdot dt$, $\int_0^1 e^t \cdot 2t \cdot dt$

2. Welchen Wert besitzt das Kurvenintegral des räumlichen Vektorfeldes $\vec{F} = \begin{pmatrix} 2x + y^2 \\ x^2 y z \\ x + z \end{pmatrix}$

längs der Kurve C , die durch den Ortsvektor $\vec{r} = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ t \end{pmatrix}$ mit $0 \leq t \leq 1$ gegeben ist.

$$\begin{aligned} W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^1 \begin{pmatrix} 2t + t^4 \\ t^5 \\ 2t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ 1 \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^1 (2t + t^4 + 2t^6 + 2t) dt \\ &= \left[\frac{2}{7}t^7 + \frac{1}{5}t^5 + 2t^2 \right]_0^1 = \frac{87}{35} \end{aligned}$$

Pause 10:25



KAPITEL 5

Potenzreihen, Taylorreihen

5.1 Motivation

Funktionen vom Typ

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

werden als **ganzzrationale** Funktionen oder **Polynome** bezeichnet.

Polynome besitzen viele besonders einfache und angenehme Eigenschaften:

- Ein Polynom vom Grade n hat genau n (evl. komplexe) Nullstellen.
- Polynome sind stetig
- Polynome sind beliebig oft differenzierbar; die Ableitung ist leicht zu bestimmen
- Polynome sind integrierbar; die Stammfunktion ist einfach zu bestimmen

⇒ Aus diesem Grunde versucht man die bei technischen Problemen auftretenden Funktionen durch Polynome zu approximieren.

Eine Möglichkeit ist die Approximation durch Taylorpolynome.

5.2 Reihen

5.2.1 Definitionen

Ist (a_n) eine Folge, dann wird durch die Teilsummen

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 \\ s_2 &= a_1 + a_2 \\ &\dots \\ s_n &= \sum_{k=1}^n a_k \end{aligned}$$

eine neue Folge (s_n) , nämlich die Reihe zu (a_n) definiert.

Ist die Folge der Teilsummen konvergent, d.h. $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$ so heisst auch die Reihe

konvergent und man schreibt: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s$ oder $a_1 + a_2 + \dots = s$

Ist die Reihe nicht konvergent, so heisst sie divergent.

Im Falle einer divergenten Reihe, bei der für die Teilsummen gilt:

$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty$ bzw. $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = -\infty$ schreibt man:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty \quad \text{bzw.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = -\infty$$

Beispiele:

1. Gegeben sei die Folge (a_k) mit $a_k = k \quad \forall k \in \mathbb{N}$

Wie lautet die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$?

$$\sum_{k=1}^{\infty} k =$$

2. Gegeben sei die Folge (a_k) mit $a_k = \frac{1}{k} \quad \forall k \in \mathbb{N}$

Wie lautet die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$?

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} =$$

3. Gegeben sei die Folge (a_k) mit $a_k = 2 + 0.1^k \quad \forall k \in \mathbb{N}$

Wie lautet die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$?

$$\sum_{k=1}^{\infty} =$$

4. Gegeben sei die Folge (a_k) mit $a_k = aq^{k-1} \quad \forall k \in \mathbb{N}$ und a, q beliebig.

Wie lautet die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$?

$$\sum_{k=1}^{\infty} aq^{k-1} =$$

5.2.2 Geometrische Reihen

- $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} \dots = 2$
- Die **geometrische Reihe** $\sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots$

ist konvergent für $|q| < 1$

ist divergent für $|q| \geq 1$

Nachweis:

- Zunächst wird eine geschlossene Darstellung der n -ten Partialsumme s_n gesucht. Es ist

$$s_n = \sum_{k=1}^n q^{k-1} = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}$$

$$qs_n = q \sum_{k=1}^n q^{k-1} = \sum_{k=1}^n q^k = q + q^2 + q^3 + \dots + q^n$$

$$s_n - qs_n = 1 - q^n$$

und deshalb folgt: $s_n = \frac{1 - q^n}{1 - q}$

- Nachweis der Konvergenz für $|q| < 1$:

Für $|q| < 1$ konvergiert (q^n) gegen 0. Damit konvergiert auch die Folge (s_n) gegen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{1}{1 - q}$$

- Nachweis der Divergenz für $|q| \geq 1$:

Für $|q| \geq 1$ ist $|s_{n+1} - s_n| = |q^{n+1}| \geq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Die Folge (s_n) divergiert folglich.

- Zusammenfassung:

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & \text{für } |q| < 1 \\ \text{divergent} & \text{für } |q| \geq 1 \end{cases}$$

5.2.3 Konvergenzkriterien für Reihen

Konvergenzkriterien für Reihen, sind Kriterien, mit Hilfe derer entschieden werden kann, ob eine Reihe konvergiert, ohne den Grenzwert ausrechnen zu müssen.

Beispiele:

- Es ist $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$

Die Reihe heißt **harmonische Reihe**.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \right) + \dots = \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \right) + \dots = \infty \end{aligned}$$

Die Vergleichsreihe (ersetzen jeder Klammer durch das jeweils kleinste Glied) ist divergent. Deswegen divergiert auch die harmonische Reihe, da ihre Glieder größer sind als die entsprechenden Glieder der divergierenden Vergleichsreihe.

- Allerdings ist $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Der Beweis wurde von Euler erbracht.

Quotientenkriterium

Zur Entscheidung ob die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert, werden die Quotienten $\frac{a_{k+1}}{a_k}$ aufeinanderfolgender Reihenelemente gebildet und deren Grenzwert $\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|$ bestimmt.

Es gilt dann:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \begin{cases} q < 1 & \text{die Reihe ist konvergent} \\ q > 1 & \text{die Reihe ist divergent} \end{cases}$$

Für $q = 1$ macht dieses Kriterium keine Aussage.

Beispiele:

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz mit Hilfe des Quotientenkriteriums:

1. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)!}$ Anmerkung: $(k+1)! = k! \cdot (k+1)$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{(2(k+1))!}}{\frac{1}{(2k)!}} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(2k)!}{(2k+2)!} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{(2k+2)(2k+1)} = 0 < 1$$

$\Rightarrow$ Die Reihe konvergiert.

2. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{(k+1)^2}}{\frac{1}{k^2}} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k^2}{(k+1)^2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{k}\right)^2} = \frac{1}{1^2} = 1$$

3. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{3^k}$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{k+1}{3^{k+1}}}{\frac{k}{3^k}} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k+1}{3k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{k}}{3} = \frac{1}{3} < 1$$

Alternierende Reihe

Eine Reihe heißt **alternierend**, wenn sie vom Typ

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k \quad \text{mit} \quad a_k > 0 \text{ ist.}$$

Leibniz-Kriterium für alternierende Reihen

Eine alternierende Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$ ist konvergent, wenn die Elemente die folgenden Bedingungen erfüllen:

1. Die Elemente sind streng monoton fallend, d.h. $a_1 > a_2 > a_3 > \dots$
2. Die Elemente konvergieren gegen Null, d.h. $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$

Beispiele:

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

$$1. \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}$$

$\Rightarrow$

$$2. \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$$

$\Rightarrow$

$$3. \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k!}$$

$\Rightarrow$

5.3 Potenzreihen

Bevor im speziellen Taylor-Reihen betrachtet werden, soll hier der allgemeine Begriff der Potenzreihe erläutert werden.

5.3.1 Definition

Eine Potenzreihe ist von der Form:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots \quad (5.1)$$

mit Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, \dots \in \mathbb{R}$ und der Variablen $x \in \mathbb{R}$.

Abhängig von $x \in \mathbb{R}$ kann diese Reihe konvergieren oder divergieren. Obige Potenzreihe heißt **Potenzreihe mit Mittelpunkt 0**.

Eine Potenzreihe mit Mittelpunkt x_0 hat folgende Gestalt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + a_3 (x - x_0)^3 + \dots \quad (5.2)$$

Bemerkung:

Eine Potenzreihe konvergiert immer an ihrem Mittelpunkt, denn:

$$\text{für } x = 0 \text{ ist } \sum_{k=0}^{\infty} a_k (0)^k = a_0$$

$$\text{bzw. für } x = x_0 \text{ ist } \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x_0 - x_0)^k = a_0$$

Beispiele:

$$1. \sum_{k=0}^{\infty} x^k =$$

$$2. \sum_{k=0}^{\infty} (x-1)^k =$$

$$3. \sum_{k=0}^{\infty} kx^k =$$

$$4. \sum_{k=0}^{\infty} k(x+2)^k =$$

$$5. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} x^k =$$

$$6. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(x - \frac{1}{2}\right)^k =$$

5.3.2 Konvergenzbereich

Unter dem Konvergenzbereich einer Potenzreihe, versteht man die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, für die die Reihe konvergiert. Auf dem Konvergenzbereich $\mathbb{D}$ stellt die Potenzreihe eine Funktion dar:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k : \mathbb{D} \mapsto \mathbb{R}$$

Der Konvergenzbereich lässt sich einfach mit Hilfe des Konvergenzradius bestimmen:

Der **Konvergenzradius** r einer Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ ist

$$r = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|} \quad (5.3)$$

Konvergenzaussage:

- Eine Potenzreihe ist innerhalb des Radius um den Mittelpunkt konvergent, ausserhalb divergent und an den Randpunkten ist keine allgemeine Aussage möglich.
- Mathematische Formulierung:

Ist r der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ so gilt:

für $|x - x_0| < r$ die Potenzreihe konvergiert

für $|x - x_0| > r$ die Potenzreihe divergiert

Die Randpunkte $x_0 + r$ und $x_0 - r$ sind getrennt zu untersuchen.

Nachweis:

Für die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ lässt sich nach dem Quotientenkriterium abhängig

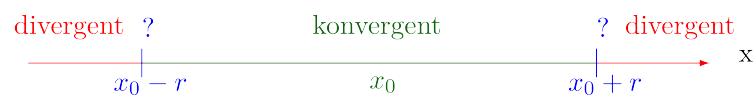
von $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_{k+1}(x-x_0)^{k+1}|}{|a_k(x-x_0)^k|} = |x-x_0| \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = |x-x_0| \cdot \frac{1}{r}$ folgendes sagen:

für: $1 > |x-x_0| \cdot \frac{1}{r}$, also $|x-x_0| < r$ konvergiert die Reihe

für: $1 < |x-x_0| \cdot \frac{1}{r}$, also $|x-x_0| > r$ divergiert die Reihe

für: $1 = |x-x_0| \cdot \frac{1}{r}$, also $|x-x_0| = r$ ist keine allgemeine Aussage möglich

- geometrische Darstellung:

**Bestimmung des Konvergenzbereichs:**

Für die Bestimmung des Konvergenzbereiches einer Potenzreihe sind folgende Schritte durchzuführen:

1. Angabe des Mittelpunktes der Potenzreihe
2. Bestimmung des Konvergenzradius
3. gesonderte Untersuchung der Randpunkte $x_1 = x_0 + r$ und $x_2 = x_0 - r$ auf Konvergenz, bzw. Divergenz
4. Zusammenfassen der Konvergenzmenge aus obigen Punkten 1, 2, 3

Beispiele:

1. Potenzreihe, die für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergiert:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \rightarrow a_k = \frac{1}{k!}, x_0 = 0$$

$$r = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(k+1)!}{k!} = \lim_{k \rightarrow \infty} k+1 = \infty$$

$\Rightarrow$ der Konvergenzbereich ist $\mathbb{R}$

2. Potenzreihe, die nur am Mittelpunkt konvergiert:

$$\sum_{k=0}^{\infty} k! \cdot x^k \rightarrow a_k = k!, x_0 = 0$$

$$r = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k!}{(k+1)!} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k+1} = 0$$

$\Rightarrow$ der Konvergenzbereich ist der Mittelpunkt $\{0\}$

3. Potenzreihe, die nur auf einer Teilmenge von $\mathbb{R}$ konvergiert:

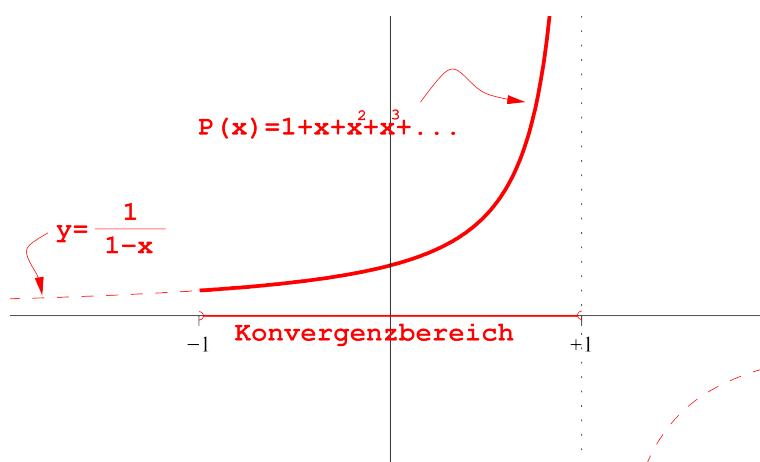
$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k \rightarrow a_k = 1, x_0 = 0$$

$$r = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{1} = 1$$

$$P(1) = \sum_{k=0}^{\infty} 1^k = \infty \dots \text{ ist divergent}$$

$$P(-1) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k = 1, -1, 1, -1, 1, \dots \text{ ist divergent}$$

$\Rightarrow$ der Konvergenzbereich ist das offene Intervall $] -1, 1[$.



