Mathematik 1: Zusatzübung - Komplexe Zahlen

Natur: Logarithmische Spirale

In der Natur und im Alltag kommen eine Vielzahl von Spiralformen vor. Die Kerne von Sonnenblumen sind spiralförmig um den Mittelpunkt angeordnet, Schneckenhäuser wachsen spiralförmig, Wirbelstürme und Galaxien sind spiralförmig angeordnet (vgl. Goldener Schnitt).

In folgender Aufgabe lernen Sie, wie logarithmische Spiralen mit komplexen Zahlen erzeugt werden können. Mit rechnergestützten Algorithmen können so auch fraktale Gebilde geschaffen werden (Mandelbrot-Fraktale).

1. **Aufgabe:**

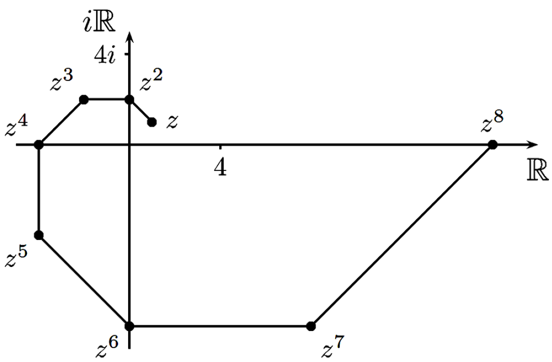
   Es sei $z = 1 + i$. Berechnen Sie z^2, z^3, z^4, z^5, z^6, z^7 und z^8, und zeichnen Sie die entstehenden Zahlen zusammen mit z als Punkte in die Gaußsche Zahlenebe ein. Verbinden Sie anschließend die Punkte durch Strecken.

   Lösung:

   Was Sie erhalten ist bereits eine Annäherung an eine logarithmische Spirale.

   Die Werte sind:

	Ergenbis	Betrag	Argument
z	$1+i$	$\sqrt{2}$	$\pi/4$
z^2	$2i$	2	$\pi/2$
z^3	$-2+2i$	$2\sqrt{2}$	$3\pi/4$
z^4	-4	4	π
z^5	$-4-4i$	$4\sqrt{2}$	$5\pi/4$
z^6	$-8i$	8	$3\pi/2$
z^7	$8-8i$	$8\sqrt{2}$	$7\pi/4$
z^8	16	16	0



2. Aufgabe:

Eine vollständige logarithmische Spirale erhält man, wenn man von den diskreten Exponenten 1, 2, . . . , 8 zu einem kontinuierlichen Exponenten $t \in \mathbb{R}$ übergeht.
Statt z^1, z^2, ... betrachten wir z^t mit $t \in \mathbb{R}$.

Wir betrachten das wieder am Beispiel $1+i$. Der Betrag von $1+i$ ist $\sqrt{2}$, das Argument ist $\frac{\pi}{4}$. Wir können $1+i$ also in Polarform schreiben:

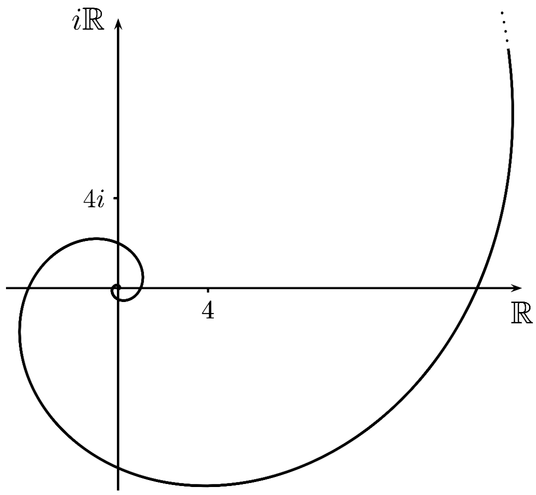
$$1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{2}}$$

Wir wollen $(1 + i)^t$ für ein allgemeines $t \in \mathbb{R}$ berechnen. Mit der Polarform ist dies besonders einfach. Es ist

$$1 + i = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^t = \left(\sqrt{2}\right)^t \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^t = 2^{\frac{t}{2}} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}t}$$

Die Gleichung für eine logarithmische Spirale lautet also

$$w(t) = 2^{\frac{t}{2}} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}t}$$



a) Untersuchen Sie, wie die logarithmische Spirale in einer Umgebung der 0 aussieht. Betrachten Sie dazu immer kleiner werdende t, z.B. $t = -100$.

Lösung:

Wir betrachten den Betrag der Zahlen w(t). Es ist $|w(t)| = 2^{\frac{t}{2}}$

für $t = 0$ ist $|w(0)| = 2^{\frac{0}{2}} = 2^0 = 1$.

Für negative t ist $|w(t)|$ immer kleiner als 1. Wenn t nun immer kleiner wird, dann nähert sich $|w(t)|$ immer mehr 0. So ist beispielsweise für $t = -100$ der Betrag bereits $|w(-100)| = 2^{\frac{-100}{2}} = 2^{-50} \approx 8.9 \cdot 10^{-16}$.

In der Nähe der Null windet sich also die Spirale unendlich oft um die Null und kommt ihr dabei immer näher. Allerdings erreicht sie die Null niemals. Der Betrag $|w(t)| = t^{\frac{t}{2}}$ ist nämlich immer positiv.

b) Überlegen Sie sich was passiert, wenn man $z = i$ wählt. Welche anderen komplexen Zahlen verwendet man demnach auch nicht, um eine logarithmische Spirale zu erzeugen?

Lösung:

Die Polarform von i ist $1 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$. Für $z = i$ ist also $w(t) = i^t = 1^t \cdot e^{i\frac{\pi}{2}t}$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Wie sieht die Kurve aus, die dadurch entsteht?

Wir betrachten den Betrag der Zahlen $w(t) : |w(t)| = 1^t = 1$ $t = 1$. Da der Betrag von $w(t)$ immer 1 ist, liegen alle Punkte $w(t)$ auf dem Kreis um den Nullpunkt mit Radius 1.

Daher schließt man $z = i$ aus.

Man sieht an der Rechnung auch, dass das gleiche Problem bei allen komplexen Zahlen z auftritt, deren Betrag 1 ist. Deshalb verwendet man diese Zahlen auch nicht, um eine logarithmische Spirale zu erzeugen. Also muss gelten $|z| \neq 1$.

c) Stellen Sie die allgemeine Gleichung für logarithmische Spiralen auf.

Lösung:

Es sei z eine nicht reelle Zahl mit $|z| \neq 1$. Die durch die Gleichung

$$w(t) = z^t \ , \quad t \in \mathbb{R}$$

gegebene Kurve heißt logarithmische Spirale.