Bei einer Definitionslücke handelt es sich grundsätzlich um Punkte einer Funktion, die außerhalb des Definitionsbereichs liegen. Man spricht von einer hebbaren Definitionslücke, wenn die Zähler-Nullstellen ≥ der Nenner-Nullstellen sind und sich somit durch Kürzen entfernen lassen.

(Stetig) hebbare oder behebbare Definitionslücken können bei gebrochen-rationalen Funktionen vorkommen.

Es gibt eine hebbare Definitionslücke bei x_0, falls x_0 eine Nullstelle des Zählers und des Nenners ist und die Nullstellen im Zähler mehr als die im Nenner sind oder die Nullstelle sich kürzen lässt.

An dieser Stelle ist die Funktion zwar nicht definiert, kann aber (stetig) fortgesetzt werden und wird deswegen als hebbar bezeichnet.

Vorgehensweise zur Bestimmung:

1. **Nullstellen des Nenners bestimmen.**
2. **Nullstellen des Zählers bestimmen: Resultiert dieselbe Nullstelle wie im Nenner, liegt eine mögliche hebbare Definitionslücke vor.**
3. **Zähler und Nenner faktorisieren und den Bruch kürzen.**
4. **Gemeinsame Nullstelle aus 2. in den Nenner der gekürzten faktorisierten Funktion aus 3. einsetzen. Wird der Nenner ungleich null, so liegt eine hebbare Definitionslücke vor. Wird der Nenner hingegen null, so liegt eine Polstelle vor.**

In 4. muss nochmals überprüft werden, ob eine hebbare Definitionslücke vorliegt. Dafür wird der bei 2. ermittelte Wert (falls hebbare Lücke) in den Nenner eingesetzt.

- Wird der faktorisierte Nenner ebenfalls null, resultiert eine Defintionslücke. Somit liegt eine Polstelle vor.
- Wird der Nenner , liegt eine hebbare Lücke vor

Beispiel:

$$f(x) = \frac{z(x)}{n(x)} = \frac{2x^2 + 2x - 12}{6x^2 - 12x}$$

Prüfe, ob eine hebbare Definitionslücke vorliegt und behebe diese gegebenenfalls …

Lösung:

1. Nullstellen des Nenners

$n(x) = 6x^2 - 12x \quad |:6$

$n(x) = x^2 - 2x$

mit pq-Formel folgt:

$x_{1/2} = -\frac{-2}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{2}{2}\right)^2 - 0}$

$x_1 = 2 \quad x_2 = 0$

2. Nullstellen des Zählers

$z(x) = 2x^2 + 2x - 12 \quad |:2$

$= x^2 + 1x - 6$

$x_{1/2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 6}$

$x_1 = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2} = \frac{4}{2} = 2 \quad x_2 = -3$

3. Zähler und Nenner faktorisieren

$z(x) = 2(x-2)(x+3)$

$n(x) = 6(x-2)(x-0)$

$= 6(x-2)x$

Die faktorisierte Funktion

$\Rightarrow f(x) = \frac{2\cancel{(x-2)}(x+3)}{6x\cancel{(x-2)}}$

$f(x) = \frac{\cancel{2}(x+3)}{\cancel{6}x}$ kürzen

$f(x) = \frac{x+3}{3x}$

4. Erneut auf hebbare Lücken überprüfen

Mögl. hebbare Lücke lag bei $x = 2$ (für Zähler u. Nenner ist hier Nullst.), nun einsetzen in faktorisierte Fkt.

$x = 2$ in $n(x) = 3x \Rightarrow 6 \neq 0$, also hebb. Lücke, da $n(x) \neq 0$