Aufgaben zur Bestimmung des Konvergenzbereichs:

1. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} x^k \rightarrow a_k = \quad, x_0 =$

$$r =$$

2. $\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)x^k \rightarrow a_k = \quad, x_0 =$

$$r =$$

Randpunkte: $x =$

$$x =$$

$\Rightarrow$ Konvergenzbereich: $]$

$$3. \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-1)^k}{k!} \rightarrow a_k = \quad x_0 =$$

$$r =$$

5.3.3 Eigenschaften

Potenzreihen besitzen die gleichen angenehmen Eigenschaften wie Polynome.

1. Summe zweier Potenzreihen

Die Summe zweier Potenzreihen mit gleichem Mittelpunkt x_0 ist auf dem gemeinsamen Konvergenzbereich wieder eine Potenzreihe mit Mittelpunkt x_0 :

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-x_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k)(x-x_0)^k \quad (5.4)$$

2. Produkt zweier Potenzreihen (Cauchy-Produkt)

Das Produkt zweier Potenzreihen mit gleichem Mittelpunkt x_0 ist auf dem gemeinsamen Konvergenzbereich wieder eine Potenzreihe mit Mittelpunkt x_0 :

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-x_0)^k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^k a_n b_{k-n} \right) (x-x_0)^k \quad (5.5)$$

3. Stetigkeit einer Potenzreihe

Eine Potenzreihe ist innerhalb des Konvergenzbereichs stetig.

4. Ableitung einer Potenzreihe

Eine Potenzreihe $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ mit Konvergenzradius > 0 ist innerhalb des Konvergenzbereichs beliebig oft differenzierbar und die Ableitungsfunktion lautet:

$$P'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x-x_0)^{k-1} \quad (5.6)$$

5. Stammfunktion einer Potenzreihe

Eine Potenzreihe $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ mit Konvergenzradius > 0 ist im Konvergenzbereich integrierbar und ihre Stammfunktion lautet:

$$\int P(x) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} (x-x_0)^{k+1} + C \quad (5.7)$$

Aufgaben:

1. Wo sind die nachfolgenden Potenzreihen definiert? Geben Sie im Definitionsbereich die Ableitung und die Stammfunktion dieser Potenzreihen an.

a) $\sum_{k=0}^{\infty} x^k \rightarrow a_k = \quad, x_0 =$

Definitionsbereich

Ableitung:

Stammfunktion:

b) $\sum_{k=0}^{\infty} (x+1)^k \rightarrow a_k = \quad, x_0 =$

Definitionsbereich:

Ableitung:

Stammfunktion:

c) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k \rightarrow a_k = \quad, x_0 =$

Definitionsbereich:

Ableitung:

Stammfunktion:

2. Geben Sie das Produkt nachfolgender Potenzreihe an:

a) $\left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k \right) \rightarrow a_k = \quad b_k = \quad, x_0 =$

Bestimmung aller Ableitungen am Mittelpunkt einer Potenzreihe:

Ist $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ eine Potenzreihe mit einem Konvergenzradius > 0 , dann beschreiben die Koeffizienten den Wert der Ableitung am Mittelpunkt, denn:

$P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$	$P(x_0) = a_0$
$P'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k k(x-x_0)^{k-1}$	$P'(x_0) = a_1$
$P''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} a_k k(k-1)(x-x_0)^{k-2}$	$P''(x_0) = 2a_2$
$P^{(3)}(x) = \sum_{k=3}^{\infty} a_k k(k-1)(k-2)(x-x_0)^{k-3}$	$P^{(3)}(x_0) = 6a_3$
...	...
$P^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k k(k-1)(k-2)\dots(k-n+1)(x-x_0)^{k-n}$	$P^{(n)}(x_0) = n!a_n$
...	...

Koeffizienten der Potenzreihe

Die Koeffizienten einer Potenzreihe $P(x)$ ergeben sich zu:

$$a_n = \frac{P^{(n)}(x_0)}{n!} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}_0 \quad (5.8)$$

Beispiel: Ableitung der Exponentialreihe

Wir gehen aus von der überall konvergenten Reihenentwicklung

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

die wir Term für Term differenzieren:

$$\frac{d}{dx}e^x = 0 + 1 + \frac{2 \cdot x}{2!} + \frac{3 \cdot x^2}{3!} + \frac{4 \cdot x^3}{4!} \dots$$

Wir erhalten das wohlbekannte Resultat:

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x$$

Es folgt:

$$1 = P(0) = P'(0) = P''(0) = P^{(3)}(0) = P^{(4)}(0) = P^{(5)}(0) = P^{(6)}(0) = \dots$$

5.4 Taylor-Reihen

Ist f eine an der Stelle x_0 beliebig oft differenzierbare Funktion, so kann f als Potenzreihe um die Stelle x_0 dargestellt werden. Diese Reihe ist die Taylorreihe der Funktion f im Punkt x_0 . Sie ist benannt nach dem Mathematiker Brook Taylor.

In der Analysis verwendet man Taylorreihen, um Funktionen in der Umgebung bestimmter Punkte durch Potenzreihen darzustellen. So kann ein komplizierter analytischer Ausdruck durch eine nach wenigen Gliedern abgebrochene Taylorreihe (oftmals gut) angenähert werden.

5.4.1 Taylorpolynome

Ist $f : \mathbb{I} \mapsto \mathbb{R}$ eine $(n+1)$ -mal stetig differenzierbare Funktion auf dem Intervall $\mathbb{I}$, dann gilt:

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x)$$

Dabei ist T_n das n -te Taylorpolynom an der Entwicklungsstelle x_0

$$T_n = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n \quad (5.9)$$

und dem Rest:

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1} \quad \text{mit} \quad \xi \in [x_0, x] \quad (\xi = \text{kleiner griechischer Buchstabe Xi})$$

Bemerkungen:

1. Das Restglied hat die Eigenschaft für x gegen x_0 schnell gegen 0 zu konvergieren, genauer gilt:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n}{(x-x_0)^n} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)}{(n+1)!} = 0 \quad (5.10)$$

Das bedeutet, je näher x bei x_0 liegt, desto besser stimmt das Taylorpolynom T_n an der Stelle x mit der Funktion f überein.

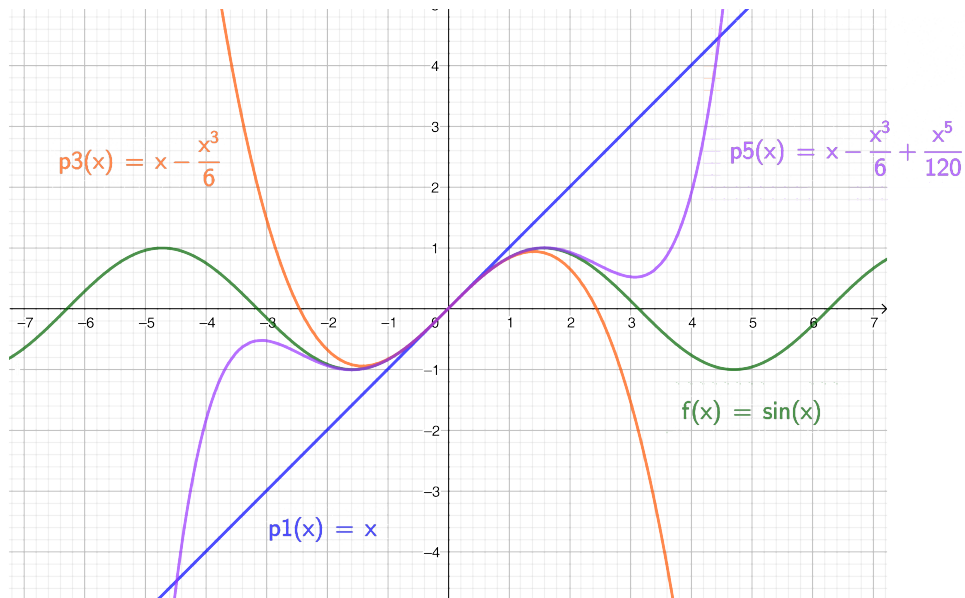
2. Für die Bestimmung des Restes wird folgende Oberschranke

$$|R_n| \leq \frac{\max_{\xi \in [x_0, x]} |f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!} \cdot |x-x_0|^{n+1} \quad (5.11)$$

durch eine Extremwertuntersuchung von $f^{(n+1)}$ auf dem Intervall $[x_0, x]$ oder durch geeignete Abschätzung von $f^{(n+1)}$ bestimmt.

Beispiele:

1. Sinusfunktion mit 1., 3. und 5. Taylorpolynom an der Entwicklungsstelle $x_0 = 0$:



2. Das 3. Taylorpolynom T_3 (p_3) der Sinusfunktion an der Entwicklungsstelle $x_0 = 0$ ist:

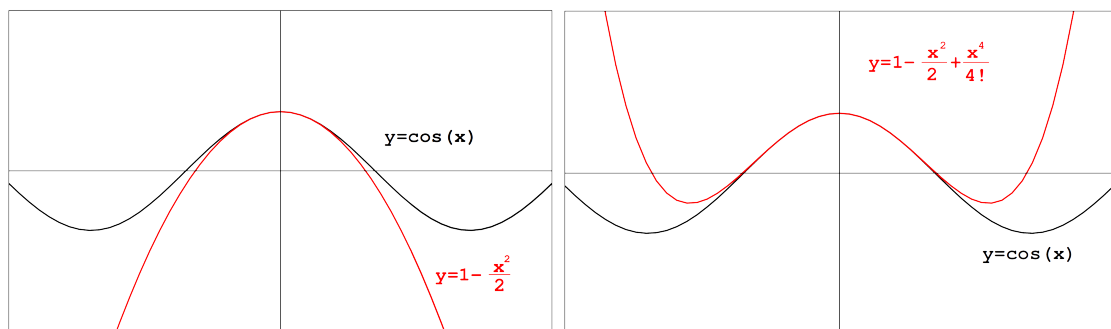
$$\sin(x) \approx x - \frac{x^3}{6}$$

Liegt x zwischen $-\frac{\pi}{4}$ und $\frac{\pi}{4}$, dann liegt der Fehler bei

$$|R_3(x)| = \left| \frac{\sin(\xi) \cdot x^4}{(3+1)!} \right|_{x=\frac{\pi}{4}} \leq \left| \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot x^4}{4!} \right|_{x=\frac{\pi}{4}} \leq \left| \frac{\sqrt{2} \cdot \pi^4}{2 \cdot 24 \cdot 4^4} \right| \leq 0.011$$

α im Gradmaß	0°	30°	45°	60°	90°
α im Bogenmaß	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
Merkhilfe für $\sin \alpha$	$\frac{1}{2} \sqrt{0}$	$\frac{1}{2} \sqrt{1}$	$\frac{1}{2} \sqrt{2}$	$\frac{1}{2} \sqrt{3}$	$\frac{1}{2} \sqrt{4}$
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	nicht definiert

3. Kosinusfunktion mit 2. und 4. Taylorpolynom an der Entwicklungsstelle $x_0 = 0$:



4. Das 4. Taylorpolynom T_4 der Kosinusfunktion an der Entwicklungsstelle $x_0 = 0$ ist:

$$\cos(x) \approx 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

Liegt x zwischen $-\frac{\pi}{4}$ und $\frac{\pi}{4}$, dann liegt der Fehler bei

$$|R_4(x)| = \left| \frac{\cos(\xi) \cdot x^5}{(4+1)!} \right|_{x=\frac{\pi}{4}} \leq \left| \frac{\sqrt{2} \cdot \pi^5}{2 \cdot 120 \cdot 4^5} \right| \leq 0.0018$$

5. Im Intervall $[0,0.1]$ soll die e -Funktion durch ein Taylor-Polynom 3-Grades approximiert werden. Wie groß ist der Fehler?

