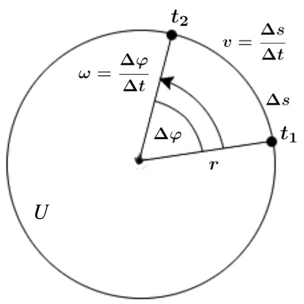
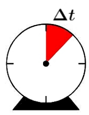
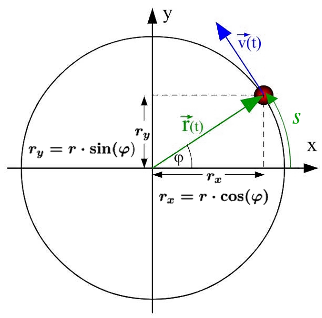
# Mathematik 1: Zusatzübung - Funktionen

### Kreisbewegung: Funktionen

Eine gleichförmige Kreisbewegung ist eine Bewegung, bei der die Bahnkurve auf einem Kreis verläuft („Kreisbewegung“) und der Betrag der Bahngeschwindigkeit konstant ist („gleichförmig“). Sie ist damit eine Form der Rotation. Im Gegensatz zur gleichförmigen Bewegung bleibt nur der **Betrag** des Geschwindigkeitsvektors **konstant**, aber nicht seine Richtung.




- Die Frequenz $f$ gibt die Umdrehungen pro Sekunde an, die Periodendauer $T$ die Zeit für eine Umdrehung $\Rightarrow$ $\boldsymbol{f = \frac{1}{T}}$ $\left[\mathbf{1\ Hz} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{s}}\right]$.
- Für die Länge des Kreisbogens gilt: $\boldsymbol{s = r \cdot \varphi}$, mit $\varphi$ im **Bogenmaß**!

### Bahngeschwindigkeit $v$:

$$\text{Geschwindigkeit} = \frac{\text{zurückgelekte Strecke}}{\text{dafür benötigte Zeit}} : \quad \boldsymbol{v = \frac{\Delta s}{\Delta t}\Big|_{\text{Umlauf}} = \frac{2\pi \cdot r}{T} = 2\pi \cdot r \cdot f}$$

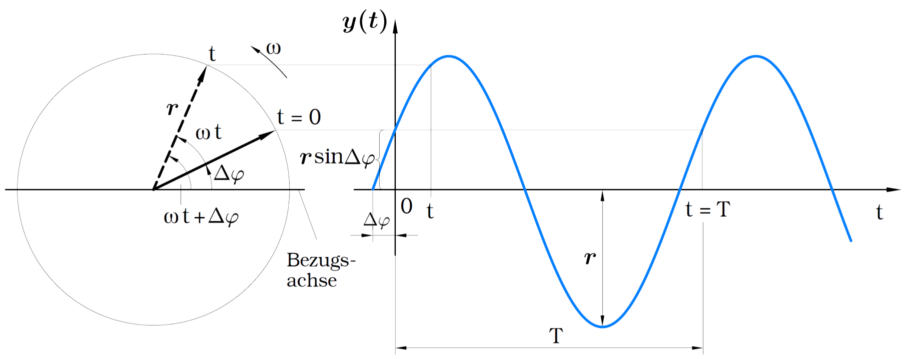
### Winkelgeschwindigkeit $\omega$:

$$\text{Winkelgeschwindigkeit} = \frac{\text{überstrichener Winkel}}{\text{dafür benötigte Zeit}} : \quad \boldsymbol{\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\Big|_{\text{Umlauf}} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot f}$$

Die Position eines Körpers auf der Kreisbahn kann man mithilfe von $x$- und $y$-Komponente beschreiben.

Für die $x$-Komponente $r_x$ gilt: $\boldsymbol{r_x = r \cdot \cos(\varphi)}$,
für die $y$-Komponente $r_y$ gilt: $\boldsymbol{r_y = r \cdot \sin(\varphi)}$.

