Mathematik 1: Zusatzübung - Folgen

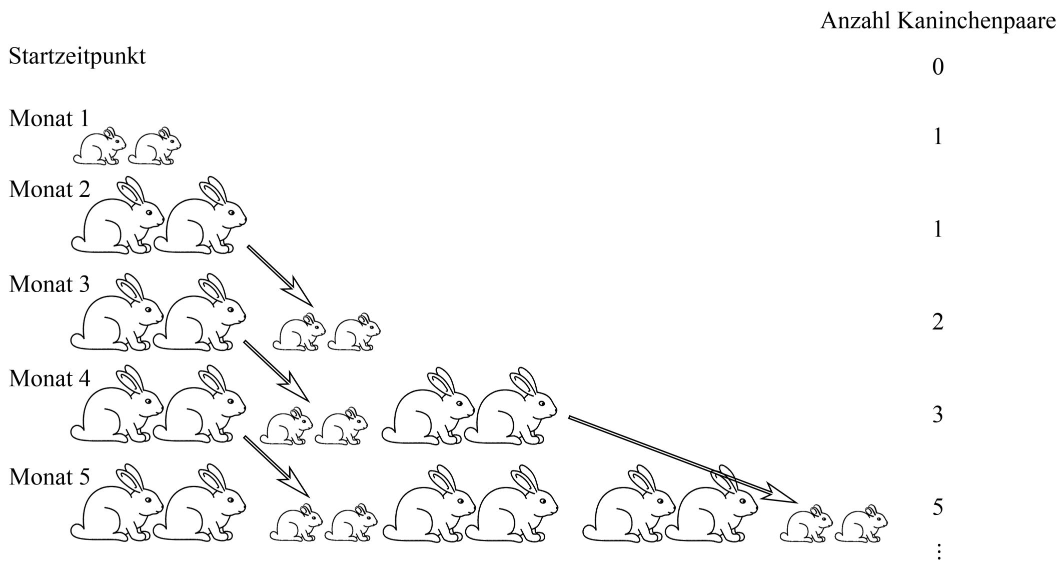
Natur/Kunst: Fibonacci-Folge / Goldener Schnitt

Berühmtheit erlangten Fibonacci und sein Werk mit einer relativ "belanglosen" Aufgabenstellung:

Das Kaninchenproblem. Wir sehen uns die Vermehrung von Kaninchenpaaren anhand eines abgeschlossenen Modells genauer an. Unser Augenmerk liegt dabei auf dem Zuwachs der einzelnen Kaninchengenerationen, wobei der Start mit null Kaninchenpaaren festgelegt wird. Im ersten Monat kommt das erste Kaninchenpaar hinzu. Ab diesem Zeitpunkt gilt es folgende mathematische Regeln zu beachten:

1. Erst im zweiten Lebensmonat wird das Kaninchenpaar fortplanzungsfähig.
2. Ab dem gebärfähigen Alter wirft das Paar pro Monat ein weiteres Kaninchenpaar.
3. Kein Kaninchen stirbt, wird von außen hinzugefügt bzw. kann diese Gemeinschaft verlassen.

Beim Startpunkt null existiert somit noch kein Kaninchenpaar. Erst im ersten Monat wird nach unserer Voraussetzung genau ein Kaninchenpaar in das Modell eingebracht. Dieses Paar wird nach zwei Monaten fortpfanzungsfähig, wodurch die Anzahl im zweiten Monat bei einem Kaninchenpaar bestehen bleibt. Somit leben aber dann im dritten Monat das Ursprungspaar und ein weiteres junges Kaninchenpaar. Im vierten Monat wirft das Ausgangspaar ein weiteres Paar, währenddessen das andere Kaninchenpaar gebärfähig wird. Verfolgt man das Diagramm, so erkennt man, dass im fünften Monat bereits fünf (im sechsten Monat schon acht) Kaninchenpaare vorhanden sind.



Die Zahlenreihenfolge der Kaninchenpaare (f_0; f_1; f_2; ...), welche sich durch die Aneinanderreihung der Fibonacci- Zahlen ergibt, wird als Fibonacci-Folge bezeichnet.

1. Aufgabe:

Die Anzahl der Paare im n-ten Monat werden mit f_n defniert. Dadurch ergibt sich:

$f_0 = 0;\ f_1 = 1;\ f_2 = 1;\ f_3 = 2;\ f_4 = 3;\ f_5 = 5;\ f_6 = 8$ ...

Wie viele Kaninchenpaare gibt es im n-ten Monat?
Finden Sie dazu eine Rekursionsformel und berechnen Sie die Werte bis $n = 10$.

2. Aufgabe:

Nun widmen wir uns einer neuen Fragestellung: Welche Zahl ergibt das 155-te (f_{155}) oder das 1001-te (f_{1001}) Folgenglied der Fibonacci-Reihenfolge?

Hier ergibt sich eine Schwierigkeit: Um dies beantworten zu können, müsste man mit der rekursiven Darstellung alle Folgenglieder bis zum Gesuchten berechnen. Dies ist natürlich sehr aufwendig und würde einiges an Zeit in Anspruch nehmen.

Finden Sie eine Möglichkeit f_n auf direktem Weg zu erhalten, also eine Formel die unabhängig von ihren Vorgängern ist.

Lösungshinweis: Betrachten Sie die rekursive Darstellungsweise:

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n \ \forall n \in \mathbb{N}$$

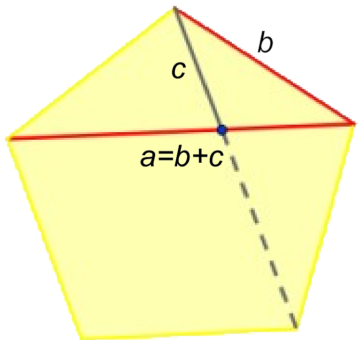
Uns interessiert das Wachstum der Folgenglieder und da diese sehr schnell, sehr große Werte annehmen, vermuten wir, dass ein exponentielles Wachstum vorliegt.
Deshalb wird der Ansatz

$$x_n := \lambda^n$$

ausgewählt, wobei es sich bei λ um eine unbekannte Zahl aus der Menge der reellen (oder komplexen) Zahlen handelt, welche bestimmt werden muss.

3. Aufgabe: Misst man bei einem regelmäßigen Fünfeck gewisse Längen und bildet daraus ein Verhältnis, stößt man auf eine überraschende Eigenschaft.

So ist beispielsweise das Verhältnis der Diagonalen (c) zur Seitenlänge (b) gleich dem Verhältnis des langen Diagonalenabschnitts (*gestrichelt*) zum kurzen (c), wobei der lange Diagonalenabschnitt (*gestrichelt*) genauso lang wie eine Fünfeckseite (b) ist.



Wo muss man eine Strecke a teilen, so dass das Verhältnis aus b durch den kleinen Rest c gleich dem Verhältnis aus Gesamtstrecke a durch das kleinere b ist $\left(\frac{b}{c} = \frac{a}{b}\right)$?