Es ist $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{e^\xi}{24}x^4$

Den Fehler kann man abschätzen durch:

$$|R_3(x)| = \left| \frac{e^\xi}{(3+1)!}x^4 \right|_{x=0.1} \leq \left| \frac{e^{0.1}}{24}0.1^4 \right| \leq \left| \frac{2}{24} \cdot 10^{-4} \right| = \frac{1}{12} \cdot 10^{-4} \leq 10^{-5}$$

6. $f(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$

- a) Ermitteln Sie das von $f(x)$ um $x_0 = 0$ erzeugte Taylor-Polynom 4. Ordnung $p_4(x)$.

Ableitung	$x_0 = 0$	$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$
$f(x) =$	$f(0) =$	$a_0 =$
$f'(x) =$	$f'(0) =$	$a_1 =$
$f''(x) =$	$f''(0) =$	$a_2 =$
$f'''(x) =$	$f'''(0) =$	$a_3 =$
$f^{(4)}(x) =$	$f^{(4)}(0) =$	$a_4 =$

Das Taylor-Polynom 4. Ordnung von $f(x)$ um $x_0 = 0$ ergibt sich damit als

$p_4(x) =$

- b) Bestimmen Sie das zugehörige Restglied 4. Ordnung $R_4(x)$.

Die fünfte Ableitung ist

$f^{(5)}(x) =$

Damit haben wir den Fehlerterm

$R_4(x) =$

mit ξ zwischen $x_0 = 0$ und x .

5.4.2 Taylorreihen

Ist $f : \mathbb{I} \mapsto \mathbb{R}$ eine beliebig oft differenzierbare Funktion auf dem Intervall $\mathbb{I}$, deren Restglied $R_n(x) \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ gilt, dann ist die Funktion als Taylorreihe darstellbar:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \quad (5.12)$$

Beispiele:

Funktion	Taylorreihe	Konvergenzradius
e^x	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$	∞
$\ln(x+1)$	$x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots$	1
$\sin(x)$	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$	∞
$\cos(x)$	$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$	∞
$\frac{1}{1-x}$	$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$	1
$\sqrt{1+x}$	$1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 - \dots$	1

KAPITEL 6

Differentialgleichungen

6.1 Motivation

Differentialgleichungen sind mathematische Gleichungen für eine oder mehrere gesuchte Funktionen, in denen eine oder mehrere Variablen, aber auch Ableitungen der gesuchten Funktionen vorkommen.

Viele Naturgesetze können mittels Differentialgleichungen formuliert werden. Bewegungsgleichungen, d.h. Gleichungen die die räumliche und zeitliche Veränderung eines mechanischen Systems unter Einwirkung äußerer Einflüsse beschreiben sind typischerweise Differentialgleichungen.

Als Beispiel sei der freie Fall mit _____ genannt. Letzterer wird durch folgende Gleichung beschrieben:

$$ma = -mg + kv^2$$

mit m (Masse), a (Beschleunigung), g (Erdbeschleunigung), v (Geschwindigkeit), k (Luftwiderstand), woraus sich die Differentialgleichung

$$m\dot{v} = -mg + kv^2$$

ergibt.

Ein weiteres Beispiel ist das _____ Wachstum, das Vorgänge beschreibt, bei denen die momentane Änderungsrate eines Wertes proportional zum Funktionswert ist.

Beispiel

Ein Behälter enthält 1000 l einer Flüssigkeit. Nach Öffnen eines Ventils läuft Flüssigkeit mit einer Ablaufgeschwindigkeit von 10% der vorhandenen Flüssigkeitsmenge aus. Wie lautet die Differentialgleichung die die Flüssigkeitsmenge zu jedem Zeitpunkt im Behälter beschreibt?

Differentialgleichungen sind daher ein wesentliches Werkzeug für die mathematische Modellierung (physikalischer) Vorgänge. Und die Methoden zur Lösung von Differentialgleichungen sind somit wichtig zu beherrschen.

Es gibt analytische und numerische Lösungsmethoden. Wir behandeln hier nur die analytischen Methoden, die für viele einfache Differentialgleichungen ausreichend sind.

6.2 Definitionen

Eine **Differentialgleichung (DGL)** ist eine Gleichung, in welcher unabhängige Variable, sowie Funktionen und deren Ableitungen von Funktionen auftreten.

Eine Funktion heißt **Lösung der DGL**, wenn sie zusammen mit ihren Ableitungen die DGL erfüllt.

Eine DGL heißt gewöhnliche Differentialgleichung, wenn sie nur Funktionen einer unabhängigen Variablen enthält.

Beispiele

- $y' = 2x$

Die Lösung dieser DGL ist: $y =$

- $y'' = 1$

Die Lösung dieser DGL ist: $y =$

- $y' = y$

Die Lösung dieser DGL ist: $y =$

- $y' = xy$

Die Lösung dieser DGL ist: $y =$

- $y' + xy = 0$

Die Lösung dieser DGL ist: $y =$

- $y'' = x \sin(xy)$

Die Lösung dieser DGL ist: $y =$

- $y''' = -y^2$

Die Lösung dieser DGL ist: $y =$

Neben den gewöhnlichen DGL gibt es noch die partiellen DGL. Sie enthalten partielle Ableitungen einer unbekannten Funktion von mehreren unabhängigen Variablen.

Beispiele

- $f_{xx}(x,y) + f_y(x,y) = 0$

- $f_x(x,y) + f_y(x,y) = \sin(xy)$

Wir beschäftigen uns hier aber ausschließlich mit gewöhnlichen DGL.

6.2.1 Ordnung einer DGL

Definition

Eine gewöhnliche DGL hat die _____, wenn die höchste in der DGL auftretende Ableitung die n -te Ableitung ist.

Beispiele

DGL	Ordnung
$y' = 2x$	
$x + yy' = 0$	
$y''' + 2y' = \cos x$	

6.2.2 Explizite, implizite DGL

Definition

Eine gewöhnliche DGL heisst _____, wenn sie nach der höchsten Ableitung aufgelöst ist, sonst _____.

Beispiele

DGL	explizit? / implizit?
$y' = 2x$	
$x + yy' = 0$	
$y''' + 2y' = \cos x$	

6.2.3 Anfangswertproblem, Randwertproblem

Definition

Die allgemeine Lösung einer DGL n -ter Ordnung enthält n voneinander unabhängige Parameter. Eine spezielle Lösung wird aus der allgemeinen Lösung gewonnen, indem man zusätzliche Bedingungen an die Parameter stellt.

Beim _____ werden an die Lösungsfunktion einer DGL n -ter Ordnung Bedingungen für den Funktionswert als auch für die Werte der ersten $n - 1$ Ableitungen an einer Stelle x_0 gestellt.

Beim _____ werden an die Lösungsfunktion einer DGL n -ter Ordnung Bedingungen für die Funktionswerte an n verschiedenen Stellen gestellt.

Beispiele

1. Durch die Differentialgleichung $s = g_1$, deren Lösungsfunktion zudem der Bedingung $s(0) = 100$ genügen soll, ist ein **Anfangswertproblem** gegeben.
2. Durch die Differentialgleichung $s = g_2$, deren Lösungsfunktion zudem den Bedingungen $s(0) = 100$ und $s(10) = 0$ genügen soll, ist ein **Randwertproblem** gegeben.

In den folgenden Kapiteln werden Verfahren vorgestellt, mit denen spezielle Klassen von Differentialgleichungen gelöst werden können.

6.3 DGL 1. Ordnung

Es werden hier spezielle Klassen von DGL 1. Ordnung betrachtet, und geeignete Lösungsmethoden vorgestellt.

6.3.1 Methode der Trennung der Veränderlichen

Die Methode der Trennung der Veränderlichen kann auf folgende Klasse von DGL angewendet werden:

$$y' = f(x)g(y)$$

Die Lösung dieser DGL ergibt sich durch Trennung der Veränderlichen folgendermaßen:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= f(x)g(y) \\ \Rightarrow \frac{dy}{g(y)} &= f(x) dx \quad \text{für } g(y) \neq 0 \\ \Rightarrow \int \frac{1}{g(y)} dy &= \int f(x) dx\end{aligned}$$

Man spricht in diesem Zusammenhang auch von einer separierbaren DGL. Man nennt DGL dieser Form deshalb separierbar, weil man die Differentialgleichung so umformen kann, dass die Terme mit x und die Terme mit y jeweils separat (getrennt) auf einer Seite stehen.

Beispiele

1. $y' + 2xy = 0$

Durch Trennung der Variablen ergibt sich aus $y' = -2xy$:

$$\frac{dy}{y} = -2x \, dx, \quad \text{also} \quad \int \frac{1}{y} \, dy = -2 \int x \, dx$$

$$\implies \ln|y| = -x^2 + A$$

$$\implies |y| = e^{-x^2+A} = e^A e^{-x^2}$$

$$\implies y = \pm e^A e^{-x^2}$$

$$\implies y = B e^{-x^2}$$

2. $y' = -2y$

Durch Trennung der Variablen ergibt sich:

$$\frac{dy}{y} =$$

$$\implies$$

$$\implies$$

$$\implies$$

$$\implies$$

3. $y' = x^3 + \cos x$

Durch Trennung der Variablen ergibt sich:

$$dy =$$

$$\implies$$

4. $y' = e^y \sin x$

Durch Trennung der Variablen ergibt sich:

$$\implies$$

$$\implies$$

$$\implies$$

$$\implies$$

6.4 Lineare DGL

Lineare Differentialgleichungen sind eine wichtige Klasse von gewöhnlichen Differentialgleichungen. Linear bedeutet hier, dass die Funktion y und ihre Ableitungen nur linear auftreten.

lineare DGL 1. Ordnung : $y' + f_0(x)y = s(x)$

lineare DGL 2. Ordnung : $y'' + f_1(x)y' + f_0(x)y = s(x)$

lineare DGL 3. Ordnung : $y''' + f_2(x)y'' + f_1(x)y' + f_0(x)y = s(x)$

lineare DGL 4. Ordnung : $y^{(4)} + f_3(x)y''' + f_2(x)y'' + f_1(x)y' + f_0(x)y = s(x)$

...

Die Funktion $s(x)$ heißt _____.

Die lineare DGL heißt _____, wenn $s(x) = 0$ ist und _____ sonst.

Bestimmen Sie die Eigenschaften folgender DGL:

DGL	linear	nicht linear	homogen	inhomogen
$y' = xy$				
$x^3y' - y = 2xy^2$			N/A	N/A
$y' - 2y = \sin x$				
$y' \cos x - y \sin x = 1$				
$y'y^2 + x^2 = 1$			N/A	N/A
$y' = \sqrt{y}$			N/A	N/A
$y' - x(1 + y^2) = 0$			N/A	N/A
$xy' + y = \ln x$				
$y'' = 5x^4(y + 1)$				

6.4.1 Lineare DGL 1. Ordnung

Lösungsverfahren für eine homogene lineare DGL 1. Ordnung:

$$y' + f(x)y = 0$$

Die Lösung erfolgt mit Hilfe der Methode der Trennung der Variablen:

$$\frac{1}{y} dy = -f(x) dx$$

Beispiel

$$\begin{aligned}
x^2 y' + y &= 0 \\
\Rightarrow y' + \frac{1}{x^2} y &= 0 \quad \Rightarrow \quad y' = -\frac{1}{x^2} y \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{y} dy = -\frac{1}{x^2} dx \\
\Rightarrow \int \frac{1}{y} dy &= -\frac{1}{x^2} dx \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = \frac{1}{x} + A \\
\Rightarrow |y| &= e^{\frac{1}{x} + A} \quad \Rightarrow \quad y = \pm e^A e^{\frac{1}{x}} \quad \Rightarrow \quad y = B e^{\frac{1}{x}}
\end{aligned}$$

Lösungsverfahren für eine inhomogene lineare DGL 1. Ordnung:

$$y' + f(x)y = s(x)$$

Die Funktion $s(x)$ heißt Störfunktion.