Setzt man $x$ nun gleich der Zeit $t$, so kann man allgemein schreiben: $\boldsymbol{y(t) = r \cdot \sin(\omega t + \Delta\varphi)}$



## 1. Aufgabe:

Die Erde dreht sich in etwa 24 Stunden um ihre Achse. Dabei haben alle Orte auf der Erdoberfläche dieselbe Winkelgeschwindigkeit, aber nicht dieselbe Bahngeschwindigkeit, da nicht alle Orte denselben Abstand zur Drehachse der Erde haben.

a) Bestimmen Sie Frequenz und Winkelgeschwindigkeit eines Ortes auf der Erdoberfläche.

b) Wie groß ist die Bahngeschwindigkeit eines Punktes auf dem Äquator? (Erdradius $r = 6370$ km, wir nehmen an, dass die Erde eine Kugel ist ;-)

c) Wie groß ist die Bahngeschwindigkeit von Reutlingen (48.5° nördliche Breite)?

**Lösung:**

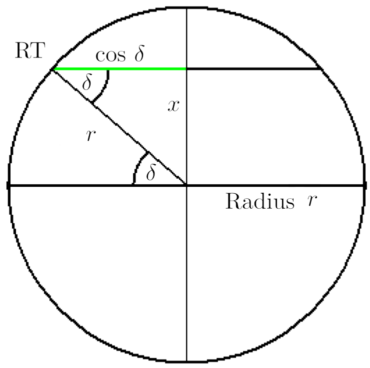
a) $f = \frac{1}{T} \quad \Rightarrow \quad f = \frac{1}{86400 \text{ s}} = 0.00001 \text{ Hz} = 1 \cdot 10^{-5} \text{ Hz}$

$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \Rightarrow \quad f = \frac{2\pi}{86400 \text{ s}} = 0.00007 \ \frac{1}{\text{s}} = 7 \cdot 10^{-5} \ \frac{1}{\text{s}}$

b) $v = \frac{2\pi \cdot r}{T} \quad \Rightarrow \quad f = \frac{2\pi \cdot 6370 \text{ km}}{24 \text{ h}} = 1668 \ \frac{\text{km}}{\text{h}}$

c) Reutlingen (RT):

Erst müssen wir den Abstand $x$ zur Erdachse bestimmen. Die geografische Breite $\delta$ ist der Winkel, den die Strecke Erdmittelpunkt- Reutlingen mit dem Äquator einschließt.
Bei Reutlingen tritt $\delta$ nochmals auf (Wechselwinkel).
Es ergibt sich ein rechtwinkliges Dreieck mit
$\cos\,\delta = \frac{x}{r}$ und somit $x = r{\cdot}\cos\,\delta$




$v = \frac{2\pi \cdot r \cdot \cos(\delta)}{T} = \frac{2\pi \cdot 6370 \text{ km} \cdot \cos(48.5°)}{24 \text{ h}} = 1105 \ \frac{\text{km}}{\text{h}}$

## 2. Aufgabe:

Berechnen Sie die Bahngeschwindigkeit der Erde auf ihrer als kreisförmig angenommenen Bahn um die Sonne mit dem Radius $r = 150 \cdot 10^6$ km.

**Lösung:**

$v = \frac{2\pi \cdot r}{T} \quad \Rightarrow \quad f = \frac{2\pi \cdot 150 \cdot 10^6 \text{ km}}{8760 \text{ h}} = 108000 \ \frac{\text{km}}{\text{h}} = 29900 \ \frac{\text{m}}{\text{s}} = 29.9 \ \frac{\text{km}}{\text{s}}$

## 3. Aufgabe:

Wie viele Umdrehungen je Sekunde macht ein Autoreifen mit 72 cm Durchmesser bei einer Fahrgeschwindigkeit von 72 km/h?

**Lösung:**

Das Rad rollt jede Sekunde 20 Meter auf der Straße ab, d.h. um die Zahl $n$ der Umdrehungen zu bestimmen, muss man einfach dividieren:

$n = \frac{20\text{m}}{2.26\text{m}} = 8.8 \text{ m}$

Antwort: Das Rad macht knapp neun Umdrehungen pro Sekunde.