

# Mathematik 1: Zusatzübung - Komplexe Zahlen

---

## Natur: Logarithmische Spirale

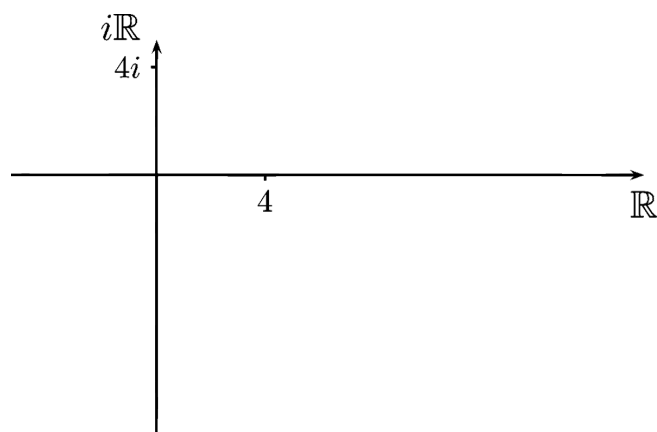
In der Natur und im Alltag kommen eine Vielzahl von Spiralformen vor. Die Kerne von Sonnenblumen sind spiralförmig um den Mittelpunkt angeordnet, Schneckenhäuser wachsen spiralförmig, Wirbelstürme und Galaxien sind spiralförmig angeordnet (vgl. Goldener Schnitt).

In folgender Aufgabe lernen Sie, wie logarithmische Spiralen mit komplexen Zahlen erzeugt werden können. Mit rechnergestützten Algorithmen können so auch fraktale Gebilde geschaffen werden (Mandelbrot-Fraktale).



### 1. Aufgabe:

Es sei  $z = 1 + i$ . Berechnen Sie  $z^2$ ,  $z^3$ ,  $z^4$ ,  $z^5$ ,  $z^6$ ,  $z^7$  und  $z^8$ , und zeichnen Sie die entstehenden Zahlen zusammen mit  $z$  als Punkte in die Gaußsche Zahlenebene ein. Verbinden Sie anschließend die Punkte durch Strecken.



---

## 2. Aufgabe:

Eine vollständige logarithmische Spirale erhält man, wenn man von den diskreten Exponenten  $1, 2, \dots, 8$  zu einem kontinuierlichen Exponenten  $t \in \mathbb{R}$  übergeht. Statt  $z^1, z^2, \dots$  betrachten wir  $z^t$  mit  $t \in \mathbb{R}$ .

Wir betrachten das wieder am Beispiel  $1+i$ . Der Betrag von  $1+i$  ist  $\sqrt{2}$ , das Argument ist  $\frac{\pi}{4}$ . Wir können  $1+i$  also in Polarform schreiben:

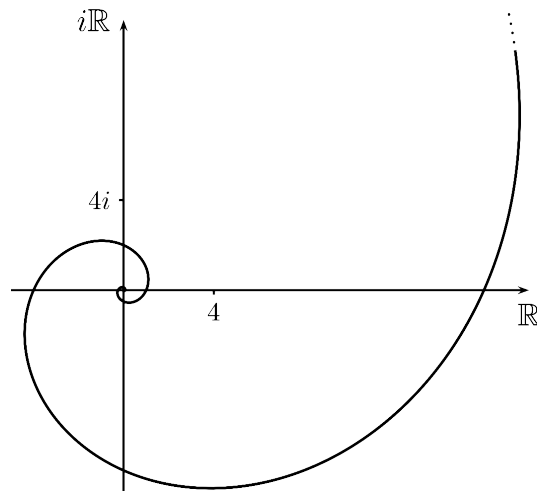
$$1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{2}}$$

Wir wollen  $(1+i)^t$  für ein allgemeines  $t \in \mathbb{R}$  berechnen. Mit der Polarform ist dies besonders einfach. Es ist

$$1+i = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^t = (\sqrt{2})^t \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^t = 2^{\frac{t}{2}} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}t}$$

Die Gleichung für eine logarithmische Spirale lautet also

$$w(t) = 2^{\frac{t}{2}} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}t}$$



- Untersuchen Sie, wie die logarithmische Spirale in einer Umgebung der 0 aussieht. Betrachten Sie dazu immer kleiner werdende  $t$ , z.B.  $t = -100$ .
- Überlegen Sie sich was passiert, wenn man  $z = i$  wählt. Welche anderen komplexen Zahlen verwendet man demnach auch nicht, um eine logarithmische Spirale zu erzeugen?
- Stellen Sie die allgemeine Gleichung für logarithmische Spiralen auf.