Die Lösung einer inhomogenen DGL 1. Ordnung erfolgt in 3 Schritten:

1. Lösen der homogenen DGL $y' + f(x)y = 0$. Die Lösungen werden mit y_h bezeichnet.
2. Bestimmen einer (sogenannten partikulären) Lösung y_p der inhomogenen DGL. Dies kann mit Hilfe der Methode der _____ geschehen, d.h. die Konstante in der homogenen Lösung wird als Funktion angesetzt und durch Einsetzen in die DGL bestimmt.
Dies läuft praktisch stets auf Koeffizientenvergleiche hinaus.
3. Angeben aller Lösungen der DGL als Summe aus der homogenen Lösungsschar und der partikulären Lösung $y = y_h + y_p$

Beispiel

$$y' + \frac{y}{x} = \cos(x)$$

- Lösen der homogenen DGL: $y' + \frac{y}{x} = 0$ für $x > 0$.

$$\begin{aligned}
\frac{y'}{y} = -\frac{1}{x} &\Rightarrow \frac{1}{y} dy = -\frac{1}{x} dx \Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = -\int \frac{1}{x} dx \Rightarrow \\
\ln|y| = -\ln(x) + A &\Rightarrow |y| = \frac{e^A}{x} \Rightarrow y_h = \frac{B}{x}
\end{aligned}$$

- Bestimmen einer partikulären Lösung mit der Methode der Variation der Konstanten. Man nimmt an, dass eine Lösung der DGL von der Form

$$y_p = \frac{B(x)}{x}$$

ist, und muss nun $B(x)$ durch Einsetzen in die DGL bestimmen.

$$y_p' = \frac{B'(x)}{x} - \frac{B(x)}{x^2}$$

$$\begin{aligned}
&\text{Einsetzen in DGL: } \frac{B'(x)}{x} - \frac{B(x)}{x^2} + \frac{B(x)}{x} = \cos(x) \\
&\implies B'(x) = x\cos(x) \implies B(x) = x\sin(x) + \cos(x) \\
&\implies y_p = \sin(x) + \frac{\cos(x)}{x}
\end{aligned}$$

6.4.2 Lineare DGL 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Ist die Funktion $f(x)$ in der linearen DGL 1. Ordnung $y' + f(x)y = s(x)$ eine Konstante, so spricht man von einer linearen DGL 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten:

$$y' + ay = s(x)$$

1. Lösung der homogenen DGL 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten Die Lösung von $y' + ay = 0$ ist $y = Ae^{-ax}$ denn:

$$y' = -ay \implies \frac{1}{y} dy = -a dx \implies \int \frac{1}{y} = - \int a dx \implies$$

$$\ln|y| = -ax + B \implies |y| = e^B e^{-ax} \implies y = Ae^{-ax}$$

2. partikuläre Lösung der inhomogenen DGL 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten Für diese Klasse von DGL kann man die partikuläre Lösung durch Vergleich mit der Störfunktion auffinden:

Störfunktion	Ansatz für partikuläre Lösung
Polynomfunktion vom Grade n	$y_p = c_n x^n + \dots + c_2 x^2 + c_1 x + c_0$
$A\sin(\omega x) + B\cos(\omega x)$	$y_p = C_1 \sin(\omega x) + C_2 \cos(\omega x)$
Ae^{bx}	$y_p = Ce^{bx}$ für $b \neq -a$ $y_p = Cxe^{bx}$ für $b = -a$

Beispiel

1. $y' + 2y = 2x^2 - 4$

Die Lösung der homogenen DGL ist: $y_h = Ae^{-2x}$

Für eine partikuläre Lösung wählt man den Ansatz: $y_p = c_2 x^2 + c_1 x + c_0$

Die Koeffizienten c_0, c_1, c_2 bestimmt man durch Einsetzen in die DGL. Es ist

$$y_p' = 2c_2 x + c_1$$

$$\text{In DGL einsetzen: } 2c_2 x + c_1 + 2(c_2 x^2 + c_1 x + c_0) = 2x^2 - 4$$

$$\implies 2c_2 x^2 + (2c_2 + 2c_1)x + c_1 + 2c_0 = 2x^2 - 4$$

Durch Koeffizientenvergleich ergibt sich daraus:

$$2c_2 = 2 \quad \implies \quad c_2 = 1$$

$$2c_2 + 2c_1 = 0 \quad \implies \quad c_1 = -c_2 = -1$$

$$c_1 + 2c_0 = -4 \quad \implies \quad -1 + 2c_0 = -4 \implies \quad c_0 = -\frac{3}{2}$$

Die partikuläre Lösung lautet somit:

$$y_p = x^2 - x - \frac{3}{2}$$

Die Lösung der DGL ergibt sich insgesamt zu:

$$y = Ae^{-2x} + x^2 - x - \frac{3}{2}$$

Bemerkungen

1. Ist die Störfunktion eine Summe aus obigen Störgliedern, so ist der Lösungsansatz die Summe der einzelnen Lösungsansätze. Um die Rechnung dann nicht zu komplex zu machen, können die einzelnen Teil-Störfunktionen separat behandelt werden.
2. Ist die Störfunktion ein Produkt aus obigen Störgliedern, so ist der Lösungsansatz das Produkt der einzelnen Lösungsansätze

Anwendungen

1. Freier Fall mit Luftwiderstand
2. Wechselstromkreis

6.4.3 Lineare DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Hier ist zum letzten Mal die Möglichkeit gegeben, die Lösung elementar zu ermitteln. Die Konstruktionen in diesem Abschnitt zeigen bereits die Grundzüge des allgemeinen Konzepts.

Eine lineare DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten hat folgende allgemeine Gestalt.

$$y'' + ay' + by = s(x)$$

Diese DGL heißt homogen, wenn $s(x) = 0$ ist.

Aufgabe

Üben Sie die Begriffsbestimmung an folgenden Beispielen von Differentialgleichungen 2. Ordnung:

DGL	linear?	homogen?	Konst. Koeffizienten?
$y'' + y' = 0$			
$2y'' + 2y' + 3y = 2x + 1$			
$y'' + xy' + y = \sin(x)$			
$y'' + y' + \sin(y) = 0$			
$xy'' + \sin(x)y' + x^2y = 0$			
$y'y'' + 2y = x$			

(Ja)*: Sie ergibt sich indirekt aus der Nichtlinearität.

Lösungsverfahren

Das Lösungsverfahren für diese DGL ist analog zu dem Lösungsverfahren von DGL 1. Ordnung:

1. Lösung der homogenen DGL: y_h
2. Bestimmen einer partikulären Lösung: y_p
3. Angabe aller Lösungen der DGL: $y = y_h + y_p$

Diese 3 Lösungsschritte untersuchen wir nun im Einzelnen:

1) Lösung der homogenen DGL

Bemerkungen:

- a) Sind y_1 und y_2 zwei Lösungen der homogenen DGL, so ist auch jede Linearkombination

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

eine Lösung der DGL.

- b) Zwei Funktionen y_1 und y_2 heißen linear unabhängig, wenn die lineare Gleichung

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 = 0 \quad \text{nur für } C_1 = C_2 = 0 \text{ lösbar ist.}$$

- c) Die allgemeine Lösung y einer homogenen linearen DGL mit konstanten Koeffizienten ist als Linearkombination zweier linear unabhängiger Lösungen y_1 und y_2 der DGL in der Form

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 \quad \text{mit } C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

darstellbar.

Mit dem Lösungsansatz $y = e^{\lambda x}$ lässt sich die allgemeine Lösung von

$y'' + ay' + by = 0$ gewinnen.

Mit $\Delta = a^2 - 4b$ und $\lambda_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$ gilt:

$\Delta > 0$ Die allgemeine Lösung ist $y_h = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$

$\Delta = 0$ Die allgemeine Lösung ist $y_h = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}$

$\Delta < 0$ Die allgemeine Lösung ist $y_h = e^{-\frac{a}{2}x} \left(C_1 \sin\left(\frac{\sqrt{-\Delta}x}{2}\right) + C_2 \cos\left(\frac{\sqrt{-\Delta}x}{2}\right) \right)$

Beispiele

a) $y'' + 2y' - 8y = 0$

Aus dem charakteristischen Polynom $\lambda^2 + 2\lambda - 8 = 0$ folgt:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2} = -1 \pm 3$$

Damit ergibt sich die Lösung der homogenen DGL zu:

$$y_h = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-4x}$$

b) $y'' - 8y' + 16y = 0$

Aus dem charakteristischen Polynom $\lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0$ folgt:

$$\lambda_{1,2} =$$

Damit ergibt sich die Lösung der homogenen DGL zu:

$$y_h =$$

c) $y'' + 4y' + 13y = 0$

Aus dem charakteristischen Polynom $\lambda^2 + 4\lambda + 13 = 0$ folgt:

$$\lambda_{1,2} =$$

Damit ergibt sich die Lösung der homogenen DGL zu:

$$y_h =$$

2) Partikuläre Lösung der inhomogenen DGL

Eine partikuläre Lösung der inhomogenen DGL findet man abhängig von der Störfunktion durch folgenden Ansatz:

Störfunktion	partikulärer Lösungsansatz
Polynom vom Grade n	$y_p = c_n x^n + \dots + c_1 x + c_0$ für $b \neq 0$ $y_p = x(c_n x^n + \dots + c_1 x + c_0)$ für $a \neq 0, b = 0$ $y_p = x^2(c_n x^n + \dots + c_1 x + c_0)$ für $a = b = 0$
Exponentialfunktion e^{cx}	$y_p = Ae^{cx}$, falls e^{cx} keine Lsg der homogenen DGL $y_p = Axe^{cx}$, falls e^{cx} eine einfache Lsg der homogenen DGL $y_p = Ax^2 e^{cx}$, falls e^{cx} eine doppelte Lsg der homogenen DGL
Sinusfunktion $\sin(\beta x)$ oder Kosinusfunktion $\cos(\beta x)$ oder Linearkombination aus beiden	$y_p = A\sin(\beta x) + B\cos(\beta x)$ falls $e^{i\beta x}$ keine Lösung der homogenen DGL ist $y_p = x(A\sin(\beta x) + B\cos(\beta x))$ falls $e^{i\beta x}$ eine Lösung der homogenen DGL ist
Produkt aus allen, d.h. $P_n(x)e^{cx}\sin(\beta x)$ oder $P_n(x)e^{cx}\cos(\beta x)$	$y_p = e^{cx}(Q_n(x)\sin(\beta x) + R_n(x)\cos(\beta x))$ falls $e^{(c+i\beta)x}$ keine Lsg der homogenen DGL $y_p = xe^{cx}(Q_n(x)\sin(\beta x) + R_n(x)\cos(\beta x))$ falls $e^{(c+i\beta)x}$ eine Lsg der homogenen DGL $Q_n(x)$ und $R_n(x)$ sind Polynome vom Grade n

Beispiel

Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung der DGL

$$y'' + 10y' - 24y = 12x^2 + 14x + 1$$

Als Ansatz wählt man $y_p = c_2 x^2 + c_1 x + c_0$

Um dies in die DGL einzusetzen sind die Ableitungen notwendig:

$$y'_p = 2c_2 x + c_1, \quad y''_p = 2c_2$$

In die DGL eingesetzt, ergibt:

$$2c_2 + 10(2c_2 x + c_1) - 24(c_2 x^2 + c_1 x + c_0) = 12x^2 + 14x + 1$$

Sortieren nach den Potenzen in x , ergibt:

$$(-24c_2 - 12)x^2 + (20c_2 - 24c_1 - 14)x + (2c_2 + 10c_1 - 24c_0 - 1) = 0$$

Diese Gleichung ist nur erfüllt, wenn alle Koeffizienten 0 sind:

$$-24c_2 - 12 = 0$$

$$20c_2 - 24c_1 - 14 = 0$$

$$2c_2 + 10c_1 - 24c_0 - 1 = 0$$

Daraus ergibt sich:

$$c_2 = -\frac{1}{2}, \quad c_1 = -\frac{14+10}{24} = -1, \quad c_0 = -\frac{1+1+10}{24} = -\frac{1}{2}$$

Eine partikuläre Lösung ergibt sich somit zu:

$$y_p = -\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{2}$$

Beispiele

$$y'' + y' - 2y = s(x)$$

$s(x)$	y_p
$10x + 1$	
$x^2 - 4x + 3$	
$3e^{4x}$	
$6e^x$	
xe^x	
$3\sin(2x)$	

KAPITEL 7

Fourier-Reihen

7.1 Motivation

Viele Funktionen (speziell in der Elektrotechnik) sind periodische Funktionen. Für diese eignet sich die Approximation durch Polynome nicht sehr, da für große x der Fehler sehr gross ist, denn Polynome streben für große x gegen Unendlich, nicht aber die periodischen Funktionen.

Um periodische Funktionen zu approximieren entstand die Idee der Fourierreihen (Fourier 1768-1830). Dies ist die Approximation nicht durch Polynom-Funktionen x^n für $n = 0 \dots \infty$ sondern die Approximation durch trigonometrische Funktionen.

Die Fourier-Reihe ist ein nützliches mathematisches Werkzeug, das in der Elektrotechnik und der Nachrichtentechnik, in der Regelungstechnik, Akustik, der Optik und der Quantentheorie sowie auch in zahlreichen anderen physikalischen Gebieten eingesetzt wird.

7.2 Periodische Funktionen

7.2.1 Definition: periodische Funktion

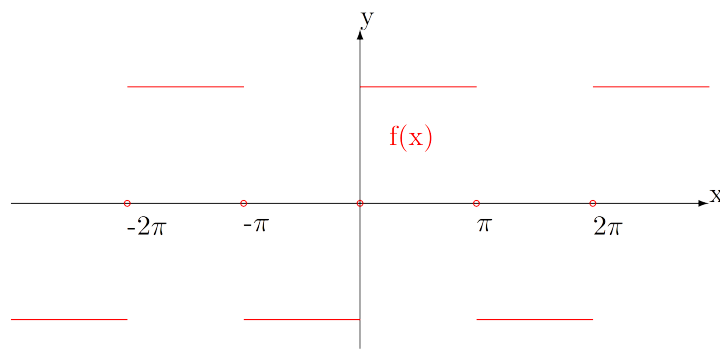
Eine Funktion $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ heißt periodisch mit der Periode P , wenn

$$f(t + P) = f(t) \text{ für jedes } t \in \mathbb{R} \text{ gilt.}$$

7.2.2 Beispiele periodischer Funktionen

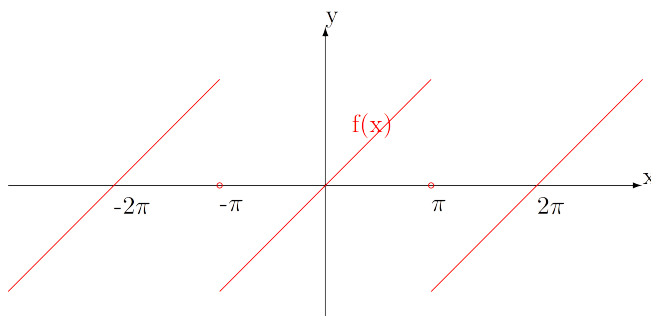
1. Rechteckschwingung mit der Periode 2π

$$f(t) = \begin{cases} -1 & \text{für } -\pi < t < 0 \\ 0 & \text{für } t = -\pi, 0, \pi \\ 1 & \text{für } 0 < t < \pi \end{cases}$$



2. Kippschwingung mit der Periode 2π

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{für } -\pi < t < \pi \\ 0 & \text{für } t = -\pi, \pi \end{cases}$$



3. Trigonometrische Funktionen Sinus und Cosinus mit Periode 2π

$$f(t) = \sin(t) \text{ und } f(t) = \cos(t)$$

4. Trigonometrische Funktionen Sinus und Cosinus mit Periode T

$$f(t) = \sin(\omega t) \text{ und } f(t) = \cos(\omega t) \quad \text{mit} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot f$$

5. Oberschwingungen von Sinus und Cosinus mit Periode 2π

Grundschiwingung: $f(t) = \sin(t)$ und $f(t) = \cos(t)$

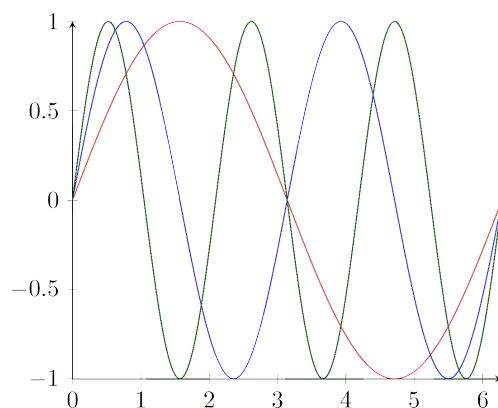
1. Oberschwingung: $f(t) = \sin(2t)$ und $f(t) = \cos(2t)$

2. Oberschwingung: $f(t) = \sin(3t)$ und $f(t) = \cos(3t)$

3. Oberschwingung: $f(t) = \sin(4t)$ und $f(t) = \cos(4t)$

4. Oberschwingung: $f(t) = \sin(5t)$ und $f(t) = \cos(5t)$

...



Grundschiwingung
1. Oberschwingung
2. Oberschwingung

6. Oberschwingungen von Sinus und Cosinus mit Periode T

Grundschiwingung: $f(t) = \sin(\omega t)$ und $f(t) = \cos(\omega t)$

1. Oberschiwingung: $f(t) = \sin(2\omega t)$ und $f(t) = \cos(2\omega t)$

2. Oberschiwingung: $f(t) = \sin(3\omega t)$ und $f(t) = \cos(3\omega t)$

3. Oberschiwingung: $f(t) = \sin(4\omega t)$ und $f(t) = \cos(4\omega t)$

4. Oberschiwingung: $f(t) = \sin(5\omega t)$ und $f(t) = \cos(5\omega t) \dots$ mit $\omega = \frac{2\pi}{T}$

7.3 Definition der Fourierreihe

7.3.1 Fragestellung

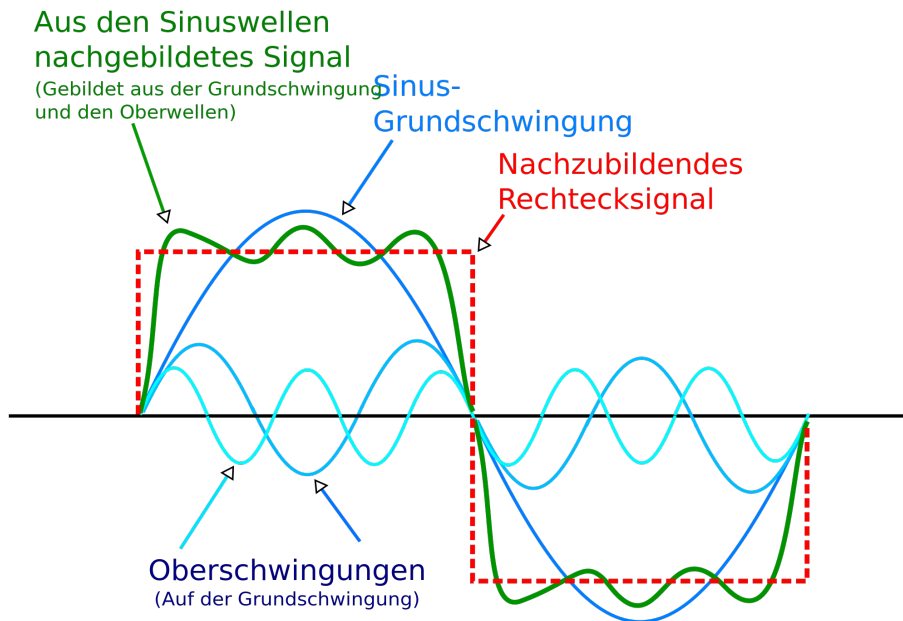
Periodische Funktionen $f(t)$ lassen sich in Einzelschwingungen von Sinus und Cosinus, sowie deren Oberschwingungen zerlegen.

Es gilt:

$$\begin{aligned}
 f(t) = & \frac{a_0}{2} && \text{konstante Funktion} \\
 & + a_1 \cos(\omega t) + b_1 \sin(\omega t) && \text{Grundschiwingung mit Periode } 2\pi/\omega \\
 & + a_2 \cos(2\omega t) + b_2 \sin(2\omega t) && \text{1. Oberschiwingung mit Periode } 2\pi/2\omega \\
 & + a_3 \cos(3\omega t) + b_3 \sin(3\omega t) && \text{2. Oberschiwingung mit Periode } 2\pi/3\omega \\
 & + \dots \\
 = & \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t))
 \end{aligned}$$

mit geeigneten Koeffizienten a_n und b_n .

Diese Darstellung heißt **Fourier-Reihe**.



7.3.2 Satz von Fourier

Ist $f(x)$ eine periodische Funktion mit beliebiger Periodenlänge T und erfüllt f die Eigenschaften

1. f ist im Periodenintervall auf endlich vielen Teilintervallen stetig und monoton
2. in den Unstetigkeitsstellen existiert der links- und rechtsseitige Grenzwert

dann ergibt sich für die Fourier-Reihe von f mit $\omega = \frac{2\pi}{T}$:

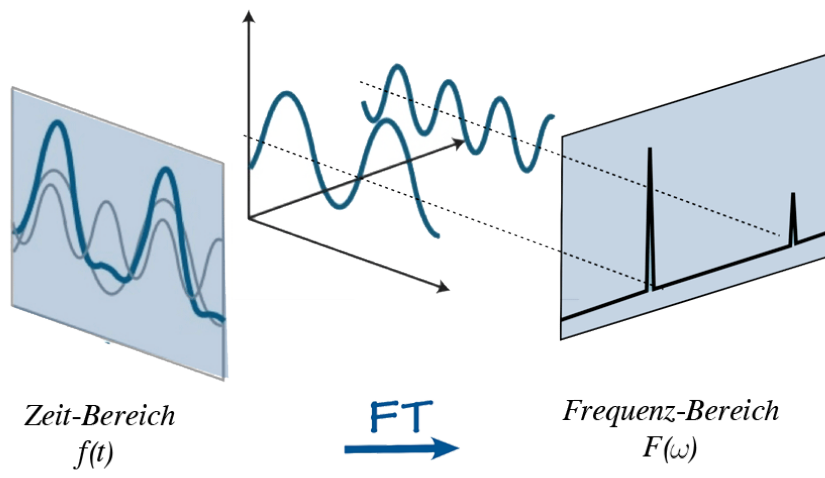
$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)) = f(x) \text{ für alle Stetigkeitsstellen } x$$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega x_0) + b_n \sin(n\omega x_0)) = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) \text{ an den Unstetigkeitsstellen } x_0$$

Mit Koeffizienten (Amplituden)

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \, dx$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos(n\omega x) \, dx, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin(n\omega x) \, dx \quad \text{für } n \in \mathbb{N}$$



7.3.3 Hilfsmittel

Für die Bestimmung der Fourier-Koeffizienten werden folgende Integrale als Hilfsmittel benötigt.

Hierbei ist wieder $\omega = \frac{2\pi}{T}$:

$$\int_0^T \cos(n\omega x) \, dx = 0 \quad (7.1)$$

$$\int_0^T \sin(n\omega x) \, dx = 0 \quad (7.2)$$

$$\int_0^T \sin(n\omega x) \cos(m\omega x) \, dx = 0 \quad (7.3)$$

$$\int_0^T \cos(n\omega x) \cos(m\omega x) \, dx = \begin{cases} 0 & \text{für } n \neq m \\ \frac{T}{2} & \text{für } n = m \end{cases} \quad (7.4)$$

$$\int_0^T \sin(n\omega x) \sin(m\omega x) \, dx = \begin{cases} 0 & \text{für } n \neq m \\ \frac{T}{2} & \text{für } n = m \end{cases} \quad (7.5)$$

Beispiele:

Geben Sie mittels obiger Gleichungen den Wert folgender Integrale an:

$$1. \int_0^{2\pi} \cos(5x) \, dx =$$

$$2. \int_{-\pi}^{\pi} \sin(3x) \, dx =$$

$$3. \int_0^{2\pi} \sin(3x) \cdot \cos(4x) \, dx =$$

$$4. \int_0^{2\pi} \sin(3x) \cdot \sin(4x) \, dx =$$

$$5. \int_0^{2\pi} \cos(3x) \cdot \cos(4x) \, dx =$$

$$6. \int_0^{2\pi} \sin(3x) \cdot \sin(3x) dx =$$

$$7. \int_0^{2\pi} \cos(4x) \cdot \cos(4x) dx =$$

$$8. \int_0^{2\pi} \sin^2(3x) dx =$$

$$9. \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(4x) dx =$$

$$10. \int_0^1 \sin(2\pi x) \cdot \sin(2\pi x) dx =$$

$$11. \int_0^1 \cos(6\pi x) \cdot \cos(6\pi x) dx =$$

7.3.4 Herleitung der Fourier-Koeffizienten

Es sei f eine T -periodische Funktion, die sich durch eine Fourier-Reihe darstellen lässt, d.h.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)) \quad \text{mit} \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

Dann ist:

$$\begin{aligned} 1. \int_0^T f(x) dx &= \int_0^T \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)) \right) dx \\ &= \int_0^T \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^T (a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)) dx \right) \\ &= \int_0^T \frac{a_0}{2} dx + 0 \\ &= \frac{a_0}{2} \frac{T}{2} \end{aligned}$$

und folglich:

$$a_0 =$$

$$2. \int_0^T f(x) \cos(m\omega x) dx = \int_0^T \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)) \right) \cos(m\omega x) dx$$

$$=$$

$$=$$

und folglich:

$$a_m =$$

$$3. \int_0^T f(x) \sin(m\omega x) dx = \int_0^T \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)) \right) \sin(m\omega x) dx$$

$$=$$

und folglich:

$$b_m =$$

Beispiel:

Rechteckschwingung

$$f(t) = \begin{cases} -1 & \text{für } -\pi < t < 0 \\ 0 & \text{für } t = -\pi, 0, \pi \\ 1 & \text{für } 0 < t < \pi \end{cases}$$

Berechnung der Fourier-Reihe obiger 2π -periodisch fortgesetzter Rechteckschwingung:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\pi} f(x) dx + \int_{\pi}^{2\pi} f(x) dx \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\pi} 1 dx - \int_{\pi}^{2\pi} 1 dx \right) \\ &= 0 \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx + \int_{\pi}^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\pi} \cos(nx) dx - \int_{\pi}^{2\pi} \cos(nx) dx \right) \\ &= 0 \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx + \int_{\pi}^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\pi} \sin(nx) dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin(nx) dx \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left(-\frac{\cos(nx)}{n} \Big|_0^{\pi} + \frac{\cos(nx)}{n} \Big|_{\pi}^{2\pi} \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left(-\frac{\cos(n\pi)}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{\cos(n\pi)}{n} \right) \\ &= \frac{2}{n\pi} (1 - (-1)^n) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{für } n \text{ gerade} \\ \frac{4}{n\pi} & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases} \end{aligned}$$

Also ist

$$f(x) =$$

7.3.5 Bemerkungen

1. Die Fourier-Koeffizienten können berechnet werden durch Integration über ein beliebiges Intervall der Periodenlänge, d.h. es ist z.B. bei einer 2π -periodischen Funktion:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) \, dx \quad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) \, dx \quad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) \, dx \quad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

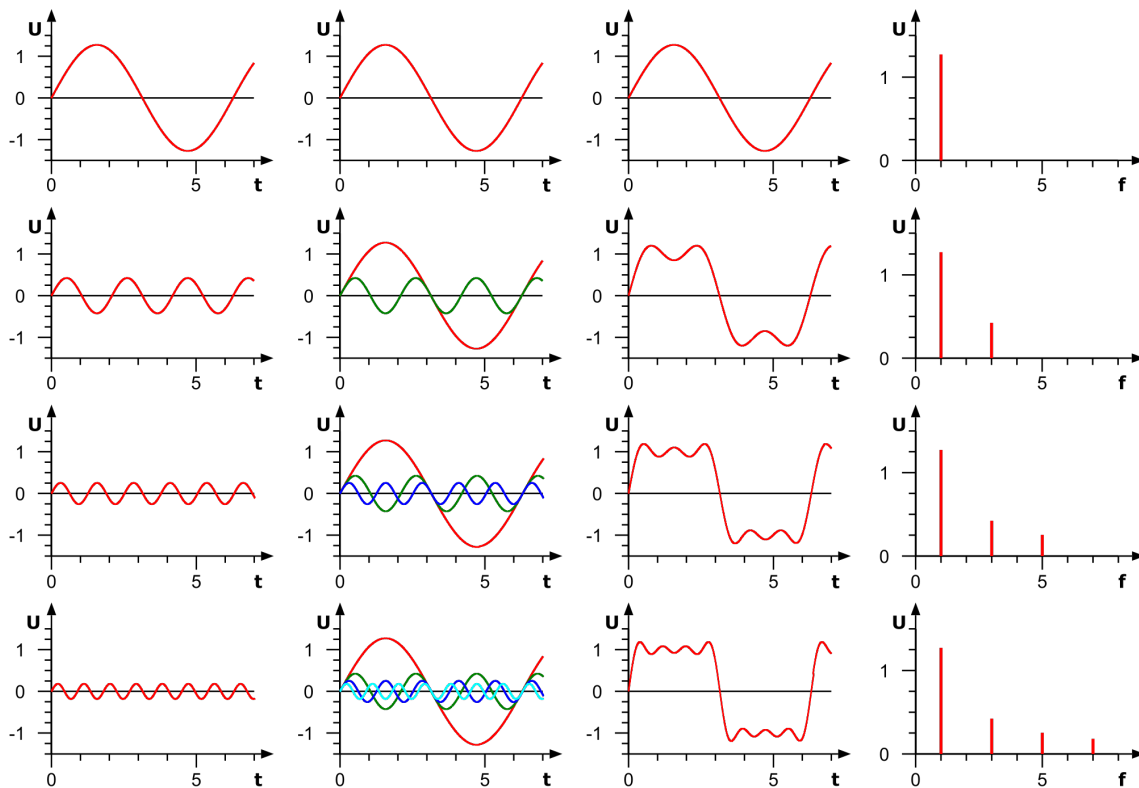
$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) \, dx \quad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

2. Die Fourier-Reihe einer geraden (achsensymmetrischen) Funktion enthält nur gerade Schwingungen, d.h. $b_n = 0$ für $n \in \mathbb{N}$.

Diese Fourier-Reihe ist also eine Cosinus-Reihe.

3. Die Fourier-Reihe einer ungeraden (punktsymmetrisch zu 0) Funktion enthält nur ungerade Schwingungen, d.h. $a_n = 0$ für $n \in \mathbb{N}$.

Diese Fourier-Reihe ist also eine Sinus-Reihe.



7.4 Komplexe Darstellung der Fourierreihe

Neben der reellen Darstellung der Fourierreihe gibt es noch die komplexe Darstellung eines periodischen Vorgangs. Diese Darstellung ist sowohl für reelle als auch komplexe Funktionen möglich.

Mit der Eulerschen Formel

$$e^{it} = \cos(t) + i \sin(t) \quad (7.6)$$

kann man die Fourier-Reihen periodischer Funktionen

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t))$$

folgendermaßen als komplexe Fourierreihe darstellen:

mit

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{in\omega t}$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cdot e^{-in\omega t} dt \quad \text{für alle } n \in \mathbb{Z}$$

Es gilt folgender Zusammenhang zwischen c_n und a_n sowie b_n :

$$c_0 = \frac{a_0}{2}$$

$$c_n = c_n = \frac{1}{2}(a_n - i \cdot b_n)$$

$$c_{-n} = c_n = \frac{1}{2}(a_n + i \cdot b_n)$$

wobei $|c_n| = |c_{-n}| = \frac{1}{2} \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ gilt.

Beispiel:

Die Fourier-Reihe der Sägezahnfunktion lautet in komplexer Schreibweise:

$$\sum_{n=-\infty; n \neq 0}^{\infty} i \frac{(-1)^n}{n} e^{int}$$

Die Forderung nach einer periodischen Funktion kann man fallen lassen, indem man die Periode immer größer werden läßt. Eine Vergrößerung der Periodenlänge T ist gleichbedeutend mit einer Verkleinerung der Frequenz ω .

Im Amplitudenspektrum rücken dann die einzelnen Spektrallinien immer näher zusammen. Durch den Grenzübergang $T \rightarrow \infty$ entsteht ein kontinuierliches Spektrum. Die unendlichen Summen der komplexen Fourierreihe gehen durch den Grenzübergang in das Fourier-Integral über.

7.5 Fourier-Transformation

Die Fourier-Reihe ist auch Basis für die sogenannte Fourier-Transformation, ein fundamentales Verfahren in der Signalverarbeitung. Durch die Fourier-Transformation lassen sich Signale von der Darstellung (Zeitpunkt, Abtastwert) in die Darstellung (Frequenzanteil, Amplitude, Phase) überführen.

Viele Operationen, z.B. Filter, lassen sich im Frequenzraum leichter durchführen. Anschliessend wird das Signal mit der inversen Fourier-Transformation wieder zurück transformiert.

In der Numerik lassen sich z.B. Polynommultiplikationen mittels Fourier-Transformation schneller durchführen.

Die Grundidee der Anwendung der Fourier-Transformation in der Mustererkennung (KI) ist, das Originalbild und das Vergleichsbild in den Frequenzbereich zu transformieren, um dort die Spektren der beiden Bilder einfacher vergleichen zu können.

Anwendungen der Fourier-Transformation im Maschinenbau: Regelungstechnik; Analyse von Motorgeräuschen; Schwingungsuntersuchungen im Kraftfahrzeugbau oder Schiffsbau oder Raumfahrttechnik

Anwendung findet die Fourier-Transformation auch bei Datenkompressionsverfahren wie JPG und MP3 etc. sowie bei Internet-Suchalgorithmen (Google).

7.5.1 Fourierintegral

Wir wissen nun, dass eine T -periodische Funktion, als reelle bzw. auch als komplexe Fourier-Reihe dargestellt werden kann:

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t}$$

Dabei ist

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{und} \quad c_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-ik\omega t} dt$$

Dies stellt die Zerlegung eines periodischen Vorgangs in eine Summe von harmonischen Schwingungen, anschaulich charakterisiert durch das Amplitudenspektrum, dar. Die Frage, ob auch nicht periodische Funktionen in harmonische Schwingungen zerlegt werden können, führt zum Fourierintegral.

Eine nicht periodische Funktion lässt sich in Gedanken vorstellen, als Grenzfall einer T -periodischen Funktion für $T \rightarrow \infty$.

Diese Überlegung wendet man auf die komplexe Darstellung einer T -periodischen Funktion an.

Zunächst ist:

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-ik\omega t} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-ik\omega t} dt \right) \omega e^{ik\omega t} \end{aligned}$$

Die den einzelnen Summanden der Fourier-Reihe entsprechenden harmonischen Schwingungen habe einen Kreisfrequenzabstand von $\Delta\omega = \omega = \frac{2\pi}{T}$ der mit wachsender Periodendauer T immer kleiner wird.

Im Grenzfall $T \rightarrow \infty$ wird aus $\Delta\omega = \omega$ ein Differential $d\omega$, aus den diskreten Kreisfrequenzen $k\omega$ wird eine kontinuierliche Kreisfrequenz ω , die Summation geht in eine Integration über.

Aus der periodischen Funktion wird eine nicht periodische Funktion. Damit wird im Grenzfall aus obiger Gleichung:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \right) e^{i\omega t} d\omega$$

Die Funktion

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

heißt **Spektralfunktion**.

Eigenschaften ohne Beweis:

1. Ist die Zeitfunktion $f(t)$ absolut integrierbar, d.h. es gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$$

so existiert die zugehörige Spektralfunktion $F(\omega)$.

2. Für eine absolut integrierbare Zeitfunktion $f(t)$ existiert die folgende Darstellung als Fourierintegral:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

Wir haben gesehen, dass sich auch eine nicht periodische Funktion $f(t)$ in harmonische Schwingungen auflösen lässt. Im Gegensatz zu einer periodischen Funktion, bei der nur ganzzahlige Vielfache einer Grundkreisfrequenz ω auftreten können, existiert hier ein kontinuierliches Schwingungsspektrum, dessen spektrale Verteilung durch die Spektralfunktion $F(\omega)$ beschrieben wird. Anstelle einer Fourierreihe erhält man das Fourierintegral.

7.5.2 Definition der Fourier-Transformation

Fourier-Transformation :	$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$
inverse Fourier-Transformation:	$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$

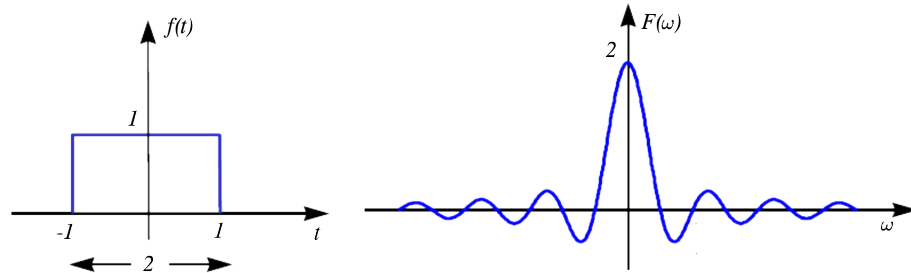
Mit der Fourier-Transformation können beliebige periodische Signale aus sin/cos-Funktionen unterschiedlicher Frequenz zusammengesetzt werden. Dadurch lässt sich das Verhalten technischer Systeme, die durch Differentialgleichungen beschrieben werden, unter dem Einfluss periodischer Eingangsgrößen analysieren.

Die Fouriertransformierte ist eine Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{C}$. Da sie für jeden Wert $\omega \in \mathbb{R}$ erklärt ist, spricht man von einem **kontinuierlichen Spektrum**.

Beispiel:

Fourier-Transformation eines Rechteckimpulses.

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } -1 < t < 1 \\ 0 & \text{für } |t| > 1 \end{cases}$$



Die Fouriertransformierte lautet:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-1}^1 (\cos(\omega t) - i \sin(\omega t)) dt$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\omega} [\sin(\omega t) + i \cos(\omega t)]_{-1}^1 = 2 \frac{\sin \omega}{\omega} & \text{für } \omega \neq 0 \\ 2 & \text{für } \omega = 0 \end{cases}$$

$$= \text{sinc}(\omega)$$

Dies ist der Sinus Cardinalis.

Vergleich von Fourier-Koeffizienten und Fourier-Transformation:

Fourier-Koeffizienten	Fourier-Transformation
$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ periodisch	$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ absolut integrierbar
Fourier-Koeffizienten für $k \in \mathbb{C}$ $c_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-ik\omega t} dt$	Fourier-Transformierte für $\omega \in \mathbb{R}$ $F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$
Rekonstruktion von $f(t)$ durch Koeffizienten der Fourier-Reihe $f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{ik\omega t}$	Rekonstruktion von $f(t)$ durch Fourier-Transformation $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$

7.5.3 Regeln für die Fourier-Transformation

Signal	Fouriertransformierte	Hinweis
$f(t), g(t)$	$F(\omega), G(\omega)$	
$af(t) + bg(t)$	$aF(\omega) + bG(\omega)$	Linearität
$f(t - a)$	$e^{-ia\omega} F(\omega)$	Zeitverschiebung
$e^{iat} f(t)$	$F(\omega - a)$	Frequenzverschiebung
$f(at)$	$\frac{1}{ a } f\left(\frac{\omega}{a}\right)$	Streckung
$f^{(n)}(t)$	$(i\omega)^n F(\omega)$	Transformierte der n -ten Ableitung
$(f * g)(t)$	$\sqrt{2\pi} \cdot F(\omega) \cdot G(\omega)$	Faltung der Funktion f mit g
$f(t) \cdot g(t)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot (F * G)(\omega)$	Produkt der Funktion f und g

7.6 Anwendungen

Die Fourier-Reihe zerlegt eine periodische Funktion in ihre Anteile an Sinus- und Cosinusschwingungen. Mit jedem weiteren Reihenelement der Fourier-Reihe wird der Anteil der nächst höheren Oberschwingung addiert.

In Optik und Akustik kommen naturgemäß periodische Schwingungen vor. Zerlegt man diese in ihre Sinus- und Cosinusschwingungen, so kann man sich schnell überlegen, dass die hochfrequenten Anteile der Fourier-Reihe nicht mehr vom Auge optisch aufgelöst, bzw. vom Ohr akustisch gehört werden können.

Somit werden bei Abbruch der Fourier-Reihe nur die hochfrequenten Anteile der optischen bzw. akustischen Welle ignoriert, die allemal ausserhalb des menschlichen Wahrnehmungsvermögens liegen. Aus diesem Grunde ist die Darstellung als Fourier-Reihe die Basis für u.a. die digitale Fotographie, der digitalen Speicherung von Musik.

Durch die Fourier-Transformation lassen sich Signale von der Darstellung (Zeitpunkt, Abtastwert) in die Darstellung (Frequenzanteil, Amplitude, Phase) überführen. Viele Operationen, z.B. Filter, lassen sich im Frequenzraum leichter durchführen. Anschließend wird das Signal mit der inversen Fourier-Transformation wieder zurück transformiert.

Anwendungs-Beispiele:

1. Numerik

In der Numerik lassen sich z.B. Polynommultiplikationen mittels Fourier-Transformation schneller durchführen.

2. Mustererkennung

Die Grundidee ist, das Originalbild und das Vergleichsbild in den Frequenzbereich zu transformieren, um dort die Spektren der beiden Bilder einfacher vergleichen zu können.

3. JPEG

JPEG ist ein Bild-Kompressions-Verfahren beruhend auf der Fourier-Transformation der **J**oint **P**hotographic **E**xpert **G**roup. Konkret wird hier eine Darstellung als Kosinusreihe vorgenommen.

4. FFT

Das Verfahren der schnellen Fourier-Transformation (Fast Fourier Transform) ist ein Algorithmus zur schnellen Berechnung der Werte der Fourier-Koeffizienten.

5. Regelungstechnik

In der Regelungstechnik werden fast ausschließlich Signale im Zeitraum betrachtet die bei $t = 0$ beginnen und somit in der Laplacetransformation münden. Das Grundprinzip ist jedoch dasselbe. Signalantworten können so sehr einfach für beliebige Eingangssignale von Systemen im Frequenzbereich berechnet und zurück in den Zeitbereich transformiert werden.

KAPITEL 8

Hyperbelfunktionen

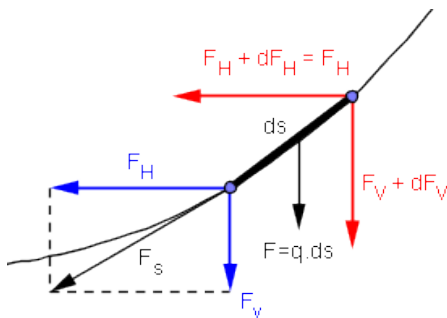
8.1 Motivation

Das berühmte Problem der Kettenlinie, das von Johann Bernoulli 1690 gelöst wurde, lautet:

Eine Kette oder Schnur, die beliebig gebogen werden kann und nur dem eigenen Gewicht unterliegt und sonst unbelastet ist, ist zwischen 2 Punkten aufgehängt, wodurch die so genannte Kettenlinie entsteht.



Durch welche Art von mathematischer Kurve wird diese Kettenlinie beschrieben?



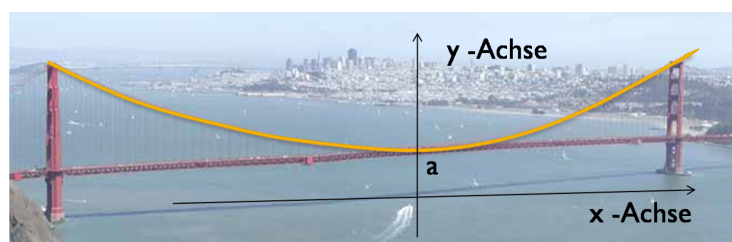
führt auf eine Differentialgleichung 2. Ordnung:

$$f''(x) = \frac{q}{F_H} \sqrt{1 + f'(x)^2}$$

mit q = Gewicht des Seils pro Längeneinheit

Die Lösung führt auf den Kosinus-Hyperbolicus

Vor allem im Gebiet der Konstruktion von Hochspannungsleitungen, Brücken oder von antiken Tempelsäulen kann man dies sehen, aber auch in der Natur in Form z.B. von Spinnweben.



8.2 Allgemeine Hyperbelfunktion

Definition:

Die Kettenlinie (auch Seilkurve genannt) beschreibt die Kurve eines homogenen Seils ohne Biegesteifigkeit, welches nur aufgrund der _____ durchhängt.

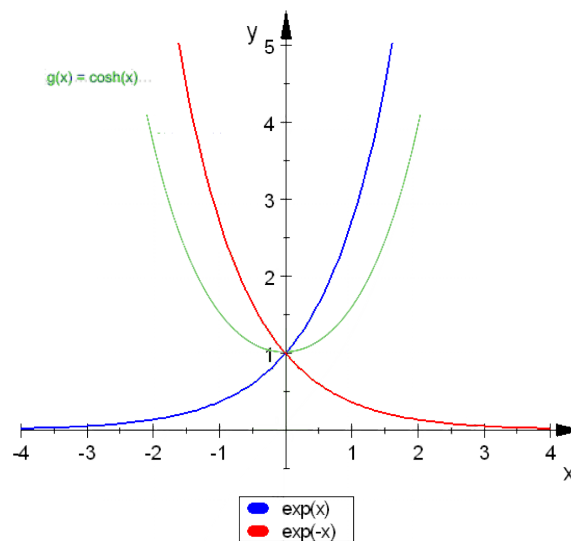
Sie wird durch eine Hyperbelfunktion (hier: Kosinus-Hyperbolicus) beschrieben, nämlich durch

$$f(x) := \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right) \quad (8.1)$$

mit der Ableitung:

$$f'(x) := \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} \right) \quad (8.2)$$

wobei a eine positive Konstante ist, die die Steigung und den y -Achsenabschnitt beeinflusst.



8.3 Kosinus Hyperbolicus

Definition:

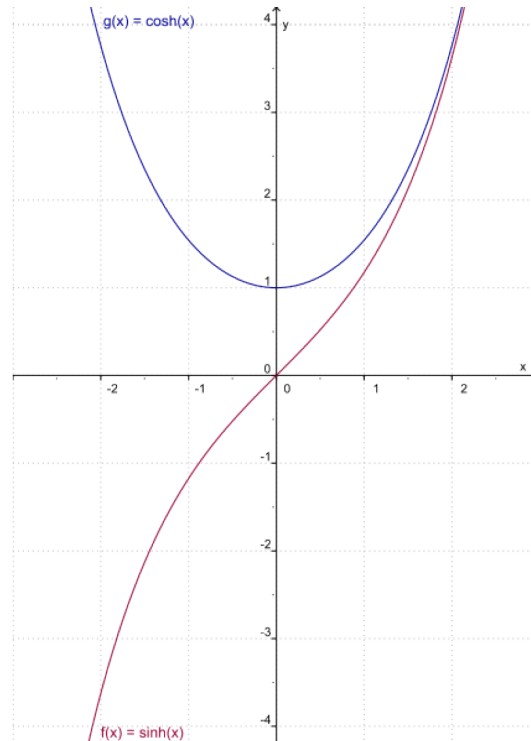
$$\cosh(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (8.3)$$

Es ist schnell festzustellen, dass der Kosinus Hyperbolicus eine gerade Funktion ist.

Dies bedeutet $f(x) = f(-x)$. Die Funktion besitzt bei $(0 | 1)$ einen Tiefpunkt. Daraus folgt, dass der Wertebereich von $1 \leq f(x) < +\infty$ geht und der Definitionsbereich bei $-\infty < x < +\infty$ liegt.

Cosh ist eine stetige Funktion mit $a = 1$ für die allgemeine Hyperbelfunktion (siehe vorhergehende und folgende Abbildung).

Die Ableitung ergibt für $a = 1$ den sinh.



8.4 Sinus Hyperbolicus

Definition:

$$\sinh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad (8.4)$$

Hier bemerkt man schnell, dass der sinh eine ungerade Funktion ist, denn $f(x) = -f(-x)$.

Der sinh ist ebenfalls wie der cosh eine stetige Funktion und besitzt am Punkt $(0/0)$ einen

_____.

Der Werte- und Definitionsbereich des sinh erstreckt sich über alle Zahlen.

Auch den Sinus Hyperbolicus kann man sich gut anhand der Exponentialfunktion herleiten. Für positive x -Werte ähnelt der Graph stark der normalen $f(x) = e^x$ Funktion. Für die negativen x -Werte beschreibt der Graph die Funktion $f(x) = -e^{-x}$.

Nun fügt man die beiden Funktionen zusammen und streckt sie wieder um $a = 1$ und erhält nun den Sinus Hyperbolicus.

8.5 Tangens Hyperbolicus

Bei den trigonometrischen Funktion ist der Tangens der Quotient aus Sinus und Kosinus, dies ist beim Tangens Hyperbolicus genauso:

Definition:

$$\tanh(h) := \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad (8.5)$$

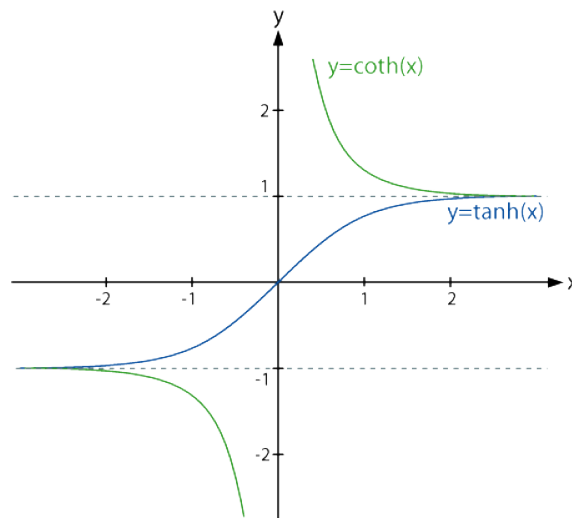
Der tanh ist ebenfalls eine stetige Funktion mit einem Wertebereich von $-1 < f(x) < +1$ und einem Definitionsbereich von $-\infty < x < +\infty$.

8.6 Cotangens Hyperbolicus

Definition:

$$\coth(h) := \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \quad \text{für alle } x \neq 0 \quad (8.6)$$

Der coth ist an der Stelle $x = 0$ nicht definiert, da er dort einen Pol hat. Somit erhalten wir für den Definitionsbereich von coth: $-\infty < x < +\infty$; $x \neq 0$ und den Wertebereich: $-\infty < f(x) < -1$; $1 < f(x) < +\infty$



8.7 Ableitungen

$$\begin{aligned}
 \cosh'(x) &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\
 &= \frac{e^x}{2} + (-) \frac{e^{-x}}{2} \\
 &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\
 &= \sinh(x) \\
 \Rightarrow \cosh'(x) &= \sinh(x)
 \end{aligned}$$

Für die weiteren Ableitungen gilt:

$$\begin{aligned}
 \sinh'(x) &= \cosh(x) \\
 \tanh'(x) &= \frac{1}{\cosh^2(x)} \\
 \coth'(x) &= \frac{1}{\sinh^2(x)}
 \end{aligned}$$

Beim Kosinus- und Sinus Hyperbolicus kann man sich folgendes trivialerweise herleiten:

$$\begin{aligned}
 (\cosh(x))^{(n)} &= \begin{cases} \sinh(x) & \text{für ungerades } n \\ \cosh(x) & \text{für gerades } n \end{cases} \\
 (\sinh(x))^{(n)} &= \begin{cases} \cosh(x) & \text{für ungerades } n \\ \sinh(x) & \text{für gerades } n \end{cases}
 \end{aligned}$$

8.8 Zusammenhang zu trigonometrischen Funktionen

Die Hyperbelfunktionen heißen nicht ohne Grund Sinus, Kosinus, Tangens, usw. Hyperbolicus. Sie weisen viele ähnliche Merkmale auf, die die trigonometrischen Sinus und Kosinus Funktionen auch besitzen.

Trigonometrische Funktionen

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

Hyperbelfunktionen

$$\sinh^2(x) - \cosh^2(x) = 1$$

Additionstheoreme:

$$\begin{aligned}
 \sin(\alpha + \beta) &= \sin(\alpha) \cos(\beta) + \sin(\beta) \cos(\alpha) & \sinh(\alpha + \beta) &= \sinh(\alpha) \cosh(\beta) + \sinh(\beta) \cosh(\alpha) \\
 \cos(\alpha + \beta) &= \cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta) & \cosh(\alpha + \beta) &= \cosh(\alpha) \cosh(\beta) + \sinh(\alpha) \sinh(\beta)
 \end{aligned}$$

8.9 Umkehrfunktionen

Definition:

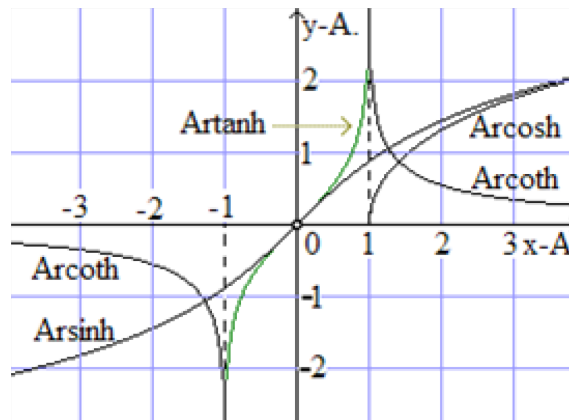
Die Umkehrfunktionen der Hyperbelfunktionen werden als Areafunktionen bezeichnet und mit den Buchstaben ar- abgekürzt.

Berechnung des arcosh:

$$x = \cosh(A)$$

in dieser Gleichung muss man nun nach A auflösen

$$\begin{aligned} x &= \frac{e^A + e^{-A}}{2} \\ 0 &= e^A - 2x + e^{-A} \\ 0 &= e^{2A} - 2xe^A + 1 \\ e_{1,2}^A &= x^2 \pm \sqrt{x^2 - 1} \\ A &= \ln(x \pm \sqrt{x^2 - 1}) \\ A &= \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) =: \operatorname{arcosh}(x) \end{aligned}$$



Auf dieselbe Art und Weise erhält man auch die anderen Umkehrfunktionen.

$$\operatorname{arshinh}(x) := \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

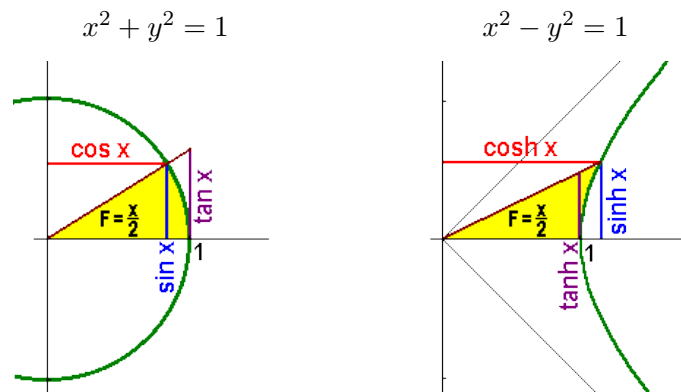
$$\operatorname{artanh}(x) := \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \text{ für } |x| < 1$$

$$\operatorname{arcoth}(x) := \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \text{ für } |x| > 1$$

8.10 Geometrische Deutung

Man kann die Hyperbelfunktionen nun nicht nur mit Hilfe der Exponentialfunktion definieren, sondern man kann sie, wie auch den normalen Sinus und Kosinus, geometrisch definieren.

Beim Sinus und Kosinus geschieht dies am Einheitskreis $x^2 + y^2 = 1$ und bei den Hyperbelfunktionen kann man dies an der Einheitshyperbel $x^2 - y^2 = 1$ konstruieren. Die folgende Abbildung soll dies verdeutlichen.



Im linken Bild sieht man die geometrische Definition der **Sinus**, **Kosinus** und **Tangensfunktion** am Einheitskreis (grün).

In der rechten Abbildung ist der (rechte) Ast der Einheitshyperbel (grün) dargestellt.

Nun legt man eine Gerade durch den Nullpunkt, die die Einheitshyperbel in einem Punkt schneidet. Man erhält dann einen Punkt, bei dem der y -Achsenabschnitt gleich dem **Sinus Hyperbolicus** ist und der x -Achsenabschnitt der **Kosinus Hyperbolicus**.

Den **Tangens Hyperbolicus** erhält man, indem man von der x -Achse aus eine Tangente an die Einheitshyperbel anlegt und diese dann die Gerade schneidet.

8.11 Erweiterung auf komplexe Zahlen

Da die Hyperbelfunktionen mit der Exponentialfunktion definiert werden kann betrachtet man die Formel von Euler:

$$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)$$

Für imaginäre Werte $x = i\varphi$ erhält man dann:

$$\cosh(x) = \cos(ix)$$

$$\sinh(x) = -i \sin(ix)$$

$$\tanh(x) = -i \tan(ix)$$

$$\coth(x) = i \cot(ix)$$

Mathematik 2: Formelsammlung

Trigonometrie

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$	$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$	
$\cos^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x}$	$\sin^2 x = \frac{\tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
$\sin(-x) = -\sin(x)$	$\sin(\pi - x) = \sin(x)$	$\sin(\pi + x) = -\sin(x)$
$\cos(-x) = \cos(x)$	$\cos(\pi - x) = -\cos(x)$	$\cos(\pi + x) = -\cos(x)$
$\tan(-x) = -\tan(x)$	$\tan(\pi - x) = -\tan(x)$	$\tan(\pi + x) = \tan(x)$
$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$		$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$
$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$		$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$
$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot(x)$		$\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cot(x)$
$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$		$\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$
$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$		
$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$		$\tan(x - y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$
$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$		
$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$		$2 \cos^2 x = 1 + \cos 2x$
$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$		$2 \sin^2 x = 1 - \cos 2x$
$\sin 2x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x}$	$\cos 2x = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$	$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$
$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$		$\cos 3x = -3 \cos x + 4 \cos^3 x$
$\sin x + \sin y = 2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$		$\tan x + \tan y = \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y}$
$\sin x - \sin y = 2 \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \cos\left(\frac{x+y}{2}\right)$		$\tan x - \tan y = \frac{\sin(x-y)}{\cos x \cos y}$
$\cos x + \cos y = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$		
$\cos x - \cos y = -2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$		
$\sin x \cos y = \frac{1}{2} [\sin(x+y) + \sin(x-y)]$		
$\cos x \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x+y) + \cos(x-y)]$		
$\sin x \sin y = \frac{1}{2} [\cos(x-y) - \cos(x+y)]$		

Elementare Ableitungen

Funktionsklasse	Funktion $f(x)$	Ableitung $f(x)'$
konstante Funktion	c	0
Potenzfunktion	x^n mit $n \in \mathbb{R}$	$n \cdot x^{n-1}$
Wurzelfunktion	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
Trigonometrische Funktionen	$\sin(x)$ $\cos(x)$ $\tan(x)$ $\cot(x)$	$\cos(x)$ $-\sin(x)$ $\frac{1}{\cos^2(x)}$ $-\frac{1}{\sin^2(x)}$
Arcusfunktionen	$\arcsin(x)$ $\arccos(x)$ $\arctan(x)$ $\operatorname{arccot}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\frac{1}{1+x^2}$ $-\frac{1}{1+x^2}$
Exponentialfunktionen	e^x a^x	e^x $\ln(a) \cdot a^x$
Logarithmusfunktionen	$\ln(x)$ $\log_a(x)$	$\frac{1}{x}$ $\frac{1}{\ln(a) \cdot x}$

Elementare Stammfunktionen

$$1) \int x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C \quad (p \neq -1)$$

$$2) \int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C$$

$$3) \int e^x dx = e^x + C$$

$$4) \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1)$$

$$5) \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$6) \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$7) \int \tan x dx = -\ln |\cos x| + C$$

$$8) \int \cot x dx = \ln |\sin x| + C$$

$$9) \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int (1 + \tan^2 x) dx = \tan x + C$$

$$10) \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int (1 + \cot^2 x) dx = -\cot x + C$$

$$11) \int \sinh x dx = \int \frac{e^x - e^{-x}}{2} dx = \cosh x + C$$

$$12) \int \cosh x dx = \int \frac{e^x + e^{-x}}{2} dx = \sinh x + C$$

$$13) \int \tanh x dx = \int \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} dx = \ln(\cosh x) + C$$

$$14) \int \coth x dx = \int \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1} dx = \ln |\sinh x| + C$$

$$15) \int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \int (1 - \tanh^2 x) dx = \tanh x + C$$

$$16) \int \frac{dx}{\sinh^2 x} = \int (-1 + \coth^2 x) dx = -\coth x + C$$

$$17) \int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \arctan x + C_1 \\ -\operatorname{arccot} x + C_2 \end{cases} \quad \arctan x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arccot} x$$

$$18) \int \frac{dx}{1-x^2} = \begin{cases} \operatorname{Artanh} x + C_1 & : |x| < 1 & \operatorname{Artanh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \\ \operatorname{Arcoth} x + C_2 & : |x| > 1 & \operatorname{Arcoth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1} \end{cases} \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right|$$